PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. HOJA 6.

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfa, y supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sharp(f^{-1}(w)) \leq m$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Probar que f es racional.

2. Sea $f = P/Q$ una función racional, donde P y Q no tienen ceros en común, y definamos $d = \max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$. Probar que para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{f(\infty)\}$ se tiene $\sharp(f^{-1}(w)) = d$, y que $\sharp(f^{-1}(w)) = d$ para todo $w \in \mathbb{C}^*$ (contando multiplicidades).

3. Sea U un conjunto acotado, y sea $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua tal que f es holomorfa en U. Demostrar que $\partial(f(U)) \subseteq f(\partial U)$.

4. Sea Ω un dominio simplemente conexo con frontera una curva cerrada de clase C^1 a trozos, y sean f, g meromorfas en un entorno abierto de Ω tales que ni f ni g tienen ceros o polos en $\partial\Omega$. Dar un ejemplo que muestre que f y $f + g$ pueden tener un número diferente de ceros en Ω.

5. Sin embargo, en la situación del ejercicio anterior, puede encontrarse una relación entre el número de ceros y el número de polos de f y de $f + g$. Encuéntrese y demuéstrese.

6. El objetivo de este problema es dar una versión del teorema de la función implícita para funciones holomorfas. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}^2$ y $F : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para cada w fijo la función $z \mapsto F(z, w)$ es holomorfa, y denotemos

$$F_1(z, w) = \frac{\partial F(z, w)}{\partial z}.$$

Supongamos que $F(z_0, w_0) = 0$ y que $F_1(z_0, w_0) \neq 0$, y elijamos $\rho > 0$ tal que $F(z, w_0) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

a) Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que para cada $w \in D(w_0, \delta)$ existe un único $z = g(w)$ tal que $z \in D(z_0, \rho)$ y $F(z, w) = 0$.

b) Probar que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{\xi F_1(\xi, w)}{F(\xi, w)} d\xi$$

para todo $w \in D(w_0, \delta)$. Indicación: usar el teorema de los residuos con la función $\xi \mapsto \xi F_1(\xi, w)/F(\xi, w)$.

c) Si además se supone que $w \mapsto F(z, w)$ es holomorfa para cada z fijo, y se denota

$$F_2(z, w) = \frac{\partial F(z, w)}{\partial w},$$

probar que g es holomorfa, y que

$$g'(w) = \frac{-F_2(g(w), w)}{F_1(g(w), w)}.$$

7. Sean f una función holomorfa definida en un entorno de z_0. Supongamos que z_0 es cero de orden n de la derivada f', y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Demostrar que:

a) Existe $\rho > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$.

b) Si $\delta = \min_{z \in \partial D(z_0, \rho)} |f(z) - w_0|$, entonces para todo $w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente $n + 1$ soluciones distintas en $D(z_0, \rho)$.

8. Consideremos las funciones $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$, $G(z) = i\frac{1-z}{1+z}$, y sea $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}z > 0\}$ el semiplano superior. Demostrar que $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es conforme, con inversa $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$. Probar también que F se extiende con continuidad a $\mathbb{R}$ y lleva $\mathbb{R}$ en $\mathbb{D} \setminus \{-1\}$.

9. Comprobar que $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ lleva el semidisco unidad superior conformemente en el primer cuadrante del plano. ¿Qué ocurre con las fronteras?

10. Se llama automorfismo del disco unidad $\mathbb{D}$ a toda aplicación conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Demostrar que todo automorfismo de $\mathbb{D}$ es de la forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{w-z}{1-\overline{w}z} := e^{i\theta}\varphi_w(z)$$

para ciertos $\theta \in [0, 2\pi]$ y $w \in \mathbb{D}$. Indicación: si $f(w) = 0$, aplicar el lema de Schwarz a $g := f \circ \varphi_w$ y a g^{-1}.

11. Probar que los únicos automorfismos de $\mathbb{D}$ que fijan el origen son las rotaciones.

12. Demostrar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{D}$ existe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ conforme tal que $f(a) = b$.

13. Consideremos la banda horizontal $\Omega = \{x + iy : 0 < y < 1\}$, y sean $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas. Definamos $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ por $f(x, 0) = f_0(x)$ y $f(x, 1) = f_1(x)$. Consideremos también las funciones

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\log\left(i\frac{1-z}{1+z}\right), \quad G(z) = \frac{i - e^{\pi z}}{i + e^{\pi z}}.$$

a) Demostrar que $F : \mathbb{D} \to \Omega$ es conforme, con inversa $F^{-1} = G : \Omega \to \mathbb{D}$.
b) Combinar la solución del problema de Dirichlet $\{\Delta v = 0$ en $\mathbb{D}$, $v = f \circ F$ en $\partial\mathbb{D}\}$, y la aplicaciones F y G, para obtener una fórmula explícita para la solución del problema de Dirichlet $\{\Delta u = 0$ en Ω, $u = f$ en $\partial\Omega$, $\lim_{|z|\to\infty} u(z) = 0\}$.

14. Dar un ejemplo de abierto acotado simplemente conexo cuya frontera no es una curva cerrada simple.

15. Demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$\sum_{k=-m}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left| f(t) - \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt.$$

Indicación: para comenzar, usar la fórmula $|z|^2 = z\overline{z}$ con el integrando del término de la izquierda.

16. Demostrar que si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es de clase C^1 a trozos entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, y en particular $\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n)e^{int} = f(t)$, uniformemente en $t \in \mathbb{T}$. Indicación: integrar por partes para demostrar que $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$. Luego usar el ejercicio anterior (con f' en lugar de f), observando que

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{|n|}|\widehat{f'}(n)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\widehat{f'}(n)|^2\right).$$

17. Para cada $t > 0$ definamos $K_t(x) = \frac{t}{\pi}\frac{1}{x^2+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, definamos $f_t(x) = f * K_t(x)$, y $F(x, y) = f * K_y(x)$, es decir

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds,$$

para $x + iy \in \mathbb{H}$, el semiplano superior.

a) Demostrar que $\{K_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad. (A este núcleo se le llama núcleo de Poisson para el semiplano superior.)
b) Demostrar que F es armónica en $\mathbb{H}$, y que $\lim_{(x,y)\to x_0} F(x, y) = f(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.
c) Concluir que F es la única solución continua del problema $\{\Delta F = 0$ en $\mathbb{H}$, $F = f$ en $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$, $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0\}$.