



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

EL AUTOVALOR

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Índice

Presentación	4
Autovalores y autovectores	5
Cálculo de los autovalores	7
Subespacio característico	9
Propiedades	11
Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (2 vectores)	12
Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (k vectores)	14
Un ejemplo un tanto especial	15
Resumen	17
Definición de autovalor	17
La ecuación característica	17
Subespacio característico	17

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow is cast beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

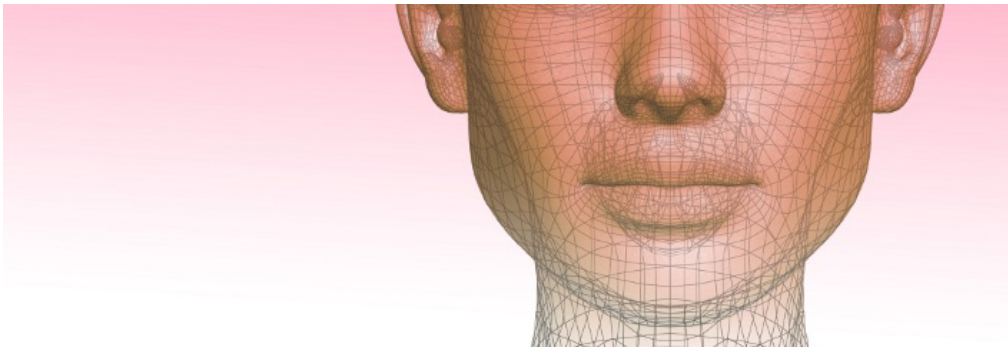
Presentación

Los autovalores son escalares asociados a los homomorfismos de una forma muy especial. Son invariantes de cada tipo de transformación y tienen una fuerte connotación geométrica.

Hay autovalores por todas partes y se utilizan para infinidad de cosas. Desde la resolución de sistemas de ecuaciones numéricas hasta el software de reconocimiento facial de las cámaras del metro, los autovalores están muy presentes en nuestro día a día, participando en muchos avances técnicos actuales.

Vamos a introducirnos en este tema tan fascinante donde aprenderemos:

- Qué es un autovalor y qué es un autovector. Para qué sirven, cómo se calculan.
- Qué es un espacio característico. De dónde procede.
- Cómo funcionan las relaciones de dimensiones de subespacios y ordenes de multiplicidad de autovalores.
- Y muchas cosas más.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Autovalores y autovectores

Los vectores propios de una aplicación lineal de un espacio en sí mismo u endomorfismo son los vectores no nulos que cuando son transformados por la aplicación dan lugar a un múltiplo de sí mismos con lo que no cambian de dirección.

$$f: V \rightarrow V$$

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathfrak{R}} \underbrace{\vec{x}}_{\in V}$$

Donde el escalar $\lambda \in \mathfrak{R}$ recibe el nombre de valor propio o autovalor.

El vector $\vec{x} \in V$ recibe el nombre de vector propio o autovector.

Las transformaciones lineales del espacio como la rotación, la reflexión, el ensanchamiento o cualquier combinación de los anteriores, pueden interpretarse según el efecto que producen estos vectores.

De esta forma, si tuviésemos un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 tal que:

$$\text{En } f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$$

$$f(1,1,1)=(3,3,3)$$

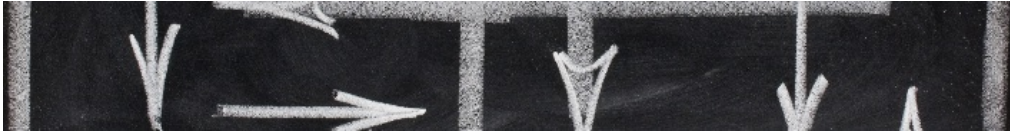
Diríamos que el vector $(1,1,1)$ es un autovector asociado al autovalor 3 en f , porque $(1,1,1)$ se transforma en sí mismo multiplicado por 3 al aplicarle el endomorfismo:

$$f(1,1,1)=(3,3,3)=3(1,1,1)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Valor propio o autovalor

En este tema, valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor son sinónimos usados indistintamente.

Vector propio o autovector

En este tema, vector propio, autovector, vector característico o eigenvector son sinónimos usados indistintamente.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cálculo de los autovalores

En cada endomorfismo hay tantos autovalores como dimensión tenga el espacio. Eso no significa que tengan que ser necesariamente distintos. Puede haber autovalores simples, pero también dobles, triples, etc.

Para calcular los autovalores de un endomorfismo debemos utilizar la ecuación característica:

$$|F_B - \lambda I| = 0$$

Por ejemplo, si partimos de un endomorfismo f con una matriz: $F_B = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix}$

Sus autovalores serán:

$$|F_B - \lambda I| = \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 112 \end{pmatrix}}_{F_B} - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}}_I \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) =$$

$$= -\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{autovalor simple} \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \text{ autovalor doble}$$

Han salido tres autovalores porque el endomorfismo es de un espacio de dimensión 3. Uno de los autovalores es simple y el otro es doble.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Se llama orden de multiplicidad de un autovalor al número de veces que verifica la ecuación característica.

Orden de multiplicidad

En nuestro ejemplo, el orden de multiplicidad del 0 es 1 porque es una raíz simple de la ecuación, mientras que el orden de 2 es 2 porque se trata de una raíz doble:

$$\lambda(2 - \lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & OM(0) = 1 \\ \lambda_2 = 2 & OM(2) = 2 \end{cases}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a blue arrow-like shape points to the right behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Subespacio característico

Se llama subespacio característico, $S(\lambda)$, al subespacio formado por todos aquellos vectores asociados a un mismo autovalor. Es decir, si un endomorfismo tuviese, digamos, el autovalor 3, el subespacio $S(3)$ estaría formado por todos los vectores asociados al 3, todos aquellos que al transformarse con el endomorfismo se conviertan en el triple de sí mismos.

Análiticamente un subespacio característico se define: $S(\lambda) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$

A efectos de cálculo la forma de obtener un subespacio propio o característico es:
 $S(\lambda) = \ker(f - \lambda i)$

Eso significa que cada subespacio propio que calculemos lo tendremos que hacer según la ecuación matricial:

$$(F_B - \lambda I) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo se calcula $S(2)$ en el ejemplo anterior:

$$S(2) = \ker(f - 2i) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{cases}$$

$$S(2) = L\{(0, 0, 1)\}$$

Hemos obtenido la base de $S(2)$. Todos los vectores del subespacio se transforman en ellos mismos multiplicados por su autovalor. En este caso, por 2.

Hay que recordar una norma muy importante:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$$

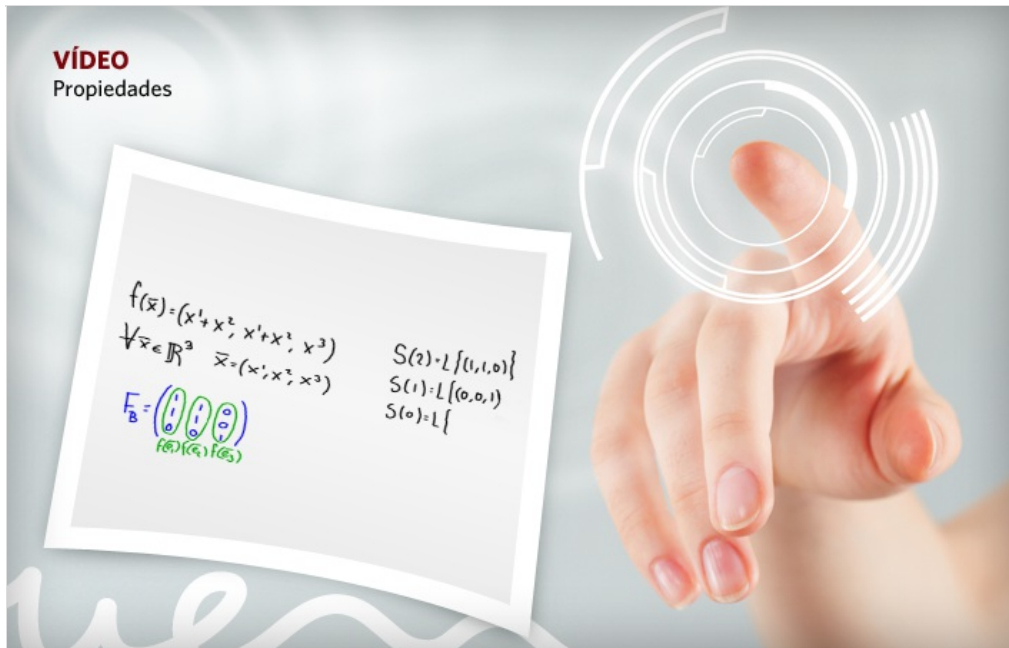
La dimensión de un subespacio característico es siempre mayor o igual a 1 y menor o igual al orden de multiplicidad del autovalor. En el ejemplo, $\dim(S(2))=1$ mientras que $OM(2)=2$, con lo que vemos que se cumple.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map or a stylized landscape.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (2 vectores)

Vamos a demostrar que vectores propios no nulos asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

Procederemos por inducción.

Empezaremos por ver que lo enunciado se cumple para el caso de dos vectores.

Sean: $\vec{x}_1 \in S(\lambda_1); \vec{x}_2 \in S(\lambda_2)$ en el endomorfismo t : $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \neq \vec{x}_2$.

Entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es sistema libre.

$$\text{Si } \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{Aplicando } t: \alpha_1 t(\vec{x}_1) + \alpha_2 t(\vec{x}_2) = \vec{0}$$

$$\text{Luego: } \alpha_1 (\lambda_1 \vec{x}_1) + \alpha_2 (\lambda_2 \vec{x}_2) = \vec{0}$$

$$\text{O bien: } (\alpha_1 \lambda_1) \vec{x}_1 + (\alpha_2 \lambda_2) \vec{x}_2 = \vec{0}$$

Multiplicando por λ_2 en (1): $(\alpha_1 \lambda_2) \vec{x}_1 + (\alpha_2 \lambda_2) \vec{x}_2 = \vec{0}$ y restando las dos últimas relaciones:

$$(\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_1 \lambda_2) \vec{x}_1 = \vec{0}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Como $\vec{x}_1 \neq \vec{0} \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1 = 0$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \alpha_1 = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha_2 = 0$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Vectores propios l.i. asociados a autovalores diferentes (k vectores)

Sigamos con la demostración de que vectores propios no nulos asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.


Acabamos de ver cómo lo enunciado se cumple para el caso de dos vectores. Supongamos ahora que lo enunciado se cumple para el caso de k vectores (hipótesis de inducción) y veremos, a partir de ello, que también se cumple para $k + 1$ vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{0} \neq \vec{x}_1 \in S(\lambda_1) \\ \vec{0} \neq \vec{x}_2 \in S(\lambda_2) \\ \vdots \\ \vec{0} \neq \vec{x}_k \in S(\lambda_k) \\ \vec{0} \neq \vec{x}_{k+1} \in S(\lambda_{k+1}) \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_k \neq \lambda_{k+1} \end{array} \right\} \rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}\} \text{ es libre.}$$

Si $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k + \alpha_{k+1} \vec{x}_{k+1} = \vec{0}$ (2), aplicando t : $\alpha_1 t(\vec{x}_1) + \alpha_2 t(\vec{x}_2) + \dots + \alpha_k t(\vec{x}_k) + \alpha_{k+1} t(\vec{x}_{k+1}) = \vec{0}$

Luego: $\alpha_1 (\lambda_1 \vec{x}_1) + \alpha_2 (\lambda_2 \vec{x}_2) + \dots + \alpha_k (\lambda_k \vec{x}_k) + \alpha_{k+1} (\lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1}) = \vec{0}$

O bien: $(\alpha_1 \lambda_1) \vec{x}_1 + (\alpha_2 \lambda_2) \vec{x}_2 + \dots + (\alpha_k \lambda_k) \vec{x}_k + (\alpha_{k+1} \lambda_{k+1}) \vec{x}_{k+1} = \vec{0}$.

1/2 

Multiplicando λ_{k+1} en (2): $(\alpha_1 \lambda_{k+1}) \vec{x}_1 + (\alpha_2 \lambda_{k+1}) \vec{x}_2 + \dots + (\alpha_k \lambda_{k+1}) \vec{x}_k + (\alpha_{k+1} \lambda_{k+1}) \vec{x}_{k+1} = \vec{0}$

Y restando las dos últimas relaciones: $[\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1})] \vec{x}_1 + [\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1})] \vec{x}_2 + \dots + [\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1})] \vec{x}_k = \vec{0}$

Con lo que aplicando la hipótesis de inducción, resulta:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0 \rightarrow \lambda_k \neq \lambda_{k+1} \rightarrow \alpha_k = 0 \end{array}$$

Y entrando finalmente en (2) con $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \rightarrow \alpha_{k+1} = 0$, con lo que queda probada la independencia buscada.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Un ejemplo un tanto especial

Veamos un ejemplo de aplicación de autovalores. Pero en lugar de trabajar con la matriz, vamos a estudiar el problema de forma distinta, a partir de la propia definición de autovalor.

Establezcamos las condiciones del ejemplo: en un espacio vectorial euclídeo E, de dimensión n, dado un vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ se considera la aplicación $f: E \rightarrow E$, definida por: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$.

Vamos a obtener razonadamente los autovalores de f y los subespacios característicos correspondientes.

Si $\vec{x} \in \{\vec{a}\}^\perp \rightarrow f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{x} - 2 \cdot \frac{0}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{x} \rightarrow \vec{x} \in S(1) \rightarrow \dim(S(1)) = \dim(\{\vec{a}\}^\perp) = 2$

Si $\vec{x} \in L(\vec{a}) \rightarrow \vec{x} = \alpha \vec{a} \rightarrow f(\alpha \vec{a}) = \alpha \vec{a} - 2 \cdot \alpha \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \alpha \vec{a} - 2\alpha \vec{a} = -\alpha \vec{a} = -\vec{x} \rightarrow \vec{x} \in S(-1) \rightarrow$
 $\rightarrow \dim(S(-1)) = \dim(L(\vec{a})) = 1$

Con lo que se concluye que: $\begin{cases} S(1) = \{\vec{a}\}^\perp \\ S(-1) = L(\vec{a}) \end{cases}$, son los dos subespacios característicos de la transformación.

Se observa que $\underbrace{S(1) \oplus S(-1)}_{\text{suma directa}} = \begin{cases} S(1) \cap S(-1) = \{\vec{0}\} \\ S(1) + S(-1) = E^3 \end{cases}$, y también se extrae que $OM(1) = \dim(S(1))$
 y $OM(-1) = \dim(S(-1))$

1/2 ▶

Si E es el espacio de los vectores geométricos, vamos a interpretar geoméricamente la aplicación f: Geométricamente es una simetría respecto a $\{\vec{a}\}^\perp$.

El diagrama ilustra la transformación f como una reflexión. Se muestra un vector \vec{a} y una línea perpendicular a él, etiquetada como $L(\vec{a})$. Un vector \vec{x} se refleja a través de esta línea para obtener el vector $f(\vec{x})$. El vector $\omega(\vec{a})$ también está etiquetado.

▶ 1/2 ▶



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map of the city of Cartagena. Below the text is a horizontal orange bar with a slight gradient.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Resumen

Definición de autovalor

Los vectores propios de una aplicación lineal de un espacio en sí mismo u endomorfismo son los vectores no nulos que cuando son transformados por la aplicación dan lugar a un múltiplo de sí mismos con lo que no cambian de dirección:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathfrak{R}} \underbrace{\vec{x}}_{\in V}$$

- El escalar $\lambda \in \mathfrak{R}$ recibe el nombre de valor propio o autovalor.
- El vector $\vec{x} \in V$ recibe el nombre de vector propio o autovector.

La ecuación característica

Sirve para calcular los autovalores de un endomorfismo: $|F_B - \lambda I| = 0$

- Se llama **orden de multiplicidad** de un autovalor al número de veces que verifica la ecuación característica.

Subespacio característico

Se llama subespacio característico, $S(\lambda)$, al subespacio formado por todos aquellos vectores asociados a un mismo autovalor: $S(\lambda) = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\} = \ker(f - \lambda i)$

- Hay que recordar una norma muy importante: $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70