Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

EL AUTOVALOR

Índice

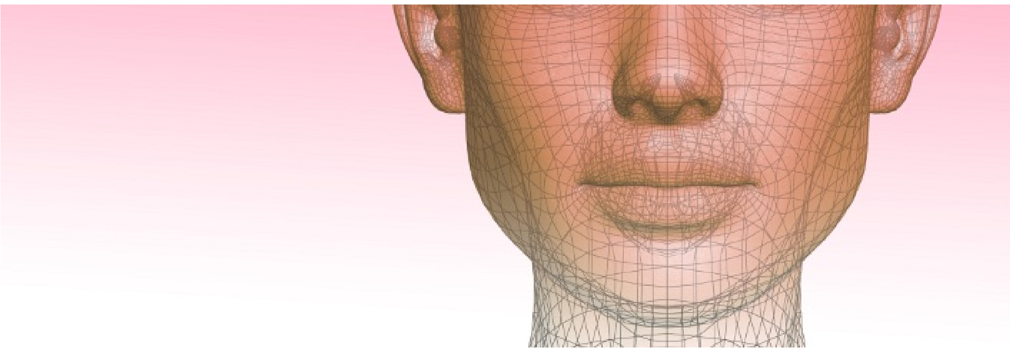
Presentación

Los autovalores son escalares asociados a los homomorfismos de una forma muy especial. Son invariantes de cada tipo de transformación y tienen una fuerte connotación geométrica.

Hay autovalores por todas partes y se utilizan para infinidad de cosas. Desde la resolución de sistemas de ecuaciones numéricas hasta el software de reconocimiento facial de las cámaras del metro, los autovalores están muy presentes en nuestro día a día, participando en muchos avances técnicos actuales.

Vamos a introducirnos en este tema tan fascinante donde aprenderemos:

- Qué es un autovalor y qué es un autovector. Para qué sirven, cómo se calculan.
- Qué es un espacio característico. De dónde procede.
- Cómo funcionan las relaciones de dimensiones de subespacios y ordenes de multiplicidad de autovalores.
- Y muchas cosas más.



Autovalores y autovectores

Los vectores propios de una aplicación lineal de un espacio en sí mismo u endomorfismo son los vectores no nulos que cuando son transformados por la aplicación dan lugar a un múltiplo de sí mismos con lo que no cambian de dirección.

$$f : V \to V$$
$$f(\vec{x}) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathfrak{R}} \underbrace{\vec{x}}_{\in V}$$

Donde el escalar $\lambda \in \mathfrak{R}$ recibe el nombre de valor propio o autovalor.

El vector $\vec{x} \in V$ recibe el nombre de vector propio o autovector.

Las transformaciones lineales del espacio como la rotación, la reflexión, el ensanchamiento o cualquier combinación de los anteriores, pueden interpretarse según el efecto que producen estos vectores.

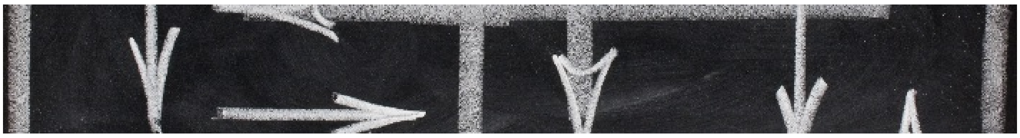
De esta forma, si tuviésemos un endomorfismo f de R^3 tal que:

En $f : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$

f(1,1,1)=(3,3,3)

Diríamos que el vector (1,1,1) es un autovector asociado al autovalor 3 en f, porque (1,1,1) se transforma en sí mismo multiplicado por 3 al aplicarle el endomorfismo:

f(1,1,1)=(3,3,3)=3(1,1,1)



Valor propio o autovalor

En este tema, valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor son sinónimos usados indistintamente.

Vector propio o autovector

En este tema, vector propio, autovector, vector característico o eigenvector son sinónimos usados indistintamente.

Cálculo de los autovalores

En cada endomorfismo hay tantos autovalores como dimensión tenga el espacio. Eso no significa que tengan que ser necesariamente distintos. Puede haber autovalores simples, pero también dobles, triples, etc.

Para calcular los autovalores de un endomorfismo debemos utilizar la ecuación característica:

$$|F_B - \lambda I| = 0$$

Por ejemplo, si partimos de un endomorfismo f con una matriz: $F_B = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix}$

Sus autovalores serán:

$$|F_B - \lambda I| = \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix}}_{F_B} - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}}_{I} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \quad autovalor \;\; simple \\ \left. \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right\} autovalor \;\; doble \end{cases}$$

Han salido tres autovalores porque el endomorfismo es de un espacio de dimensión 3. Uno de los autovalores es simple y el otro es doble.

Se llama orden de multiplicidad de un autovalor al número de veces que verifica la ecuación característica.

Orden de multiplicidad

En nuestro ejemplo, el orden de multiplicidad del 0 es 1 porque es una raíz simple de la ecuación, mientras que el orden de 2 es 2 porque se trata de una raíz doble:

$$\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & OM(0) = 1 \\ \lambda_2 = 2 & OM(2) = 2 \end{cases}$$

Subespacio característico

Se llama subespacio característico, $S(\lambda)$, al subespacio formado por todos aquellos vectores asociados a un mismo autovalor. Es decir, si un endomorfismo tuviese, digamos, el autovalor 3, el subespacio S(3) estaría formado por todos los vectores asociados al 3, todos aquellos que al transformarse con el endomorfismo se conviertan en el triple de sí mismos.

Analíticamente un subespacio característico se define: $S(\lambda) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$

A efectos de cálculo la forma de obtener un subespacio propio o característico es: $S(\lambda) = \ker(f - \lambda i)$

Eso significa que cada subespacio propio que calculemos lo tendremos que hacer según la ecuación matricial:

$$(F_B - \lambda I)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo se calcula S(2) en el ejemplo anterior:

$$S(2) = \ker(f - 2i) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{cases}$$

$$S(2) = L\{(0, 0, 1)\}$$

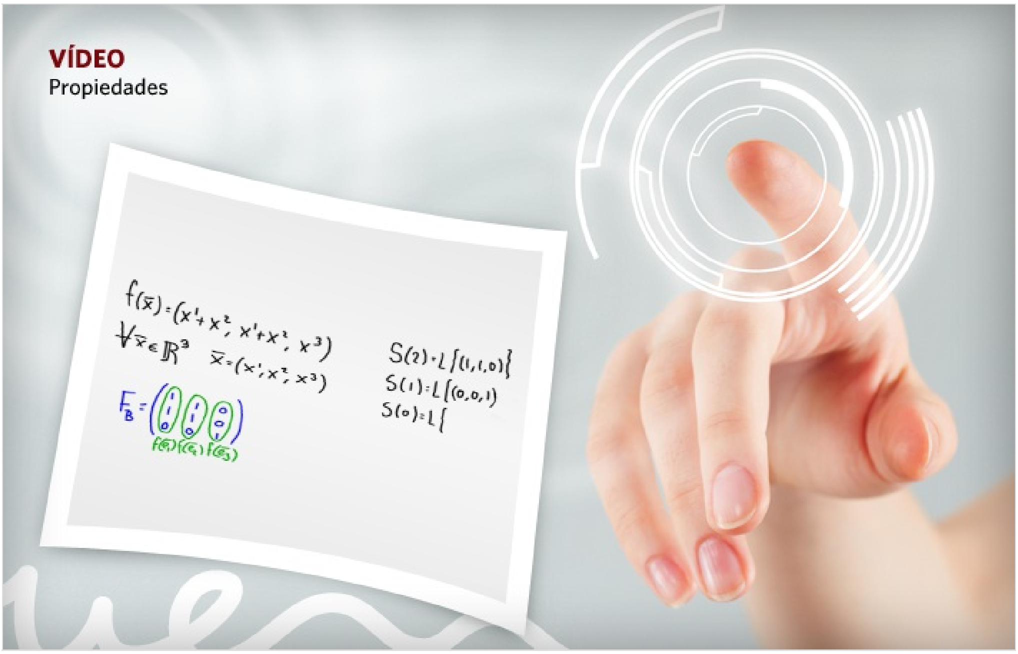
Hemos obtenido la base de S(2). Todos los vectores del subespacio se transforman en ellos mismos multiplicados por su autovalor. En este caso, por 2.

Hay que recordar una norma muy importante:

$$1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$$

La dimensión de un subespacio característico es siempre mayor o igual a 1 y menor o igual al orden de multiplicidad del autovalor. En el ejemplo, dim(S(2))=1 mientras que OM(2)=2, con lo que vemos que se cumple.

Propiedades



Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (2 vectores)

Vamos a demostrar que vectores propios no nulos asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

Procederemos por inducción.

Empezaremos por ver que lo enunciado se cumple para el caso de dos vectores.

Sean: $\vec{x}_1 \in S(\lambda_1); \vec{x}_2 \in S(\lambda_2)$ en el endomorfismo t: $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \neq \vec{x}_2$.

Entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es sistema libre.

Si $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ (1)

Aplicando t: $\alpha_1 t(\vec{x}_1) + \alpha_2 t(\vec{x}_2) = \vec{0}$

Luego: $\alpha_1(\lambda_1\vec{x}_1) + \alpha_2(\lambda_2\vec{x}_2) = \vec{0}$

O bien: $(\alpha_1\lambda_1)\vec{x}_1 + (\alpha_2\lambda_2)\vec{x}_2 = \vec{0}$

Multiplicando por λ_2 en (1): $(\alpha_1\lambda_2)\vec{x}_1 + (\alpha_2\lambda_2)\vec{x}_2 = \vec{0}$ y restando las dos últimas relaciones:

$$(\alpha_1\lambda_1 - \alpha_1\lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$$

Como $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1 = 0$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \alpha_1 = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha_2 = 0$

Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (k vectores)

Sigamos con la demostración de que vectores propios no nulos asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

Acabamos de ver cómo lo enunciado se cumple para el caso de dos vectores. Supongamos ahora que lo enunciado se cumple para el caso de *k* vectores (hipótesis de inducción) y veremos, a partir de ello, que también se cumple para *k* + 1 vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{0} \neq \vec{x}_1 \in S(\lambda_1) \\ \vec{0} \neq \vec{x}_2 \in S(\lambda_2) \\ \quad\vdots \\ \vec{0} \neq \vec{x}_k \in S(\lambda_k) \\ \vec{0} \neq \vec{x}_{k+1} \in S(\lambda_{k+1}) \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k \neq \lambda_{k+1} \end{array}\right\} \rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}\} \text{ es libre.}$$

Si $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} = \vec{0}$ (2), aplicando t: $\alpha_1 t(\vec{x}_1) + \alpha_2 t(\vec{x}_2) + \ldots + \alpha_k t(\vec{x}_k) + \alpha_{k+1} t(\vec{x}_{k+1}) = \vec{0}$

Luego: $\alpha_1(\lambda_1\vec{x}_1) + \alpha_2(\lambda_2\vec{x}_2) + \ldots + \alpha_k(\lambda_k\vec{x}_k) + \alpha_{k+1}(\lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1}) = \vec{0}$

O bien: $(\alpha_1\lambda_1)\vec{x}_1 + (\alpha_2\lambda_2)\vec{x}_2 + \ldots + (\alpha_k\lambda_k)\vec{x}_k + (\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})\vec{x}_{k+1} = \vec{0}$.

1/2

Multiplicando λ_{k+1} en (2): $(\alpha_1\lambda_{k+1})\vec{x}_1 + (\alpha_2\lambda_{k+1})\vec{x}_2 + \ldots + (\alpha_k\lambda_{k+1})\vec{x}_k + (\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})\vec{x}_{k+1} = \vec{0}$

Y restando las dos últimas relaciones: $[\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})]\vec{x}_1 + [\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})]\vec{x}_2 + \ldots + [\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})]\vec{x}_k = \vec{0}$

Con lo que aplicando la hipótesis de inducción, resulta:

$$\begin{array}{l} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_k \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_k = 0 \end{array}$$

Y entrando finalmente en (2) con a $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0 \rightarrow \alpha_{k+1} = 0$, con lo que queda probada la independencia buscada.

2/2

Un ejemplo un tanto especial

Veamos un ejemplo de aplicación de autovalores. Pero en lugar de trabajar con la matriz, vamos a estudiar el problema de forma distinta, a partir de la propia definición de autovalor.

Establezcamos las condiciones del ejemplo: en un espacio vectorial euclídeo E, de dimensión n, dado un vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ se considera la aplicación $f: E \to E$, definida por: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\, \vec{a}$.

Vamos a obtener razonadamente los autovalores de f y los subespacios característicos correspondientes.

$$Si \quad \vec{x} \in \{\, \vec{a}\,\}^{\perp} \to f(\vec{x}) = \vec{x} - 2\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \vec{x} - 2\cdot\frac{0}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \vec{x} \to \vec{x} \in S(1) \to \dim\left(S(1)\right) = \dim\left(\{\, \vec{a}\,\}^{\perp}\right) = 2$$

$$Si \quad \vec{x} \in L(\vec{a}) \to \vec{x} = \alpha\vec{a} \to f(\alpha\vec{a}) = \alpha\vec{a} - 2\cdot\alpha\left(\underbrace{\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}}_{=1}\right)\vec{a} = \alpha\vec{a} - 2\alpha\vec{a} = -\alpha\vec{a} = -\vec{x} \to \vec{x} \in S(-1) \to$$

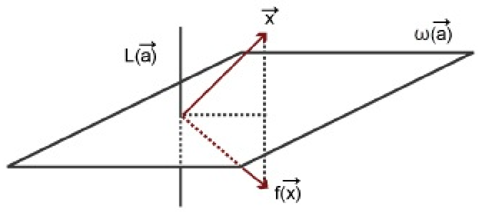
$$\to \dim\left(S(-1)\right) = \dim\left(L(\vec{a})\right) = 1$$

Con lo que se concluye que: $\begin{cases} S(1) = \{\, \vec{a}\,\}^{\perp} \\ S(-1) = L(\vec{a}) \end{cases}$, son los dos subespacios característicos de la transformación.

Se observa que $\underbrace{S(1) \oplus S(-1)}_{suma\ directta} = \begin{cases} S(1) \cap S(-1) = \{\vec{0}\} \\ S(1) + S(-1) = E^3 \end{cases}$, y también se extrae que $OM(1) = \dim\left(S(1)\right)$ y $OM(-1) = \dim\left(S(-1)\right)$

1/2

Si E es el espacio de los vectores geométricos, vamos a interpretar geométricamente la aplicación f: Geométricamente es una simetría respecto a $\{\, \vec{a}\,\}^{\perp}$.



2/2

Resumen

Definición de autovalor

Los vectores propios de una aplicación lineal de un espacio en sí mismo u endomorfismo son los vectores no nulos que cuando son transformados por la aplicación dan lugar a un múltiplo de sí mismos con lo que no cambian de dirección:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathfrak{R}} \underbrace{\vec{x}}_{\in V}$$

- El escalar $\lambda \in \mathfrak{R}$ recibe el nombre de valor propio o autovalor.
- El vector $\vec{x} \in V$ recibe el nombre de vector propio o autovector.

La ecuación característica

Sirve para calcular los autovalores de un endomorfismo: $|F_B - \lambda I| = 0$

- Se llama **orden de multiplicidad** de un autovalor al número de veces que verifica la ecuación característica.

Subespacio característico

Se llama subespacio característico, $S(\lambda)$, al subespacio formado por todos aquellos vectores asociados a un mismo autovalor: $S(\lambda) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \ker(f - \lambda i)$

- Hay que recordar una norma muy importante: $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$