



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

EL PRODUCTO ESCALAR

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Índice

Presentación	4
El producto escalar	5
El producto escalar habitual	7
Norma o módulo de un vector	8
Distancia entre dos vectores	8
Ángulo entre dos vectores	10
Vectores ortogonales	10
Subespacios ortogonales	12
Desigualdad de Schwartz	14
Desigualdad de Minkowski	16
Resumen	17

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

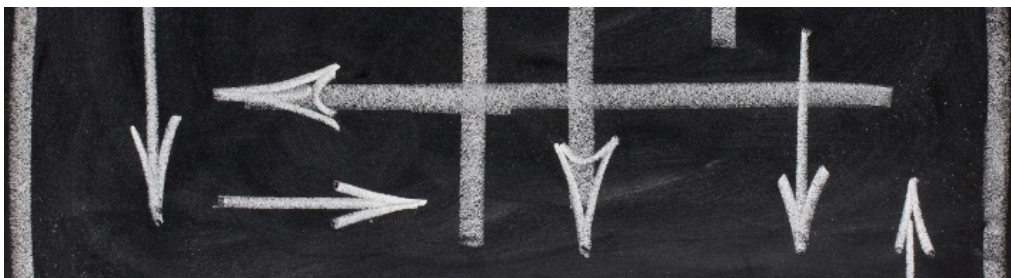
Presentación

Hasta ahora, en espacios vectoriales podemos plantear dónde están situados unos vectores respecto de otros, según sus componentes en una determinada base, ¿Pero cómo saber qué ángulo forman dos vectores o cuánto mide un determinado vector de largo? Hasta la introducción del concepto del producto escalar, esta pregunta no tiene respuesta.

El producto escalar es la operación a partir de la cual germina toda la geometría métrica descriptiva. Aún falta por llegar el importante concepto del "punto geométrico", pero el paso hacia delante es enorme en cuanto a las posibilidades que se abren. No solo en el ámbito geométrico, en física, por ejemplo, un vector que representa una fuerza no solo tiene ya dirección y sentido, sino que ahora podremos hablar de la magnitud de dicha fuerza en esa determinada dirección gracias al concepto de módulo.

En este tema aprenderemos:

- Qué es el producto escalar de dos vectores, y cómo engendra el espacio euclídeo.
- Cómo se calcula el módulo de un vector y el ángulo que forman dos.
- Profundizaremos en el concepto de ortogonalidad de dos vectores, estudiando los subespacios ortogonales y las propiedades de estos.
- Las desigualdades geométricas de los módulos de Schwartz y Minkowski.
- Y mucho más.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El producto escalar

El producto escalar, o producto interior, es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar (de ahí su nombre).

Se plantea del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} f : V \times V \rightarrow \mathfrak{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \lambda \in \mathfrak{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{R}$$

Observemos las propiedades de esta operación:

1. **Simetría:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. **Linealidad:** $\left\{ \begin{array}{l} (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) \quad 1^{\text{er}} \text{ argumento} \\ \vec{v} \cdot (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{u}_2) \quad 2^{\text{o}} \text{ argumento} \end{array} \right.$

Debido a la simetría, con que cumpla linealidad en uno de los dos argumentos ya se puede considerar que la cumple en ambos

3. **Positividad:** $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} > 0$.

Así, diremos que cualquier operación que cumpla estas propiedades en un espacio vectorial, es un producto escalar.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Llamaremos espacio euclídeo a un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

El producto escalar se representará como $\vec{u} \cdot \vec{v}$. También se puede utilizar la notación $\langle u, v \rangle$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El producto escalar habitual

Es posible que en otras asignaturas o en otros niveles de formación ya te hayas topado con el producto escalar pues, es habitual que se use en asignaturas de base física o dónde se utilice mucho la geometría.

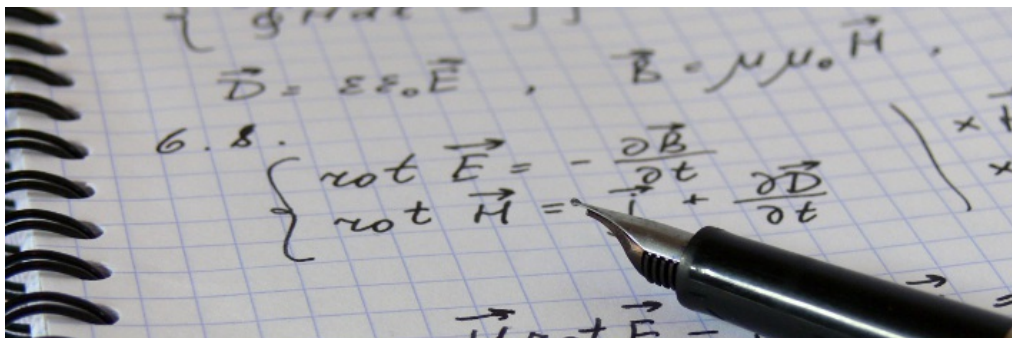
El problema surge cuando uno se da cuenta de que la información con la que contaba hasta el momento acerca de los productos escalares estaba sesgada.

Hasta el momento, el producto escalar de dos vectores de \mathbb{R}^3 , para quien haya trabajado con él, se realizaba así:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x^1, x^2, x^3) \cdot (y^1, y^2, y^3) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \mathfrak{R}$$

Esto no es incorrecto, pero sí incompleto. ¿Por qué? Porque no es el único producto escalar existente en \mathbb{R}^3 . De hecho, cualquier operación que nos definan o definamos y que cumpla las condiciones ya descritas (**simetría**, **linealidad** y **positividad**) es un producto escalar, sin importar qué aspecto tenga.

Teniendo esto siempre en mente, continuemos con el estudio de la operación.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Norma o módulo de un vector

La norma o módulo de un vector es $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

La noción corresponde, intuitivamente, a la *longitud del vector*. También se puede denotar $\|\vec{v}\|$.

Con cualquier producto escalar, el único vector de módulo cero es el $\vec{0}$.

El módulo de un vector es el mismo que el de su opuesto: $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$

El módulo de $a\vec{v}$ es $|a\vec{v}| = |a| |\vec{v}|$ (es decir, el módulo queda multiplicado por el valor absoluto del escalar).

Distancia entre dos vectores

La distancia entre \vec{u} y \vec{v} es la norma del vector diferencia entre ambos.

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}|$$

Puedes observar que si alguno de los dos vectores es nulo no podemos dividir por su módulo y, por tanto, el ángulo no está definido. En efecto, geoméricamente, el vector nulo no forma ángulo ninguno.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ángulo entre dos vectores

El producto escalar de dos vectores también puede expresarse en función de los módulos de los vectores que lo conforman, así como el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\hat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Donde $\hat{(\vec{u}, \vec{v})}$ es el ángulo que forman ambos vectores.

Por tanto, para generalizar la noción de ángulo a cualquier espacio euclídeo, definimos:

$$\hat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}\right)$$

Vectores ortogonales

Dos vectores \vec{u}, \vec{v} son ortogonales si su producto escalar es cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Si miramos la definición de ángulo entre dos vectores, $\hat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ (rad)

Es decir que dos vectores ortogonales forman 90°.

Cabe destacar que si dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, entonces también lo son sus múltiplos $\alpha\vec{u}$ y $\beta\vec{v}$ (α, β escalares).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

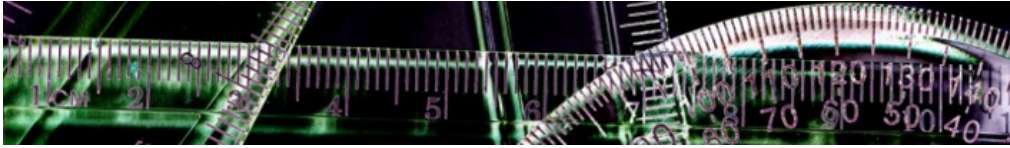
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

ESPACIOS EUCLÍDEOS

EL PRODUCTO ESCALAR



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Subespacios ortogonales

Se llama subespacio ortogonal a otro, dado U , al subespacio $\omega(U)$, o bien U^\perp , formado por todos aquellos vectores del espacio euclídeo que son ortogonales a los de U .

Análiticamente, se enuncia: $U^\perp = \{\vec{x} \in E / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U\}$.

Puede comprobarse que $\underbrace{U \oplus U^\perp}_{\text{suma directa}} = \begin{cases} U \cap U^\perp = \{\vec{0}\} \\ U + U^\perp = E^n \end{cases}$

Veamos un ejemplo:

Si definimos en \mathbb{R}^3 un producto escalar habitual, $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x^1, x^2, x^3) \cdot (y^1, y^2, y^3) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \mathfrak{R}$, y tenemos un subespacio $U = L\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

El subespacio ortogonal al U (U^\perp) se puede calcular teniendo en cuenta que ser ortogonal a todos los vectores de U equivale a ser ortogonal a los de su base.

En tal caso podemos definir U^\perp como $U^\perp = \{\vec{x} \in E / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U\}$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$U^\perp = \{ \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in E / (x^1, x^2, x^3) \cdot (1, 1, 1) = 0 \wedge (x^1, x^2, x^3) \cdot (1, 0, 1) = 0 \}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x^1, x^2, x^3) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ (x^1, x^2, x^3) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Rightarrow x^1 + x^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = 0 \\ x^3 = -\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Con lo que concluimos que $U^\perp = L\{(1, 0, -1)\}$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Desigualdad de Schwartz

En cualquier espacio euclídeo E , se verifica que:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

Para comprobarlo, se parte de:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \lambda \in \mathfrak{R} \rightarrow (\vec{x} + \lambda \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{y}) \geq 0$$

Como además:

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \lambda(\vec{y} \cdot \vec{x}) + \lambda(\vec{y} \cdot \vec{x}) + \lambda^2(\vec{y} \cdot \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + 2\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \lambda^2|\vec{y}|^2$$

(Nota: esta ecuación no puede tener dos soluciones reales, ya que entonces la forma cuadrática no sería definida positiva. El discriminante de la ecuación ha de ser nulo o negativo).

La desigualdad resulta trivial si: $\vec{y} = \vec{0}$ ($0 \leq 0$).

En otro caso es posible tomar: $\lambda = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2}$, con lo que entrando en (1).

$$|\vec{x}|^2 - 2 \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^4} |\vec{y}|^2 \geq 0.$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Es decir: $|\vec{x}|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} \geq 0$, de donde: $|\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 \geq (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$.

Tomando finalmente raíces cuadradas con determinación positiva, se obtiene el resultado:

$$|\vec{x}| |\vec{y}| \geq |\vec{x} \cdot \vec{y}|$$

Obsérvese que en el segundo miembro aparece el valor absoluto del número real $\vec{x} \cdot \vec{y}$, mientras que en el primero, aparecen los módulos de los vectores \vec{x} e \vec{y} .



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Desigualdad de Minkowski

En cualquier espacio euclídeo E , se verifica que:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Para comprobarlo, se parte de:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) \leq |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|^2 +$$

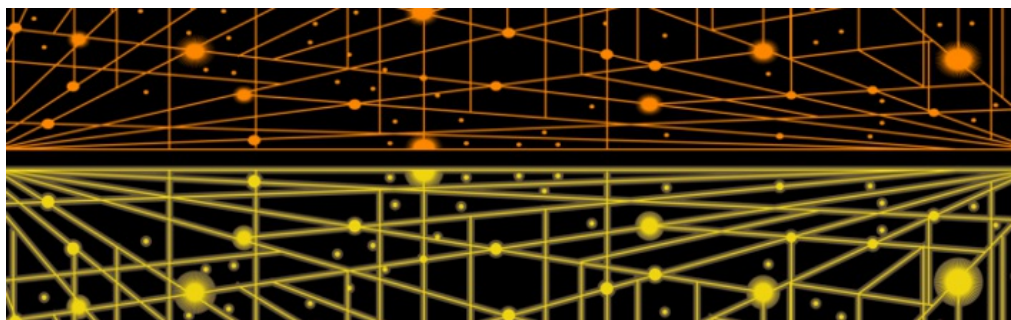
Lo cual es posible gracias a la desigualdad de Schwarz, antes descrita.

De este modo:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

Donde, tomando raíces cuadradas con determinación positiva, se obtiene:

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resumen

- El producto escalar, se plantea: $f : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \lambda \in \mathfrak{R}$ } $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{R}$
- Simetría. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Linealidad. $\begin{cases} (\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) & 1^{\text{er}} \text{ argumento} \\ \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{u}_2) & 2^{\text{o}} \text{ argumento} \end{cases}$
- Positividad. $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} > 0$.
- Norma o módulo de un vector: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- Ángulo entre dos vectores: $(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}\right)$
- Otra forma de plantear el producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- Vectores ortogonales: Dos vectores \vec{u}, \vec{v} son ortogonales si su producto escalar es cero:
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Subespacios ortogonales. $U^\perp = \{\vec{x} \in E / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U\}$. Puede comprobarse que:

$$\underbrace{U \oplus U^\perp}_{\text{suma directa}} = \begin{cases} U \cap U^\perp = \{\vec{0}\} \\ U + U^\perp = E^n \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70