



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS VECTORIALES

EL SUBESPACIO VECTORIAL

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

ESPACIOS VECTORIALES
EL SUBESPACIO VECTORIAL

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Índice

Presentación	4
El subespacio vectorial	5
Linealidad en subespacios	7
Ejemplo de cálculo de subespacio I	9
Ejemplo de cálculo de subespacio II	11
Subespacios en	12
Ecuaciones implícitas de un subespacio	14
Ecuación paramétrica de un subespacio	16
Subespacio a partir de sus implícitas	18
A veces la cosa no funciona	20
Resumen	22
Definición de subespacio vectorial	22
Regla de las implícitas	22

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow is cast beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Presentación

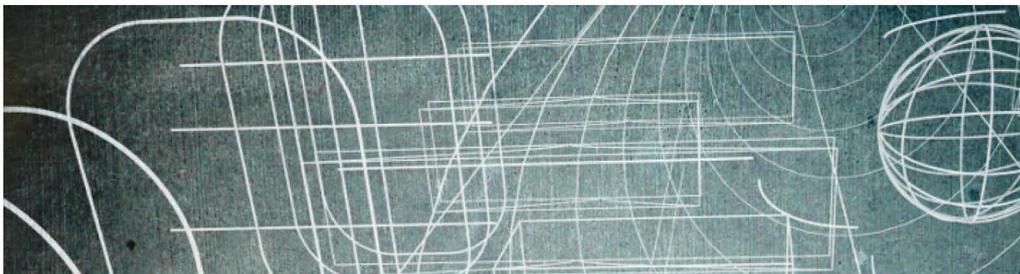
Ya hemos hablado del espacio vectorial, de la estructura general y de los vectores, las unidades elementales de esta. Pero las subestructuras de un espacio vectorial son tan interesantes o más que el espacio general. En un espacio real de dimensión tres, los subespacios supondrán estructuras geométricas tales como planos y rectas.

En el espacio de las matrices cuadradas de orden 3, las subestructuras son tensores y matrices asociadas a transformaciones geométricas en otros espacios tales como rotaciones, simetrías y proyecciones.

Los subespacios contarán con su propia organización interna de dimensiones y bases y eso es precisamente lo que vamos a estudiar en profundidad.

En este tema aprenderás:

- Qué es un subespacio, cómo funciona, que leyes sigue.
- Cómo se calcula la dimensión y la base de un subespacio.
- Cómo son las intersecciones, uniones y sumas de subespacios.
- Las distintas formas de expresar un subespacio: ecuaciones implícitas, paramétricas, etc.
- Y mucho más.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

El subespacio vectorial M_2

Tras conocer los espacios vectoriales y sus bases, hemos de saber que al igual que ocurre en estructuras algebraicas de orden inferior, como los grupos y los anillos, el **espacio vectorial cuenta con subconjuntos** que presentan su misma estructura: los llamados **subespacios vectoriales**.

Pongamos un espacio vectorial como el de las matrices, $M_{n \times m}$:

$$M_{n \times m} = \left\{ M \in M_{n \times m} \ / \ M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \ \forall a_{ij} \in \mathfrak{R} \ \text{con} \ \begin{cases} i = 1, 2, \dots \\ j = 1, 2, \dots \end{cases} \right.$$

Ahora escojamos un subconjunto de este: las matrices cuadradas de 2×2 , M_2 .

$$M_2 = \left\{ A \in M_2 \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R} \right\}$$

M_2 sobre el cuerpo de los reales forma un espacio vectorial, pues cumple:

- **Axioma 1.** Ley modular.
- **Axioma 2.** Asociativa con escalares.
- **Axioma 3.** Doble distributiva.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Por lo tanto, al ser M_2 un espacio vectorial, y a su vez un subconjunto de otro espacio vectorial, $M_{n \times m}$, se dirá que M_2 es subespacio vectorial de $M_{n \times m}$.

Ley modular

$$\forall A \in M_2 \rightarrow 1 \cdot A = A$$

Asociativa con escalares

$$\left. \begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \\ \forall A \in M_2 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$$

Doble distributiva

Respecto a escalares:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \\ \forall A \in M_2 \end{array} \right\} \rightarrow (\lambda + \mu) \cdot A = (\lambda \cdot A) + (\mu \cdot A)$$

Respecto a vectores:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathfrak{R} \\ \forall A, B \in M_2 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda \cdot (A + B) = (\lambda \cdot A) + (\lambda \cdot B).$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Linealidad en subespacios

El principal problema que presenta el cálculo de subespacios del modo presentado anteriormente, es que el cálculo de la axiomática completa de subespacios puede ser largo y complejo. Afortunadamente, hay una alternativa mucho más sencilla a la hora de llevar a cabo dicho cálculo, veámosla.

Un conjunto S contenido en un espacio vectorial V , $S \subset V$, será espacio vectorial de este si cumple:

- Que dados dos vectores de S , su suma da un nuevo vector de S :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S.$$

- Que dado el producto de un vector de S con un escalar, resulta otro vector de S :

$$\begin{cases} \forall \vec{u} \in S \\ \forall \lambda \in K \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in S$$

Estas dos condiciones se resumen en otra más sencilla de plantear que las resume. En general, esta última condición será la que se use a la hora de considerar el cálculo de un subespacio:

Si la combinación lineal de dos vectores cualesquiera de S con dos reales cualesquiera del cuerpo, da como resultado otro vector de S , S será subespacio vectorial de V .

$$S \text{ es subespacio de } V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \\ \forall \lambda, \mu \in K \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in S$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Estas condiciones se cumplen siempre para el vector nulo, con lo que cabe añadir que el vector nulo del espacio pertenecerá siempre a todos los subespacios de este, siendo a su vez el vector nulo de los propios subespacios. Es decir:

$$\vec{0} \in V \Rightarrow \vec{0} \in S \text{ (siempre)}$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de cálculo de subespacio I

Veamos otro cálculo de subespacio a través de esta nueva definición. Veamos si S_2 , el conjunto de las matrices simétricas de 2×2 , es subespacio vectorial de M_2 .

Recordemos que:

$$M_2 = \left\{ A \in M_2 \quad / \quad A = \begin{pmatrix} a & \\ & c \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R} \right\}$$

Y por otro lado, S_2 se definirá como:

$$S_2 = \left\{ A \in S_2 \quad / \quad A = \begin{pmatrix} ab & \\ & bc \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{R} \right\}$$

Es decir, aquellas matrices cuadradas de 2×2 que tienen el mismo elemento a ambos lados de su diagonal principal, luego si se ha de cumplir la definición, tendremos que:

$$S_2 \text{ es subespacio de } M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall A, B \in S_2 \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda A + \mu B \in S_2$$

$$\text{Si } A \in S_2 \quad A = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \\ & \beta\gamma \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Si } B \in M_2 \quad B = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon & \\ & \varepsilon\phi \end{pmatrix} \quad \delta, \varepsilon, \phi \in \mathfrak{R}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Por lo tanto $\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \delta & \epsilon \\ \epsilon & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \mu\delta & \lambda\beta + \mu\epsilon \\ \lambda\beta + \mu\epsilon & \lambda\gamma + \mu\phi \end{pmatrix}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de cálculo de subespacio II

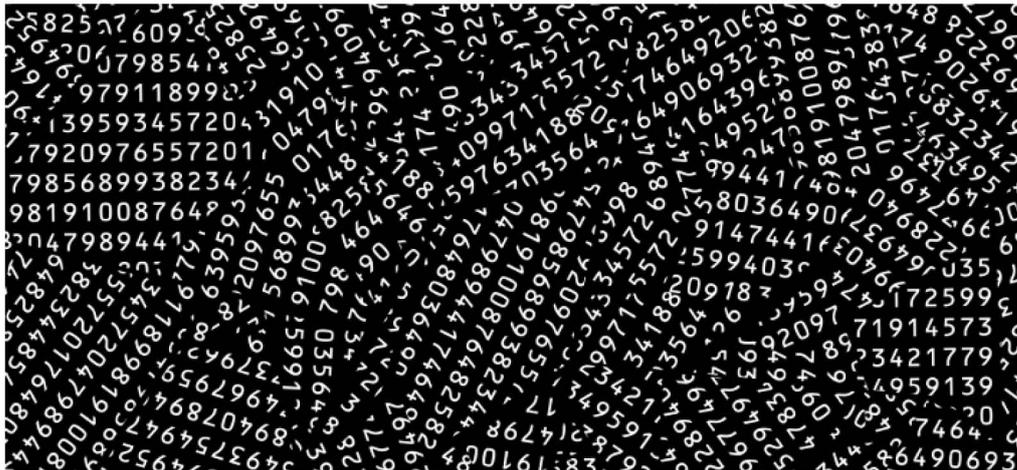
Vemos que la matriz resultante es efectivamente una matriz simétrica de 2x2, ya que presenta elementos distintos en su diagonal principal, y el mismo elemento a ambos lados de la misma:

$$\lambda\beta + \mu\epsilon$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \mu\delta & \lambda\beta + \mu\epsilon \\ \lambda\beta + \mu\epsilon & \lambda\gamma + \mu\phi \end{pmatrix} \in M_2$$

Y por ende S_2 , el conjunto de las matrices simétricas de 2x2, es subespacio vectorial de M_2 .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Subespacios en \mathbb{R}^n

Tras hablar de subespacios del espacio de las matrices, tratemos ahora el espacio vectorial más importante de todos: \mathbb{R}^n .

Veamos primero cómo se puede plantear un subespacio de \mathbb{R}^n . Los subespacios vectoriales son, a su vez, espacios vectoriales. Por lo tanto, presentan tanto dimensión como base.

En primer lugar está la expresión de este a partir de un sistema generador del mismo, pongámos un ejemplo en \mathbb{R}^3 : dado el conjunto $E = L\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$, vamos a comprobar que se trata de un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Lo primero que debemos entender es que si se nos presenta E como combinación lineal de tres vectores: $L\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$, se nos está indicando que esos tres vectores conforman la base de E, siempre y cuando sean linealmente independientes.

Vemos que $(1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (2, 1, 1)$, luego no son linealmente independientes (l.i.). Como el $(2, 1, 1)$ depende linealmente de los otros dos vectores, nos deshacemos de él, porque no me da más información, y nos quedamos con $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$. Partimos entonces de $E = L\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$E \text{ es subespacio de } \mathfrak{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in E$$

Luego $\forall \vec{x} \in E \quad \vec{x} = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ con lo que, si se puede escribir cualquier vector de E de esta forma, tendríamos:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

ESPACIOS VECTORIALES
EL SUBESPACIO VECTORIAL

$$\text{Si } \vec{u} \in E \quad \vec{u} = (a + b, a, b)$$

$$\text{Si } \vec{v} \in E \quad \vec{v} = (c + d, c, d)$$

$$\text{L} \quad \text{u} \quad \text{e} \quad \text{g} \quad \text{o}$$
$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(a + b, a, b) + \mu(c + d, c, d) = (\lambda(a + b) + \mu(c + d), \lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d) \in$$

Como el vector resultante de la suma tiene la misma estructura que un vector de E, concluimos que E es subespacio vectorial.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ecuaciones implícitas de un subespacio

Las ecuaciones implícitas de un subespacio son unas ecuaciones que explican cómo se encuentran ligadas las componentes de un vector genérico de ese subespacio.

Por ejemplo, un subespacio U de \mathbb{R}^3 presenta la siguiente implícita:

$$U = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x + y + z = 0}_{\text{Ec. implícita de } U} \right\}$$

¿Qué significa eso? Pues que U está formado por aquellos vectores de \mathbb{R}^3 cuyas componentes sumen 0. Por ejemplo: el $(2, -1, -1) \in U$.

Si nos hubiesen pedido calcular las ecuaciones implícitas de E , el subespacio que hemos estudiado un poco antes, habría que proceder como se indica a continuación:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta & (i) \\ y = \beta & (ii) \\ z = \alpha & (iii) \end{cases}$$

Si introdujésemos (ii) y (iii) en (i), obtendríamos $x=y+z$, que es la ecuación implícita del subespacio.

El subespacio E es de dimensión 2 ($\dim(E)=2$) porque su base está formada por dos vectores l.i.

También podríamos haber llegado a la misma conclusión viendo que el subespacio depende de dos parámetros en sus ecuaciones paramétricas. De hecho, conviene recordar la siguiente regla:

$$\text{Nº de incógnitas} = \text{Nº de ecuaciones implícitas} + \text{Nº de parámetros}$$

Si la dimensión de un subespacio coincide con la dimensión del espacio en el que está contenido, subespacio y espacio son iguales:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

E es subespacio de V $\Rightarrow E \subseteq V$
si $\dim(E) = \dim(V) \Rightarrow E = V$

Número de incógnitas

El número de incógnitas puede plantearse también como dimensión del **espacio**.

Número de parámetros

El número de parámetros puede plantearse también como dimensión del **subespacio**.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ecuación paramétrica de un subespacio

En el problema anterior, hemos llegado hasta el paso:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \Rightarrow \left\{ \right.$$

A esas tres ecuaciones, (i), (ii) e (iii), se las conoce como ecuaciones paramétricas del subespacio. Las ecuaciones paramétricas permiten saber dos cosas: qué dimensión tiene el subespacio y qué estructura tienen los vectores de la base del subespacio.

La dimensión del subespacio viene dada por el número de parámetros linealmente independientes que estén presentes. En el caso enunciado más arriba sería 2, ya que presenta dos parámetros α y β .

En cuanto al cálculo de la base, en realidad este se debería extrapolar a partir del siguiente hecho: cualquier vector del subespacio se escribe: $\vec{x} = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$.

Sin embargo, si tomamos las paramétricas y sustituimos ordenadamente los parámetros por unos y ceros la obtendríamos con gran facilidad.

Primero sustituimos el primer parámetro por 1 y los restantes (en este caso solo hay uno) por 0:

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 1) \text{ Con lo que, efectivamente, obtenemos el primer vector de la base.}$$

A continuación, sustituimos el segundo parámetro por 1 y los restantes (en este caso solo hay uno) por 0:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 1, 0)$$
 Con lo que, efectivamente, obtenemos el segundo vector de la base.

Quedando, como ya sabíamos, $E = L\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Subespacio a partir de sus implícitas

A continuación, vamos a trabajar un poco con las ecuaciones implícitas comprobando si el conjunto K describe un subespacio vectorial. Para eso tendremos a K definido mediante sus ecuaciones implícitas. Al final también vamos a calcular su dimensión y una base.

Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, lo que nos da un grado de libertad. Por este motivo, deberemos fijar un parámetro:

$$K = \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$$

Por lo que cualquier vector de K se escribirá:
 $\forall \vec{x} = (x, y, z) \in K \quad \vec{x} = \alpha(1, -1, 1) = (\alpha, -\alpha, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$K \text{ es subespacio de } \mathfrak{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in K \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in K$$

Con lo que, si se puede escribir cualquier vector de K de esta forma, tendríamos:

$$\text{Si } \vec{u} \in K \quad \vec{u} = (a, -a, a)$$

$$\text{Si } \vec{v} \in K \quad \vec{v} = (c, -c, c)$$

$$\text{L} \quad \text{u} \quad \text{e} \quad \text{g} \quad \text{o} \\ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(a, -a, a) + \mu(c, -c, c) = (\lambda a + \mu c, -(\lambda a + \mu c), \lambda a + \mu c) \in K$$

Como el vector resultante de la suma $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ tiene la misma estructura que un vector de K , concluimos que K es subespacio vectorial. Para obtener su base, vamos a la ecuación paramétrica y le damos valor 1 al parámetro:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R} \xrightarrow{\alpha=1} (1, -1, 1)$$

Luego la base de K es $B_K = \{(1, -1, 1)\}$, y su dimensión $\dim(K)=1$.

Ecuaciones implícitas de K

$$K = \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

A veces la cosa no funciona

Parece que cualquier conjunto dentro de un espacio vectorial tendrá estructura de subespacio, pero no es así. Vamos a comprobar si el conjunto E definido mediante las siguientes ecuaciones implícitas:

$$E = \{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / x + z = 3 \}, \text{ describe un espacio vectorial.}$$

Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, lo que nos da un grado de libertad. Por este motivo, deberemos fijar un parámetro:

$$x + z = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

Luego cualquier vector de E se escribirá:

$$\vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = (\alpha, \beta, 3 - \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$K \text{ es subespacio de } \mathfrak{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in K \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in K$$

Con lo que si se puede escribir cualquier vector de E de esta forma, tendríamos:

$$\text{Si } \vec{u} \in E \quad \vec{u} = (a, b, 3 - a)$$

$$\text{Si } \vec{v} \in E \quad \vec{v} = (c, d, 3 - c)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda(a, b, 3 - a) + \mu(c, d, 3 - c) = (\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d, 3(\lambda + \mu) - \lambda a - \mu c) \notin E$$

Como el vector resultante de la suma $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ **no tiene** la misma estructura que un vector de E, debido a que figura el término $3(\lambda + \mu)$ donde sólo debería haber un 3, concluimos que E **no es** subespacio vectorial.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen

Definición de subespacio vectorial

Si la combinación lineal de dos vectores cualesquiera de S con dos reales cualesquiera del cuerpo, a como resultado otro vector de S , S será subespacio vectorial de V .

- S es subespacio de $V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \\ \forall \lambda, \mu \in K \end{cases} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in S$
- $\vec{0} \in V \Rightarrow \vec{0} \in S$ (siempre)

Regla de las implícitas

Nº de incógnitas = Nº de ecuaciones implícitas + Nº de parámetros

- Nº de incógnitas puede plantearse también como dimensión del **espacio**.
- Nº de parámetros puede plantearse también como dimensión del **subespacio**.
- Si la dimensión de un subespacio coincide con la dimensión del espacio en el que está contenido, subespacio y espacio son iguales.
- E es subespacio de $V \Rightarrow E \subseteq V$
- Si $\dim(E) = \dim(V) \Rightarrow E = V$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70