

ÍNDICE

Introducción

Régimen estacionario unidimensional

2.1 Geometrías sencillas

2.2 Sólidos en serie

2.3 Superficies extendidas

Régimen estacionario multidimensional

3.1 Método gráfico aproximado

3.2 Método numérico

Régimen no estacionario

4.1 Método analítico

4.2 Método numérico



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

1. INTRODUCCIÓN

ión

no complejo de transmisión de calor que transcurre a nivel microscópico y mediante el átomos y moléculas interaccionan a través de choques elásticos e inelásticos que la energía debido a un gradiente de temperatura.

urier:

$$k \cdot \nabla T \longrightarrow q = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [1]$$

k: conductividad térmica

α: difusividad térmica

$$\alpha = k / \rho c_p$$

$$-A \cdot k \cdot \nabla T \xrightarrow{1 \text{ DIM.}} q = -k \frac{dT}{dx} \therefore Q = -A \cdot k \cdot \frac{dT}{dx}$$

	Conducción	Convección	Radiación
lo	Sí	No	No
lo	Sí (↓)	Sí (↑)	Sí (↑)

dos (conducción):



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



1. INTRODUCCIÓN

Problemas de TC en sólidos:

$$-\nabla(-k \cdot \nabla T) + G$$

Condiciones de contorno
Condiciones iniciales

Integración

Perfil de temperatura

Ley de Fourier

Caudal y flujo

Solución problemas de TC en sólidos:

Temperatura – tiempo:

Regimen estacionario: T no varía con t.

Regimen no estacionario: T varía con t.

Temperatura – coordenadas espaciales:

Unidimensional: T varía con una coordenada.

Bidimensional: T varía con dos coordenadas.

Tridimensional: T varía con tres coordenadas.

Balance de energía:

Regimen estacionario (Conducción simple): G=0

Regimen no estacionario G≠0.

✓ Soluciones de la ECE

- Analítica (dos variables y geometría sencilla).
- Métodos numéricos.
- Métodos gráficos aproximados.
- Métodos analógicos (Ley de Ohm y Fourier).
- Analíticos aproximados.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ÍNDICE

Introducción

Régimen estacionario unidimensional

2.1 Geometrías sencillas

2.2 Sólidos en serie

2.3 Superficies extendidas

Régimen estacionario multidimensional

3.1 Método gráfico aproximado

3.2 Método numérico

Régimen no estacionario

4.1 Método analítico

4.2 Método numérico



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

cción:

cción analítica viable
lisis de casos y metodología

Régimen estacionario

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$



$$0 = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [5]$$

ometrías sencillas

- Conducción sin generación
 - Sección de paso constante y variable
 - Conductividad constante y variable
- Conducción con generación

idos en serie

uperficies extendidas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

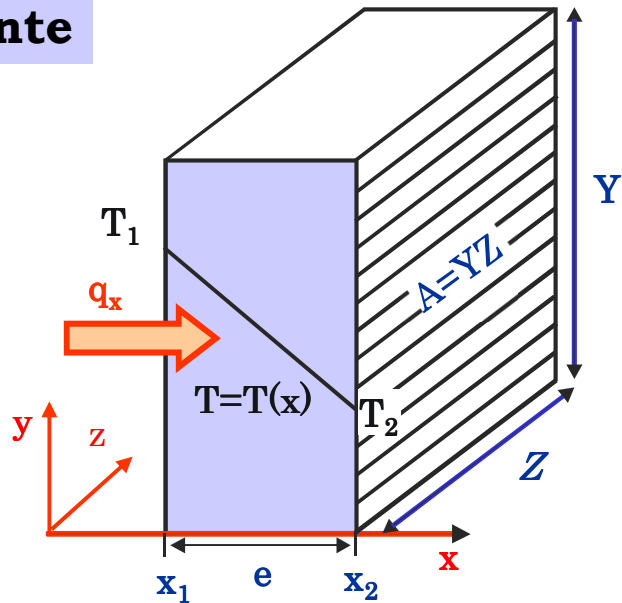
conducción sin generación

ecuación general de conservación de energía:

$$-k \cdot \nabla T + G \quad [5] \quad \xrightarrow{G=0} \quad \nabla(-k \cdot \nabla T) = 0 \quad [6] \quad \xrightarrow{k = \text{cte}} \quad \nabla^2 T = 0 \quad [7]$$

Ecuación de Laplace

conducción de paso constante



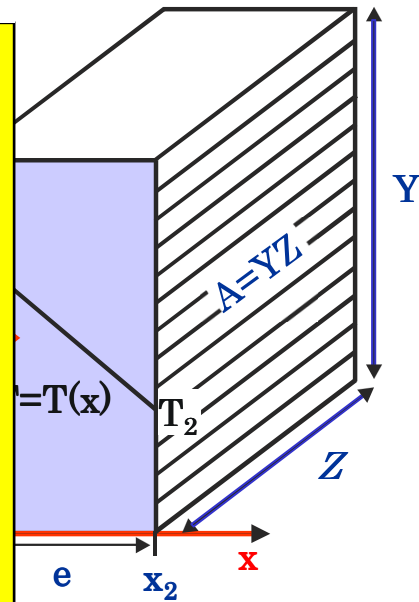
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción sin generación

de paso constante



Caudal de calor

$$q \cdot A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot A}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\text{Fuerza Impulsora}}{\text{Resistencia}} \quad [13]$$

Modelo matemático

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad [8]$$

Condiciones de contorno

$$T(x_1, t) = \quad [9]$$

$$T(x_2, t) = \quad [10]$$

Perfil de Temperaturas

$$T(x) = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) + T_1 \quad [11]$$

Flujo de calor

$$q = -k \cdot \nabla T = -k \cdot \frac{dT}{dx} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k}} \quad [12]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción sin generación

Caso variable: Geometría cilíndrica

Modelo matemático

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad [15]$$

$$T(R_1, t) = \quad [16]$$

$$T(R_2, t) = \quad [17]$$

Perfil de Temperaturas

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \ln \frac{r}{R_1} \quad [18]$$

Flujo de calor

$$q(r) = -k \cdot \nabla T = -k \cdot \frac{dT}{dr} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} \quad [19]$$

Caudal de calor

$$Q = q(r) \cdot A(r) = k \cdot (2 \cdot \pi \cdot L) \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [20]$$

$$L \gg R_2$$

$$A(r) = f(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad [14]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot A_{ml}}} \quad [21]$$

$$\frac{L \cdot R_2 - 2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1}{Ln \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_2}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (R_2 - R_1)}{Ln \frac{R_2}{R_1}}$$

CA
rgía

Tema 2. Conducción

Curso 2014-2015
Nº 9 de 55

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Condición sin generación

Parámetro variable: Geometría esférica

Modelo matemático

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad [22]$$

$$T(R_1, T) = T_1 \quad [23]$$

$$T(R_2, t) = T_2 \quad [24]$$

Perfil de Temperaturas

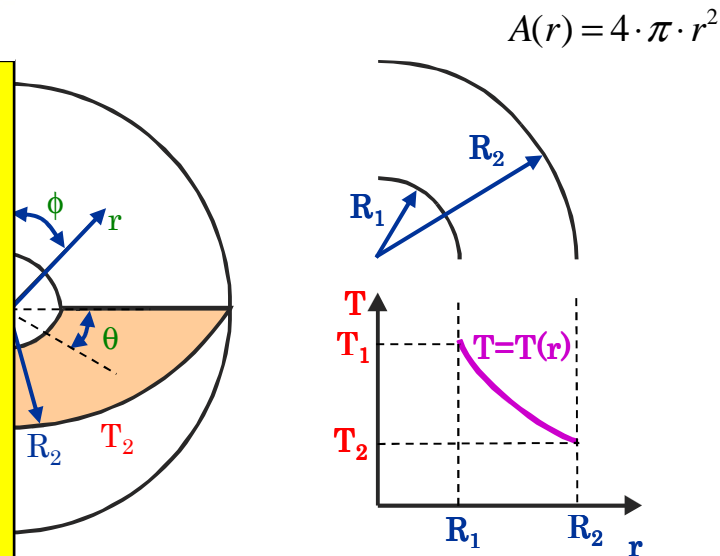
$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \quad [25]$$

Flujo de calor

$$q(r) = -k \cdot \frac{dT}{dr} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad [26]$$

Caudal de calor

$$Q = q(r) \cdot A(r) = k \cdot (4\pi) \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad [27]$$



$$4 \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_2^2) = 4 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$Q = \dots \quad [28]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción sin generación

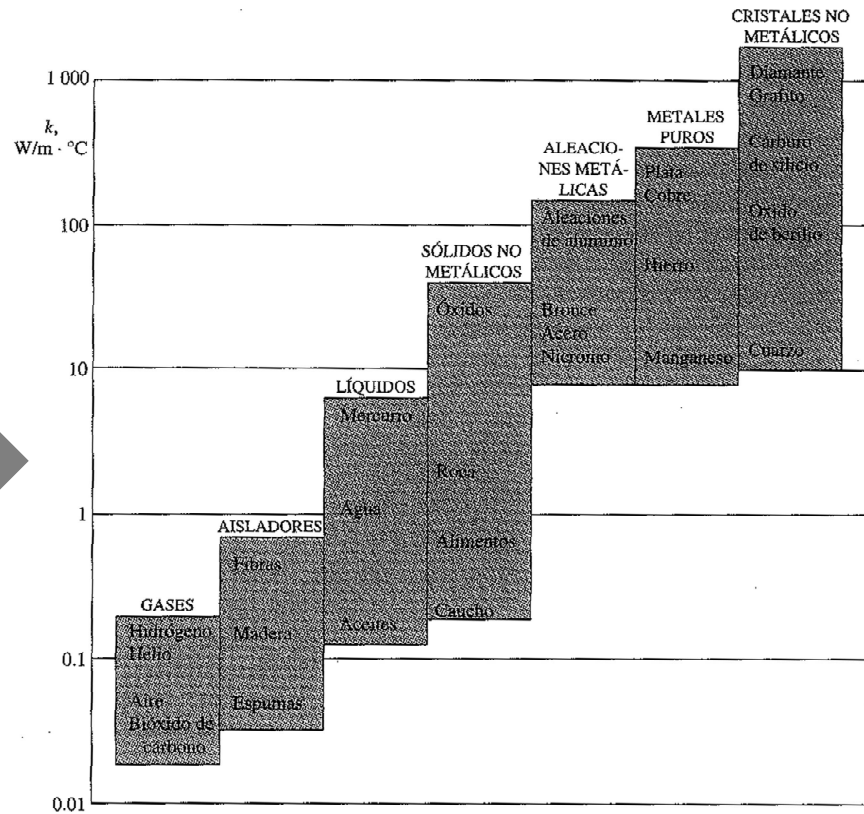
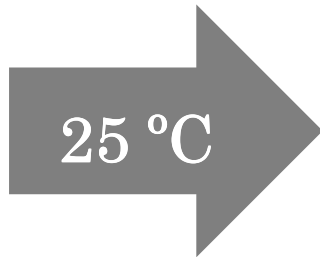
Conductividad variable



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$k, W/m \cdot ^\circ C^*$
2 300
429
401
317
237
80.2
8.54
0.78
0.72
0.613
0.37
0.17
0.152
0.13
0.043
0.026
0.026

* 0.5778 para convertir a



2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción sin generación

Conductividad variable

$$k_{Promedio} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T) dT}{T_2 - T_1}$$

$$k(T) = k_0(1 + \beta T)$$

$$k_0\beta \equiv a$$

$$k_0 \equiv b$$

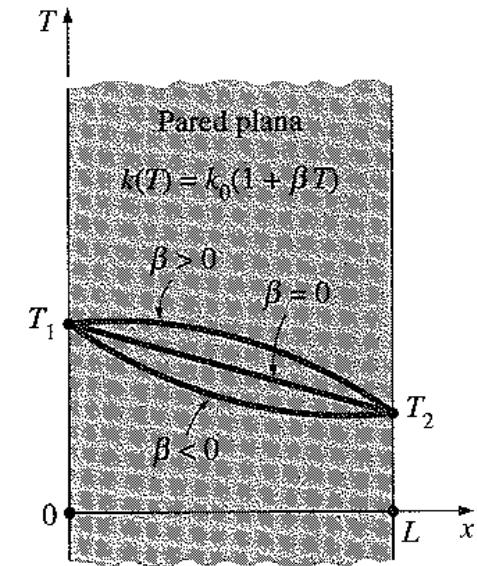
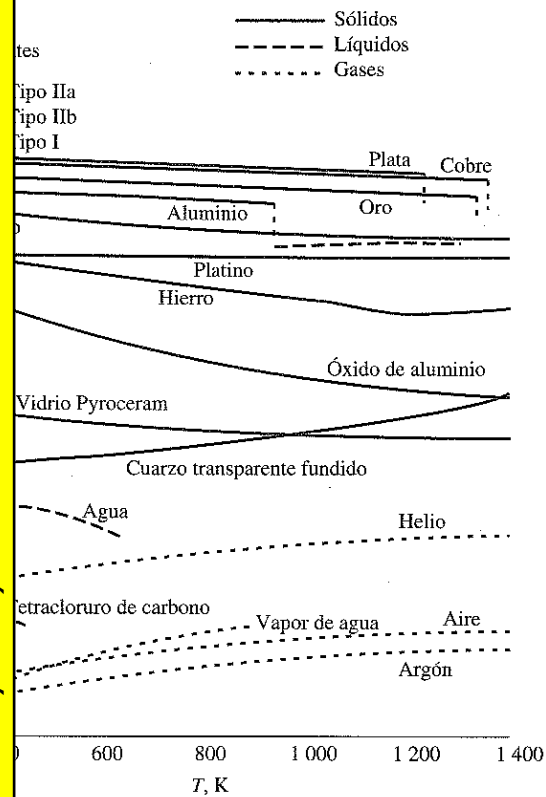


FIGURA 2-63

Variación de la temperatura en una pared plana durante la conducción



Tema 2. Conducción

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción sin generación

Conductividad variable

Conductividad lineal $k(T) = a \cdot T + b$ [29]

Geometría plana $\nabla(k \cdot \nabla T) = 0$ [30]

Integrando

Perfil de temperatura

$$\frac{a}{2} \cdot T^2 + b \cdot T = \frac{\frac{a}{2} \cdot (T_1^2 - T_2^2) + b \cdot (T_1 - T_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot (x - x_1) + \frac{a}{2} \cdot T_1^2 + b \cdot T_1$$
 [31]

Caudal de calor

$$Q = k_{ma} \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_2}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k_{ma} \cdot A}}$$
 [32]

Generalización

Conducción unidimensional y geometría sencilla

$$\frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k_{ma} \cdot A_m}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\text{Fuerza impulsora}}{\text{Resistencia}}$$
 [33]

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$
 [34] Ley de Ohm

Fundamento de analogía:
electricidad y transporte de calor

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

Conducción con generación

$$k \cdot \nabla T + G \quad [4]$$



$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + G = 0 \quad [35]$$

$k_m = \text{cte}$



$$k_m \nabla^2 T + G = 0$$

Modelo matemático

$$k_m \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + G = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{G}{k_m} \quad [37]$$

$$T(x_1, t) = T_1 \quad [38]$$

$$-k \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=x_2} = h_0 \cdot (T_2 - T_0) \quad [39]$$

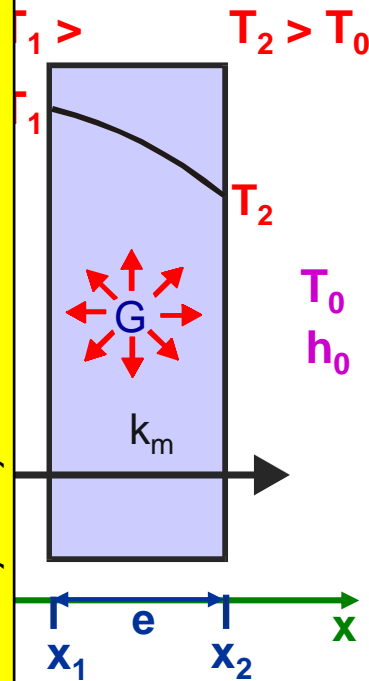
Perfil de Temperaturas

$$T = \frac{G}{k_m} \cdot (x - x_1) \cdot \left[x_2 - \frac{x + x_1}{2} - \frac{h_0}{G} \cdot (T_2 - T_0) \right] + T_1 \quad [40]$$

Flujo de calor

$$q = G \cdot (x - x_2) + h_0 \cdot (T_2 - T_0) \quad [41]$$

Geometría plana rectangular



Enfriamiento newtoniano

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.2 Sólidos en serie

lana
ar

Caudal de calor

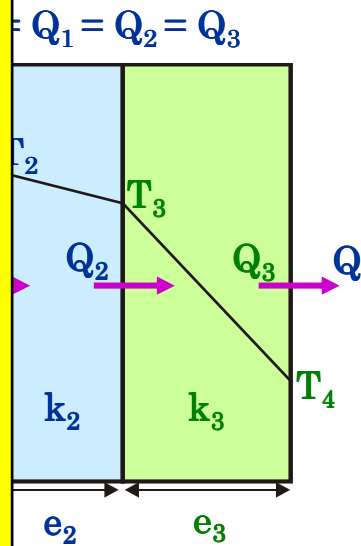
$$Q = \frac{\Delta T_1}{R_1} = \frac{\Delta T_2}{R_2} = \frac{\Delta T_3}{R_3} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{k_{m1} \cdot A_{m1}}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{k_{m2} \cdot A_{m2}}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{k_{m3} \cdot A_{m3}}} \quad [42]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{k_{m1} \cdot A_{m1}} + \frac{e_2}{k_{m2} \cdot A_{m2}} + \frac{e_3}{k_{m3} \cdot A_{m3}}} = \quad [43]$$

$$\frac{\sum \Delta T_i}{\sum R_i} = \frac{\text{Fuerza impulsora total}}{\text{Resistencia total}}$$

Resistencias de contacto/convección

$$R = \frac{1}{h_c \cdot A_m} \quad [43]$$



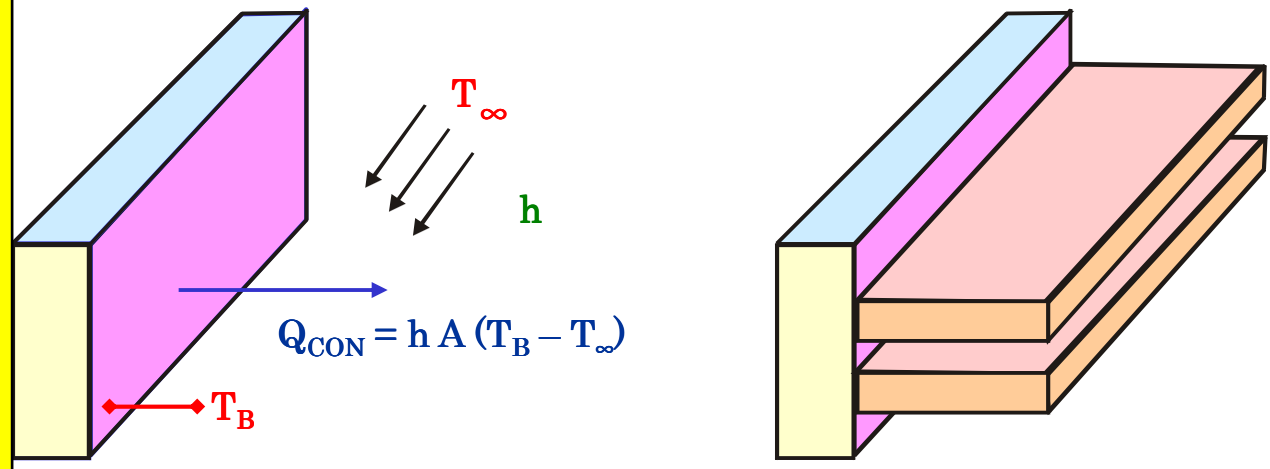
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

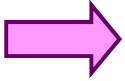
2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Superficies extendidas

que está sometido a transporte de calor por conducción a través del mismo y además a transporte de energía por convección y/o radiación con un fluido que lo rodea.



Aumento de Q:  {

- Aumentar h
- Aumentar ΔT
- Aumentar A : superficies extendidas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

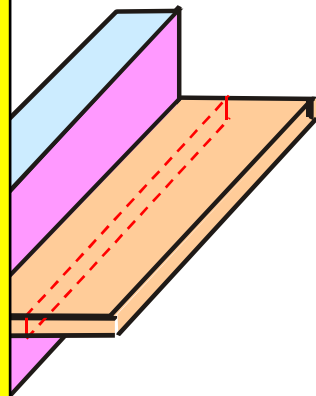
Superficies extendidas

Aplicaciones: radiadores de calefacción, motores, disipadores CPUs...

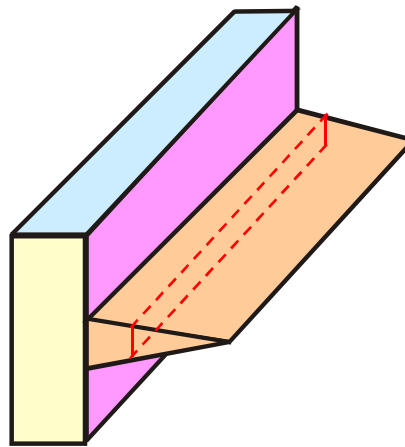
Resistencia: resistencia adicional a TC (a través del sólido – aleta –).

Conductividad térmica del material: parámetro clave.

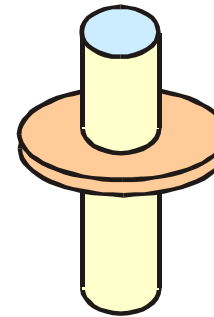
Se pueden encontrar en diferentes **formas**.



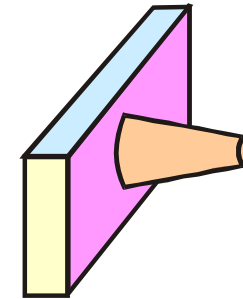
Rectangular
sección constante



Rectangular
sección variable



Anular



Aguja

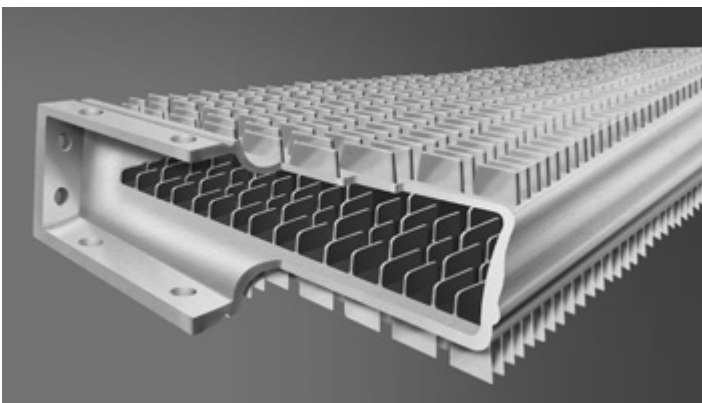
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Superficies extendidas



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
-- --
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas



ión de la aleta

oacio

o
abricación
tes

nación importante

superficie extendida (aleta) **¿mejora o empeora la velocidad de transporte de calor entre el sólido y el fluido?**

so

eterminar la distribución de **temperaturas** en la aleta.

aluar la **eficacia** de la aleta.

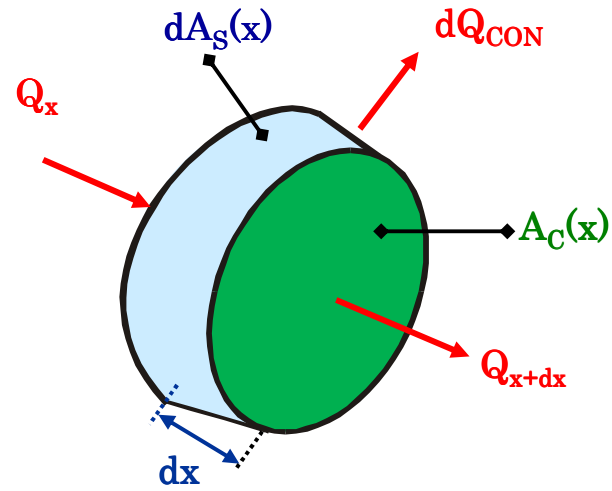
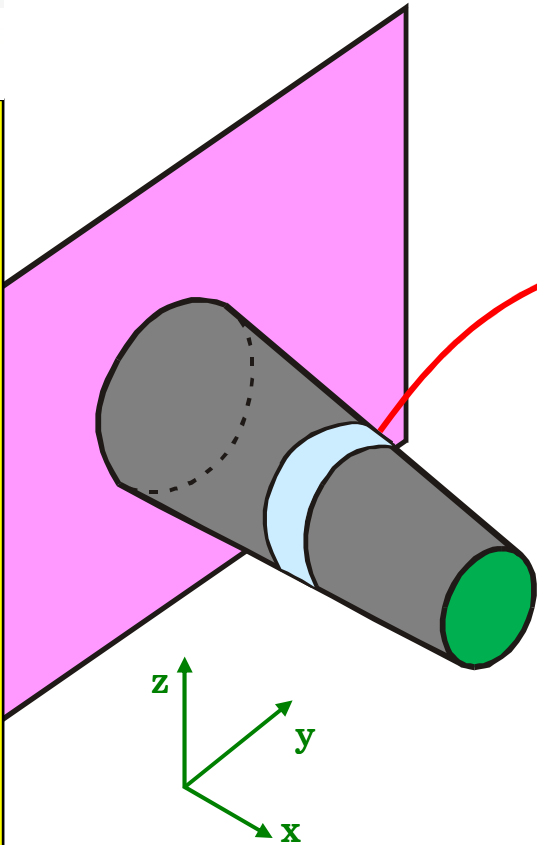
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CA
rgía

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

sección transversal no uniforme



✓ Hipótesis

- Conducción unidimensional (x)
- Estado estacionario
- Conductividad térmica constante
- Radiación desde la superficie despreciable
- Sin generación de energía

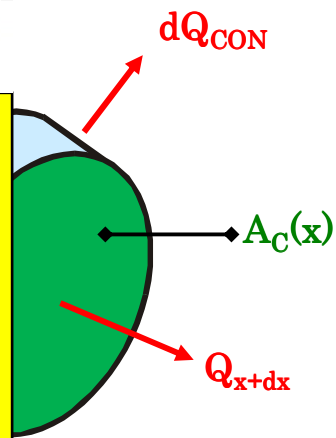
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
...
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

sección transversal no uniforme



✓ Ecuación de conservación de energía (ECE):

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_{con} \quad [46]$$

✓ Ley de Fourier:

$$Q_x = -k \cdot A_c \cdot \frac{dT}{dx} \quad [47]$$

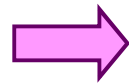
$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} \cdot dx = -k \cdot A_c \cdot \frac{dT}{dx} - k \cdot \frac{d}{dx} \left(A_c \cdot \frac{dT}{dx} \right) \cdot dx \quad [48]$$

✓ Convección con el fluido:

$$dQ_{con} = h \cdot dA_s \cdot (T - T_\infty) \quad [49]$$

[46]

$$\frac{h}{k} \cdot \frac{dA_s}{dx} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [50]$$



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_c}{dx} \right) \cdot \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_s}{dx} \right) \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [51]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

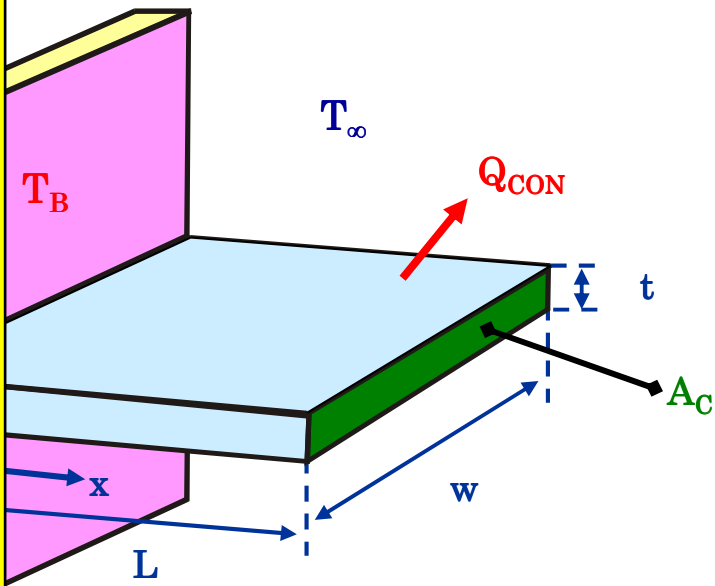
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

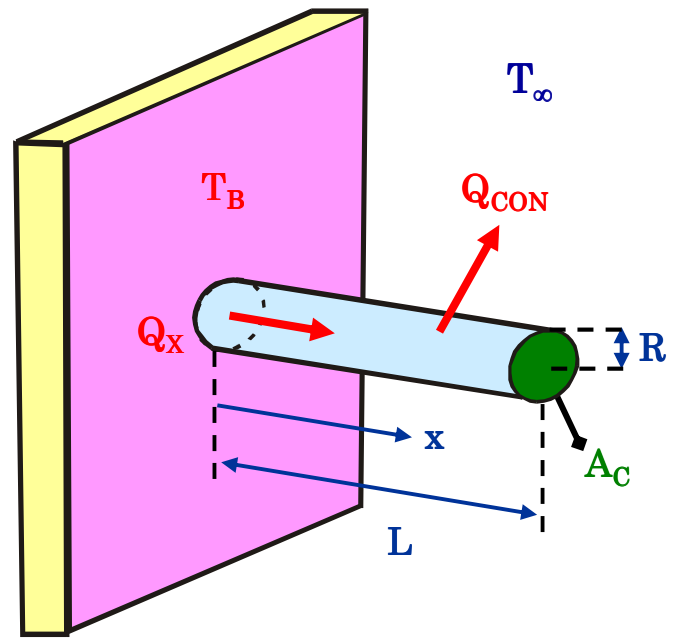
sección transversal uniforme ($A_C = \text{cte}$)

$$A_S = P \cdot x \quad [52]$$



$$P = 2w + 2t$$

$$A_C = w \cdot t$$



$$P = 2\pi R$$

$$A_C = \pi R^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

sección transversal uniforme ($A_C = \text{cte}$)

general:

$$\left(\frac{dA_C}{dx} \right) \cdot \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_C} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_S}{dx} \right) \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [51]$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{k \cdot A_C} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [53]$$

condiciones:

$$A_C = \text{cte} \rightarrow dA_C/dx = 0$$

$$P = \text{cte} \rightarrow dA_S/dx = P$$

condiciones límite:

temperatura conocida en la aleta

$$x = 0 \quad T = T_B \quad [54]$$

temperatura libre de la aleta. Opciones:

Balance de energía en el extremo (convección):

$$x = L \quad - \left(k \cdot A_C \cdot \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h \cdot A_C \cdot (T_L - T_\infty) \quad [55]$$

Extremo adiabático:

$$x = L \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad [56]$$

Temperatura conocida:

$$x = L \quad T = T_L \quad [57]$$

Superficie extendida de gran longitud:

$$x = L \quad (L \rightarrow \infty) \quad T_L = T_\infty \quad [58]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

sección transversal uniforme

Perfil de temperatura y caudal de calor intercambiado en la aleta

temperaturas: solución ecuación [53]

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{k \cdot A_C} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [53]$$

de calor: $Q_A = \int_{A_A} h \cdot (T - T_\infty) \cdot dA_S \quad [59]$

Distribución Temperatura θ/θ_B	Caudal calor Q_A
$\frac{\cosh m \cdot (L - x) + (h/mk) \cdot \sinh m \cdot (L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \cdot \sinh mL}$	$M \cdot \frac{\sinh mL + (h/mk) \cdot \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$
$\frac{\cosh m (L - x)}{\cosh mL}$	$M \cdot \tanh mL$
$\frac{(\theta_L / \theta_B) \cdot \sinh mx + \sinh m(L - x)}{\sinh mL}$	$M \cdot \frac{\cosh mL - \theta_L / \theta_B}{\sinh mL}$
e^{-mx}	M
$m; \theta_B = \theta(0) = T_B - T_\infty : m^2 = h \cdot P / k \cdot A_C; M = \sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A_C} \cdot \theta_B$	

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

$$Q_A = \int_{A_A} h \cdot (T - T_\infty) \cdot dA_s \quad [59]$$

Definición o efectividad de una aleta:

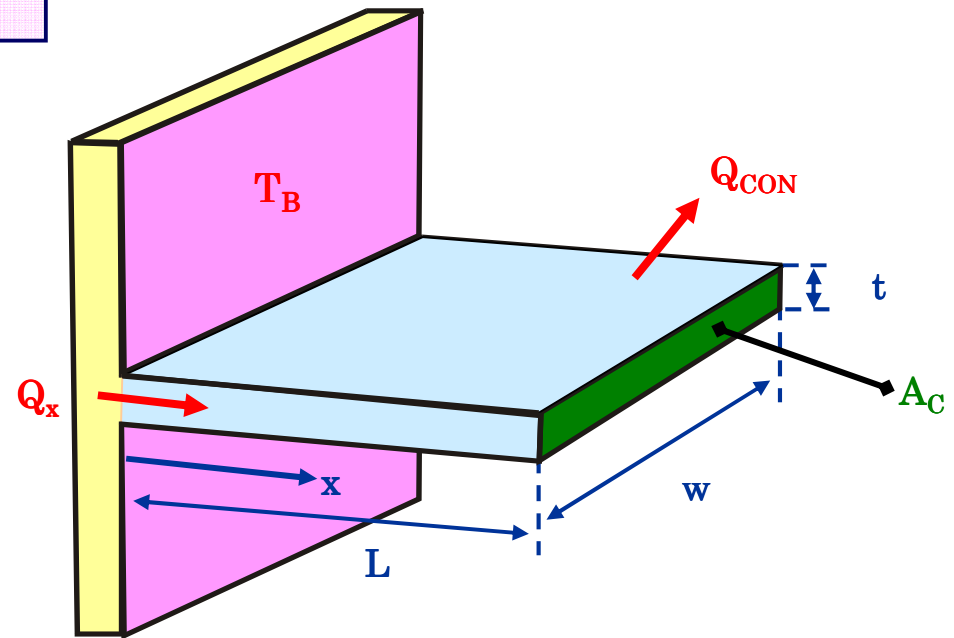
entre el caudal de calor transmitido a través de la aleta al fluido, Q_A , y el que se hubiera transmitido sin aleta:

$$\frac{Q_A}{Q_{MAX}} \cdot (T_B - T_\infty) \quad [60]$$

Definición de una aleta:

entre el caudal de calor transmitido a través de la aleta al fluido, Q_A , y el máximo posible, Q_{MAX} (si la aleta no tuviera resistencia al TC y toda su superficie estuviera a T_B):

$$\frac{Q_A}{h \cdot A_A \cdot (T_B - T_\infty)} \quad [61]$$



$$P = 2w + 2t$$

$$A_C = w \cdot t$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

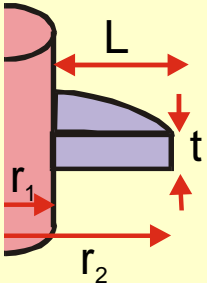
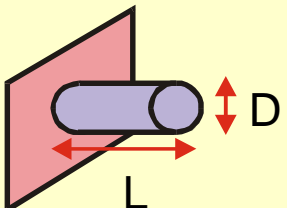
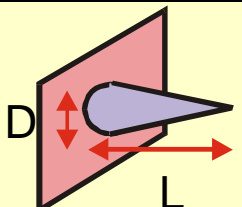
2.3 Superficies extendidas

Aletas rectas		
Rectangular $A = 2 \cdot w \cdot L_C$ $L_C = L + (t/2)$		$\eta_A = \frac{\tanh m \cdot L_C}{m \cdot L_C}$
Trapezoidal $A = [L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{1}{m \cdot L} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
Parabolic $A = [L^2/t \cdot \ln(t/L + C_1)] + (t/L)^2]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{2}{[4 \cdot (m \cdot L)^2 + 1]^{1/2} + 1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aleta circular		
<p>Angular</p> $\pi \cdot (r_{2c}^2 - r_1^2) + (t/2)$		$\eta_A = C_2 \frac{K_1(mr_1) \cdot I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1) \cdot K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1) \cdot K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1) \cdot I_1(mr_{2c})}$ $C_2 = \frac{(2 \cdot r_1 / m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$
Aleta tipo pin		
<p>Angular</p> $\pi \cdot D \cdot L_C$ $L + D/4$		$\eta_A = \frac{\tanh m \cdot L_C}{m \cdot L_C}$
<p>Angular</p> $\left[L^2 + (D/2)^2 \right]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{2}{\left[4/9 \cdot (m \cdot L)^2 + 1 \right]^{1/2} + 1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

área global de la superficie:

$$Q_{T,MAX} = \frac{Q_T}{h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty)} \quad [62]$$

$$A_T = N \cdot A_A + A_E \quad [63]$$

- N : número de aletas
- A_A : área de cada aleta
- A_E : área de la base expuesta al fluido

Caudal de calor total
 Área Total
 $Q_{T,MAX}$: Caudal de calor máximo

de calor que se obtendría si toda la superficie de las aletas estuviera a la temperatura T_B . Es suma del transmitido a través de la base expuesta al fluido y de la aleta.

$$Q_{T,MAX} + h \cdot A_E \cdot (T_B - T_\infty) = h \cdot A_A \cdot (T_B - T_\infty) + h \cdot A_E \cdot (T_B - T_\infty) \quad [64]$$

$$Q_T = h \cdot [N \cdot A_A + (A_T - N \cdot A_A)] \cdot (T_B - T_\infty) \quad [65]$$

$$Q_T = h \cdot \left[\frac{N \cdot A_A}{A_T} \cdot (1 - \eta_A) \right] \cdot (T_B - T_\infty) \quad [66]$$

$$\eta_0 = \frac{Q_T}{h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty)} = \left[1 - \frac{N \cdot A_A}{A_T} \cdot (1 - \eta_A) \right] \quad [67]$$

$$Q_T = \eta_0 \cdot Q_{T,MAX} = \eta_0 \cdot h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty) \quad [68]$$

Sustituyendo en [62]

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



ÍNDICE

Introducción

Régimen estacionario unidimensional

2.1 Geometrías sencillas

2.2 Sólidos en serie

2.3 Superficies extendidas

Régimen estacionario multidimensional

3.1 Método gráfico aproximado

3.2 Método numérico

Régimen no estacionario

4.1 Método analítico

4.2 Método numérico



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL



Introducción:

- **Régimen estacionario unidimensional:**
 - Sistemas muy sencillos pero de aplicación real
- **Régimen estacionario multidimensional:**
 - Límites del sistema irregulares
 - Temperatura límites no uniformes
 - **Solución analítica:** 2 dimensiones y geometría sencilla

Métodos:

- Analítico
- Gráfico aproximado.
- **Numérico: incrementos finitos**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

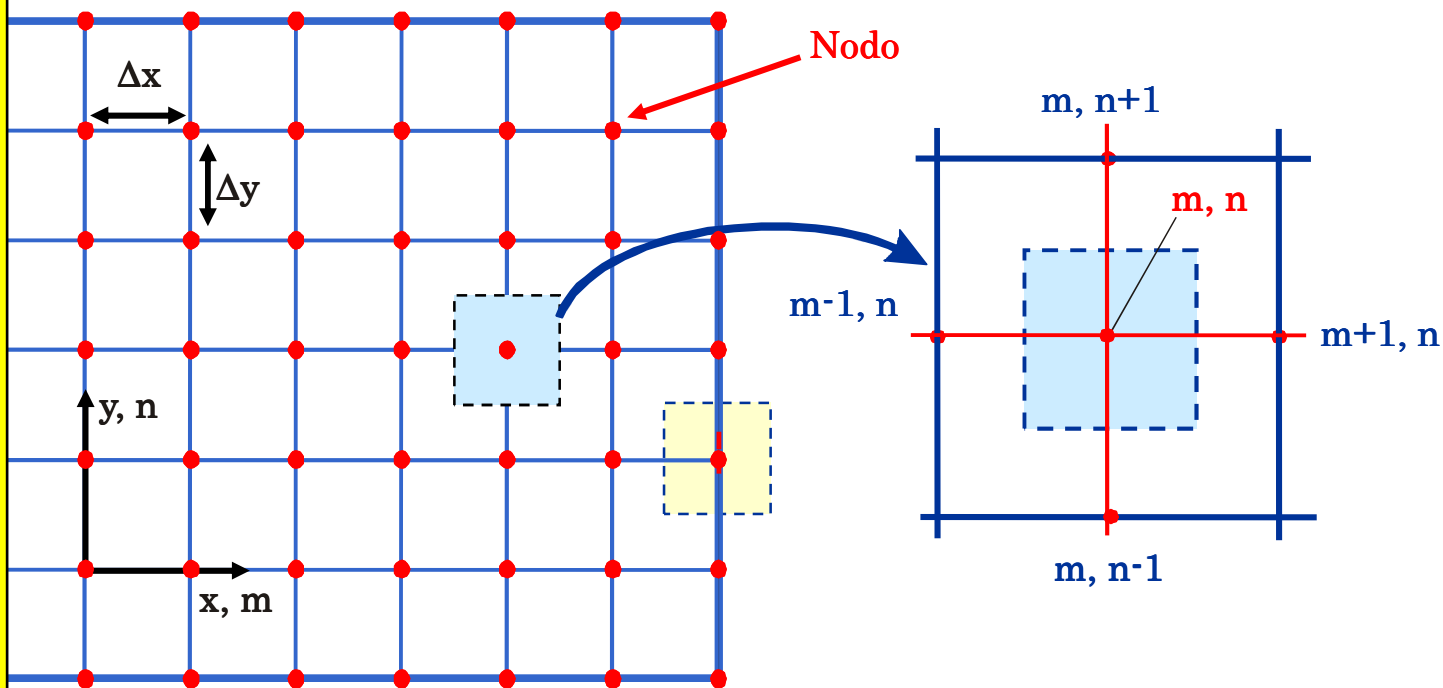


odal

cción de la red nodal:

lido en una serie de celdillas de dimensiones iguales y a ser posible con superficies paralelas a los límites del cuerpo a analizar.

Conducción bidimensional (rectangular)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

CA
rgía

Tema 2. Conducción

Curso 2014-2015
Nº 31 de 55

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Condiciones nodales

Diagrama de distribución de temperaturas:

Resolviendo la ecuación de conservación de energía en cada uno de los nodos.

Diferencias finitas

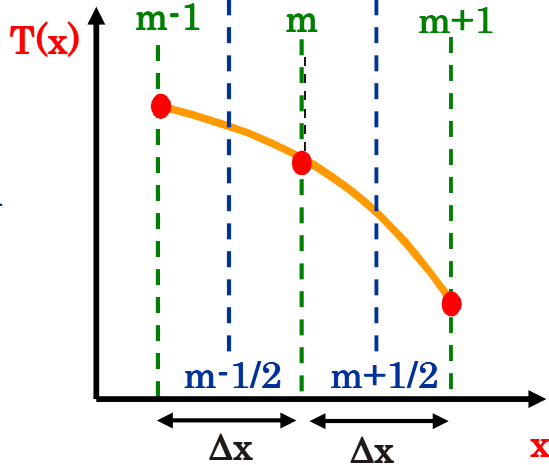
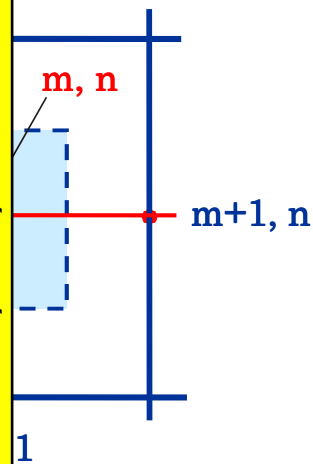
Regimen estacionario.
Conducción bidimensional

E.G.C.E



$$\nabla^2 T = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [76]$$

NODO INTERIOR



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+1/2,n} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \quad [77]$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-1/2,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad [78]$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+1/2,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [79]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

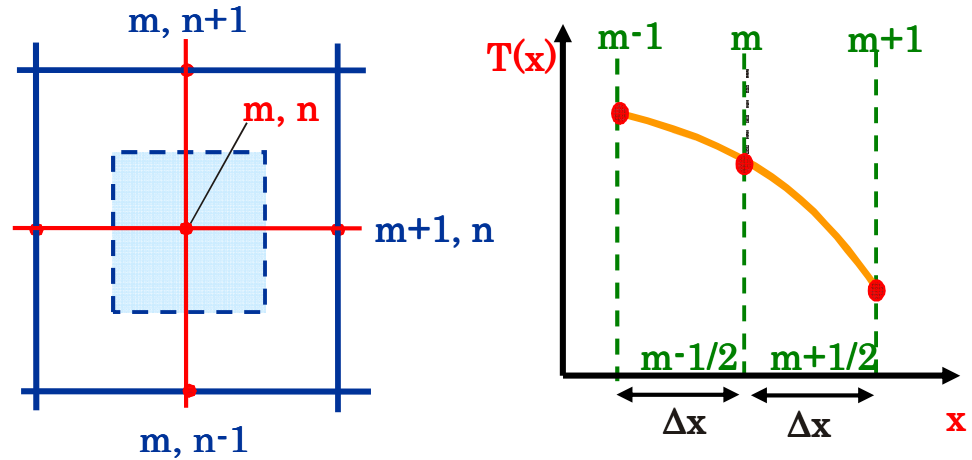


3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

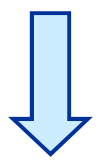
3.2 Método numérico: diferencias finitas



Condiciones nodales
Diferencias finitas



[78], [79] en [77]



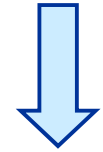
$$\frac{T_{m-1,n} + T_{m+1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad [80]$$

$$\frac{T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad [81]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [76]$$

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad [82]$$

$\Delta x = \Delta y$



$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} = 0 \quad [83]$$

Ecuación algebraica

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Condiciones nodales

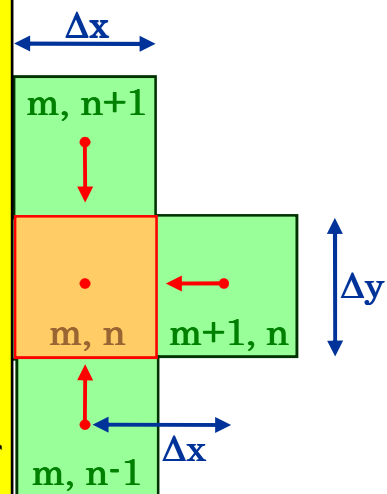
Balanza de energía

$$\text{Energía (neta) que entra} + \text{Energía generada} = 0 \quad [84]$$

Régimen estacionario con generación
 Flujo de calor hacia el nodo

$$\sum_{i=1}^4 Q_{i \rightarrow m,n} + G \cdot (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) = 0 \quad [85]$$

Régimen estacionario con generación



$$Q_{m-1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [86]$$

$$Q_{m+1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [87]$$

$$Q_{m,n-1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [88]$$

$$Q_{m,n+1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [89]$$

$\Delta x = \Delta y$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} + G \cdot \frac{\Delta x^2}{k} = 0 \quad [90] \quad G=0 \rightarrow [83]$$

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

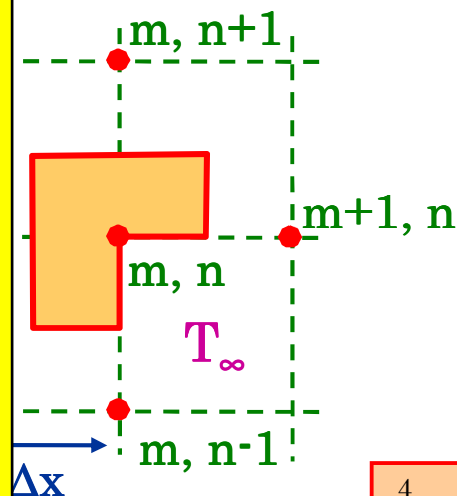


3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

iones nodales
Balance de energía

ca interna con convección
(sin generación)



$$Q_{m-1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [91]$$

$$Q_{m+1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y / 2 \cdot 1) \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [92]$$

$$Q_{m,n-1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x / 2 \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [93]$$

$$Q_{m,n+1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [94]$$

$$Q_{\infty \rightarrow m,n} = h \cdot (\Delta x / 2) \cdot (T_{\infty} - T_{m,n}) + h \cdot (\Delta y / 2) \cdot (T_{\infty} - T_{m,n}) \quad [95]$$

$$\sum_{i=1}^4 Q_{i \rightarrow m,n} + G \cdot \frac{3}{4} (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) = 0 \quad [85]$$

$G = 0$
 $\Delta x = \Delta y$

$$T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + 0,5 \cdot T_{m+1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(3 + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \right) \cdot T_{m,n} = 0 \quad [96]$$

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70



3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Condiciones nodales

Configuración	Ecuación en diferencias finitas ($\Delta x = \Delta y$; $G=0$)
	<p>Nodo en esquina interna con convección</p> $T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + 0,5 \cdot T_{m+1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(3 + \frac{h \cdot \Delta x}{k}\right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana con convección</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(2 + \frac{h \cdot \Delta x}{k}\right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en esquina externa con convección</p> $0,5 \cdot T_{m-1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(1 + \frac{h \cdot \Delta x}{k}\right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana con flujo constante</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{q' \cdot \Delta x}{k} - 2 \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana adiabática ($Q'=0$)</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - 2 \cdot T_{m,n} = 0$

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

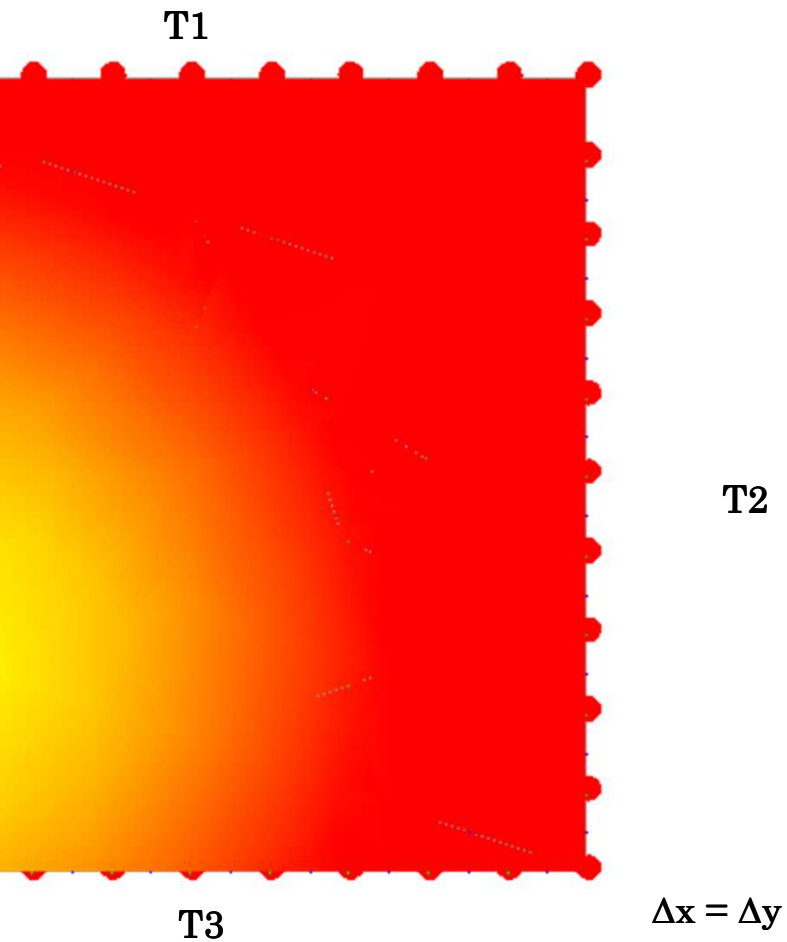
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

construcción de redes nodales

$$T1 \approx T2 \gg T3 \approx T4$$



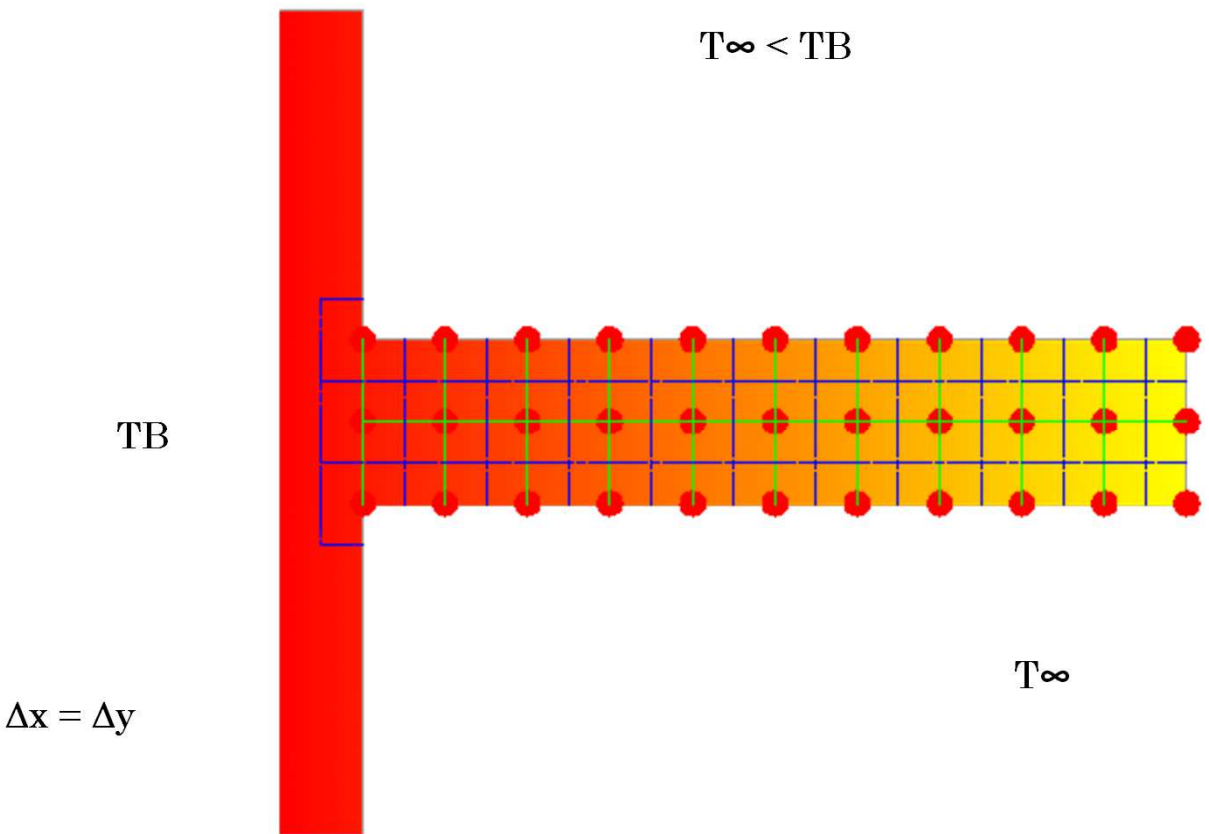
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

construcción de redes nodales



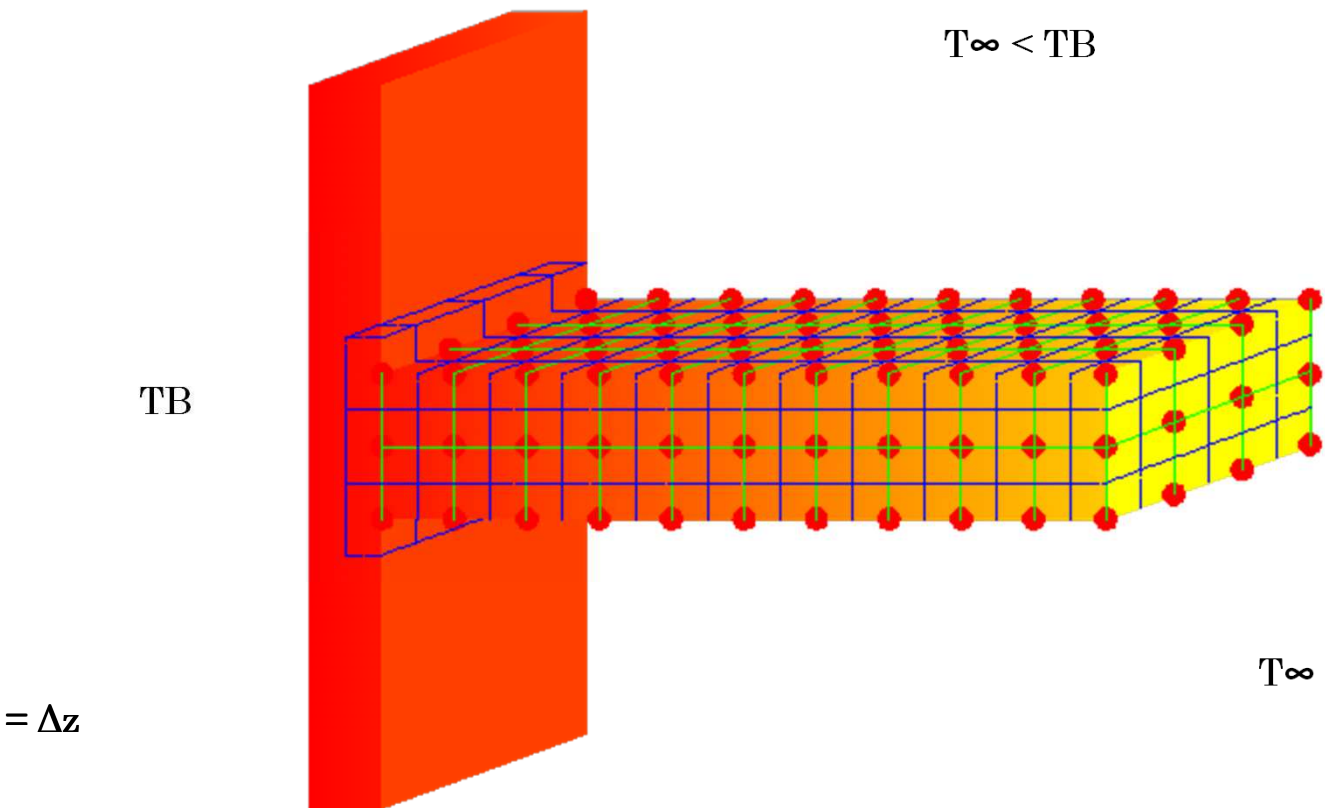
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

construcción de redes nodales



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Derivación de las ecuaciones

Ecuación diferencial



Sistema de N ecuaciones algebraicas

N = número de nodos

Método de solución del sistema de ecuaciones:

(N no muy elevado)

Métodos directos o iterativos (N elevado)

Método de inversión de matrices

Sistema de N ecuaciones con N incógnitas

$$a_{12} \cdot T_2 + a_{13} \cdot T_3 + \dots + a_{1N} \cdot T_N = C_1$$

$$a_{22} \cdot T_2 + a_{23} \cdot T_3 + \dots + a_{2N} \cdot T_N = C_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{N2} \cdot T_2 + a_{N3} \cdot T_3 + \dots + a_{NN} \cdot T_N = C_{N2}$$

[97]



$$[A][T] = [C] \quad [98]$$



Solución

[100]



$$[T] = [A]^{-1} [C] \quad [99]$$

$$C_1 + b_{12} \cdot C_2 + b_{13} \cdot C_3 + \dots + b_{1N} \cdot C_N$$

$$C_1 + b_{22} \cdot C_2 + b_{23} \cdot C_3 + \dots + b_{2N} \cdot C_N$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$C_1 + b_{N2} \cdot C_2 + b_{N3} \cdot C_3 + \dots + b_{NN} \cdot C_N$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Condición de iteración de Gauss-Seidel

Condición para iterar ecuaciones nodales

$$\left| a_{12} \right|, \left| a_{13} \right|, \dots, \left| a_{1N} \right| \quad \left| a_{22} \right| > \left| a_{21} \right|, \left| a_{23} \right|, \dots, \left| a_{2N} \right| \quad \left| a_{NN} \right| > \left| a_{N1} \right|, \left| a_{N3} \right|, \dots, \left| a_{NN} \right| \quad [101]$$

Condición para iterar la temperatura de cada elemento diagonal

$$T_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(C_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij} T_j \right) \quad [102]$$

Condición para iterar una distribución inicial de temperaturas (k=0)

$$T_1^{k=0}, T_2^{k=0}, T_3^{k=0}, \dots, T_N^{k=0}$$

Condición para iterar una nueva distribución de temperaturas (k=k+1)

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(C_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} T_j^k - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} T_j^{k-1} \right) \quad [103]$$

Condición para comprobar la convergencia

$$\left| T_i^{k-1} - T_i^k \right| \leq \epsilon \quad [104]$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot T_1 + a_{12} \cdot T_2 + a_{13} \cdot T_3 + \dots + a_{1N} \cdot T_N &= C_1 \\ a_{21} \cdot T_1 + a_{22} \cdot T_2 + a_{23} \cdot T_3 + \dots + a_{2N} \cdot T_N &= C_2 \\ \vdots & \\ a_{N1} \cdot T_1 + a_{N2} \cdot T_2 + a_{N3} \cdot T_3 + \dots + a_{NN} \cdot T_N &= C_{N2} \end{aligned} \quad [97]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Formulación de las ecuaciones

Método de iteración de Gauss-Seidel

1. Red nodal

2. Ecuaciones nodales:

- Nodos internos: 1, 2, 3, 4

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} = 0$$

$$500 + 100 + T_3 + T_2 - 4 \cdot T_1 = 0$$

$$500 + T_1 + T_4 + 100 - 4 \cdot T_2 = 0$$

$$T_1 + 100 + 100 + T_4 - 4 \cdot T_3 = 0$$

$$T_2 + T_3 + 100 + 100 - 4 \cdot T_4 = 0$$

3. Reorganización

$$4 \cdot T_1 - T_2 - T_3 + 0 = 600$$

$$-T_1 + 4 \cdot T_2 + 0 - T_4 = 600$$

$$-T_1 + 0 + 4 \cdot T_3 - T_4 = 200$$

$$0 - T_2 - T_3 + 4 \cdot T_4 = 200$$

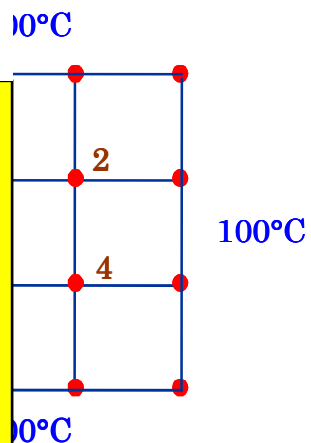
4. Despejar temperaturas

$$T_1 = \frac{600 + T_2 + T_3}{4}$$

$$T_2 = \frac{600 + T_1 + T_4}{4}$$

$$T_3 = \frac{200 + T_1 + T_4}{4}$$

$$T_4 = \frac{200 + T_2 + T_3}{4}$$



5. Resolución

	T_1	T_2	T_3	T_4
500,0	300,0	200,0	200,0	200,0
375,0	268,8	168,8	159,4	159,4
359,4	254,7	154,7	152,3	152,3
352,3	251,2	151,2	150,6	150,6
350,6	250,3	150,3	150,1	150,1
350,1	250,1	150,1	150,1	150,1
350,0	250,0	150,0	150,0	150,0

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagenap99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.



ÍNDICE

Introducción

Régimen estacionario unidimensional

2.1 Geometrías sencillas

2.2 Sólidos en serie

2.3 Superficies extendidas

Régimen estacionario multidimensional

3.1 Método gráfico aproximado

3.2 Método numérico

Régimen no estacionario

4.1 Método analítico

4.2 Método numérico



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
--
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

Transferencia de calor en régimen no estacionario:

Generalmente: cambio en las condiciones límite del sistema
ecuación de conservación:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$

Solución analítica: 2 variables y geometría sencilla (Reg. no estacionario: unidimensional)

Métodos de la ecuación:

Método analítico.

- Resistencia interna despreciable.
- Resistencia interna no despreciable.

Método semiinfinito.

Método numérico.

- Método explícito.
- Método implícito.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

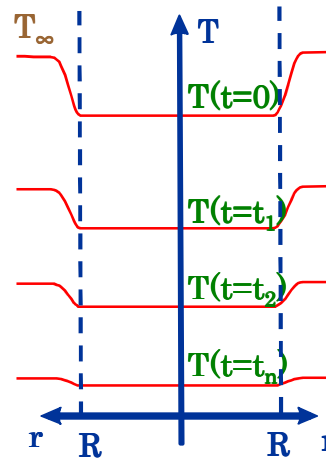
4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

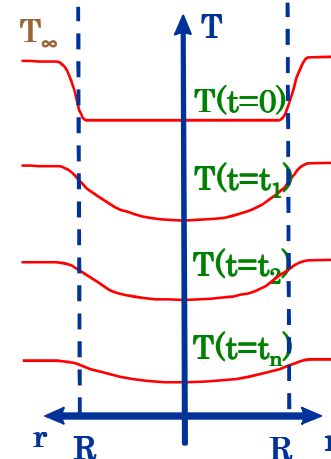
...n unidimensional.
...alentamiento de un sólido por inmersión en un fluido caliente.

Número de Biot

$$Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{h \cdot L_c}{k} \quad [105]$$



$Bi < 0,1$
 $T = T(t)$

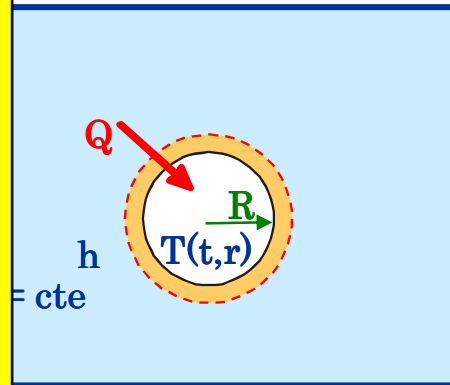


$Bi > 0,1$
 $T = T(t,r)$

...encias en serie:

...ma: fluido (convección)

...ma: sólido (conducción)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

capacidad interna despreciable ($Bi < 0,1$)

✓ Balance de energía

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = h \cdot A \cdot (T_\infty - T) \quad [106] \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{(T_\infty - T)} = \frac{h \cdot A}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot dt \quad [107]$$

✓ Integrando:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{(T_\infty - T)} = \frac{h \cdot A}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \exp\left(-\frac{h \cdot A \cdot t}{\rho \cdot c_p \cdot V}\right) \quad [108]$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \exp\left(-\frac{h}{\rho \cdot c_p \cdot L_C} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{L_C}{L_C} \cdot t\right) = \exp\left(-\frac{h \cdot L_C}{k} \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L_C^2}\right) = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad [109]$$

• Número de Fourier: $Fo = \alpha t / L_C^2$

• Difusividad térmica: $\alpha = k / \rho c_p$

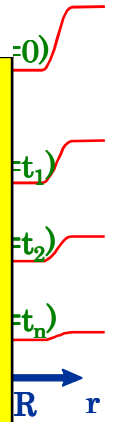
• Longitud característica (esfera): $L_C = \frac{V}{A} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot R^3}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{R}{3} \quad [110]$

✓ Flujo de calor:

Instantáneo (t): $Q(t) = h \cdot A \cdot (T_\infty - T(t)) = h \cdot A \cdot \theta(t) = h \cdot A \cdot \theta_0 \exp(-Bi \cdot Fo(t)) \quad [111]$

Total (0 \rightarrow t): $Q = \int_0^t Q(t) \cdot dt = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot \theta_0 \cdot [1 - \exp(-Bi \cdot Fo(t))] \quad [112]$

Cartagena99



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

capacidad interna no despreciable (Bi > 0, 1)

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4] \quad \begin{matrix} k = \text{cte} \\ G = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad [113]$$

✓ Modelo matemático: sólido esférico sumergido en baño

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad [114]$$

$$t = 0 : R \geq r \geq 0 : T = T_0 \quad [115]$$

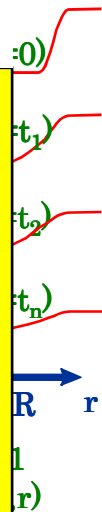
$$t > 0 : r = 0 : \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad [116]$$

$$t > 0 : r = R : -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h \cdot (T_\infty - T_{r=R}) \quad [117]$$

✓ Solución del perfil:

- Forma de series
- Temperatura (θ) y posición adimensional (ξ)
- Números adimensionales (Bi y Fo)

Flujo de calor



Cartagena99

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

encia interna no despreciable ($Bi > 0,1$)

Geometría	Solución analítica rigurosa	Solución aproximada ($Fo > 0,2$)
Pared plana (x) espesor = $2x_1$ $\xi = x/x_1$ $Bi = \frac{hx_1}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{x_1^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) \cos(\lambda_N \xi) \quad (1)$ $C_N = \frac{4 \operatorname{sen}(\lambda_N)}{2\lambda_N + \operatorname{sen}(2\lambda_N)}$ $\lambda_N \operatorname{tg}(\lambda_N) = Bi$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) \cos(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 \cos(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{\operatorname{sen}(\lambda_1)}{\lambda_1} \theta_0 \quad (3)$
Cilindro (r) radio cilindro = R_0 $\xi = r/R_0$ $Bi = \frac{hR_0}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{R_0^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) J_0(\lambda_N \xi)$ $C_N = \frac{2}{\lambda_N} \frac{J_1(\lambda_N)}{J_0^2(\lambda_N) + J_1^2(\lambda_N)} \quad (4)$ $\lambda_N \frac{J_1(\lambda_N)}{J_0(\lambda_N)} = Bi \quad (4)$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) J_0(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 J_0(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{2\theta_0}{\lambda_1} J_1(\lambda_1) \quad (3,4)$
Esfera (r) radio esfera = R_0 $\xi = r/R_0$ $Bi = \frac{hR_0}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{R_0^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) \frac{1}{\lambda_N \xi} \operatorname{sen}(\lambda_N \xi)$ $C_N = \frac{4(\operatorname{sen}(\lambda_N) - \lambda_N \cos(\lambda_N))}{2\lambda_N + \operatorname{sen}(2\lambda_N)}$ $1 - \lambda_N \cot(\lambda_N) = Bi$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) \frac{1}{\lambda_1 \xi} \operatorname{sen}(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 \frac{1}{\lambda_1 \xi} \operatorname{sen}(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{3\theta_0}{\lambda_1^3} [\operatorname{sen}(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)] \quad (3)$

$$h \cdot (T_{\infty} - T_0)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

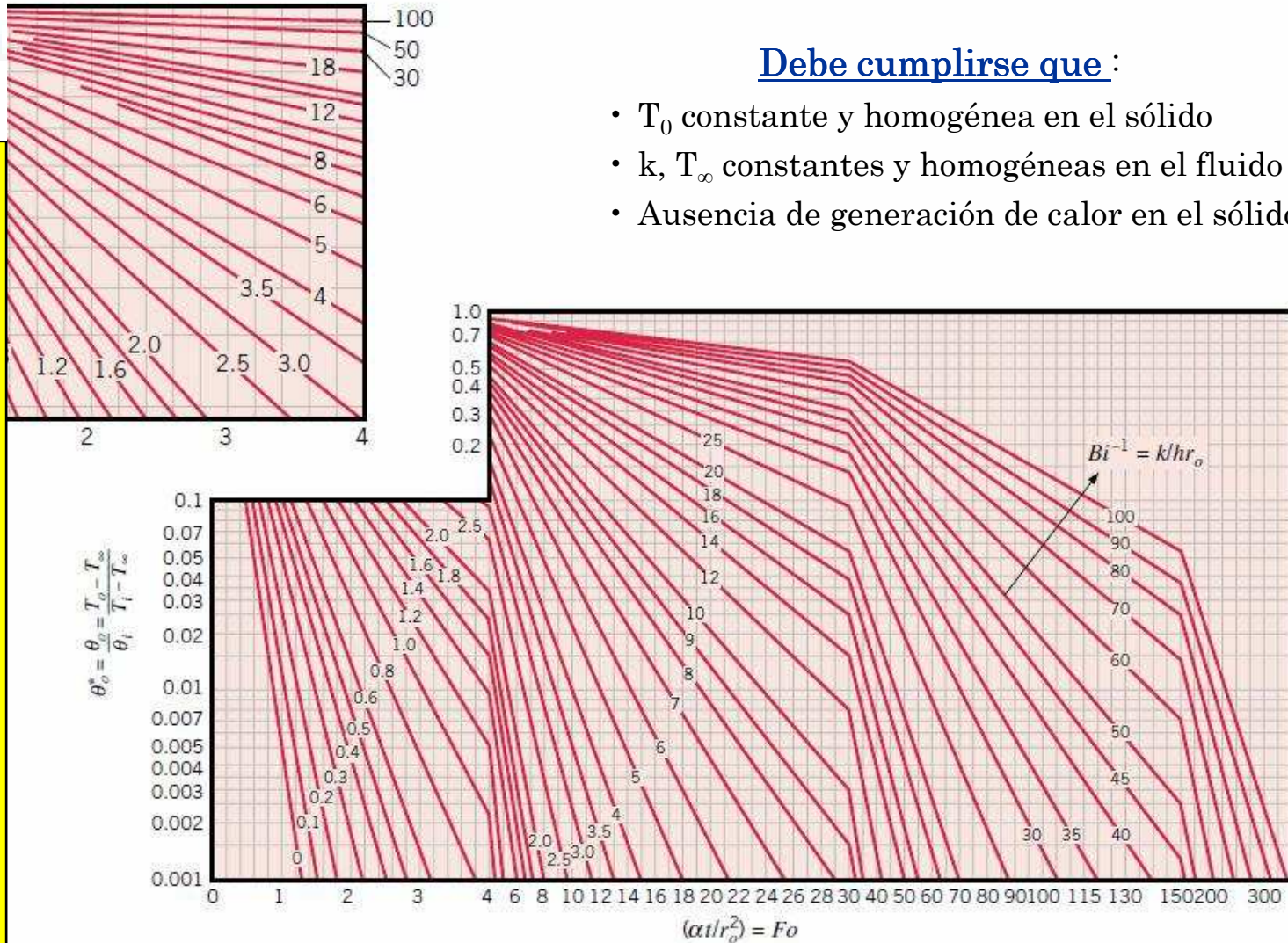
4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

encia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler

Debe cumplirse que :

- T_0 constante y homogénea en el sólido
- k, T_∞ constantes y homogéneas en el fluido
- Ausencia de generación de calor en el sólido



ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



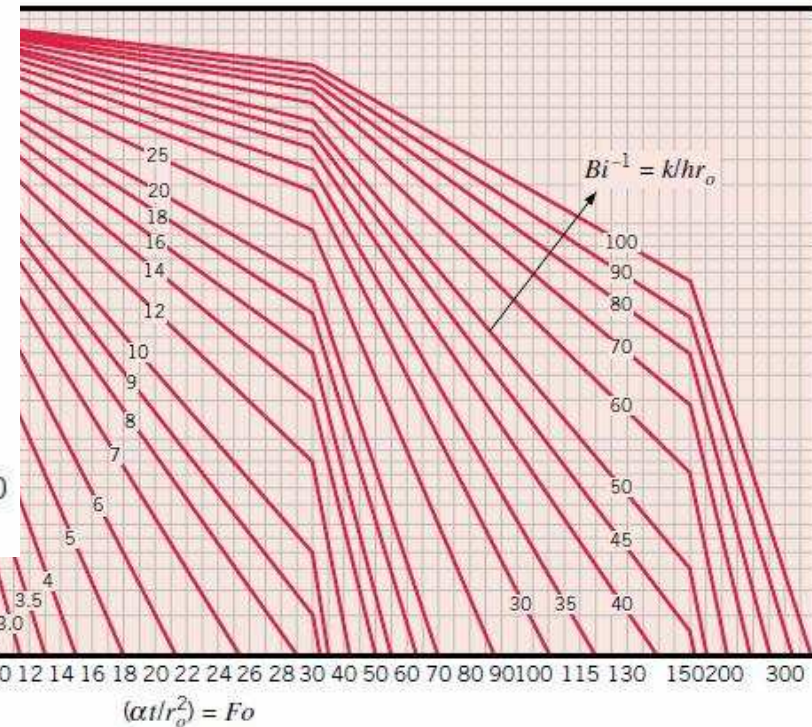
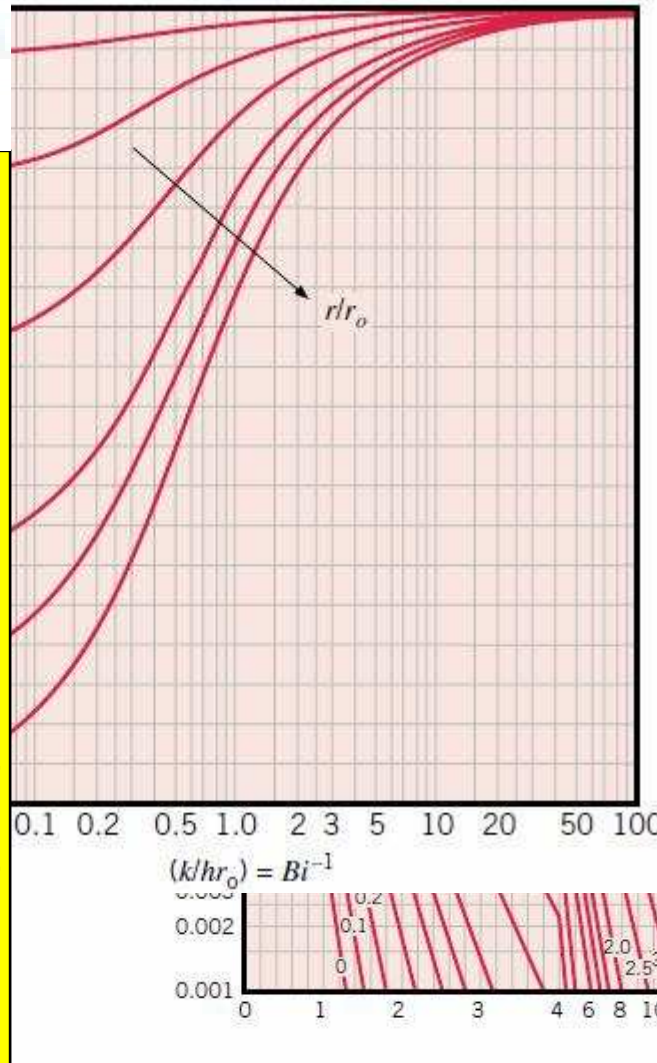
4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

encia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler

Debe cumplirse que :

- T_0 constante y homogénea en el sólido
- k , T_∞ constantes y homogéneas en el fluido
- Ausencia de generación de calor en el sólido



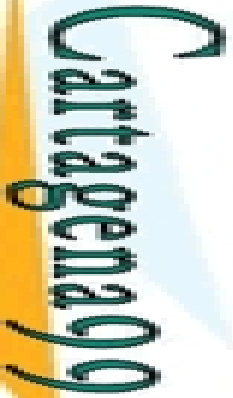
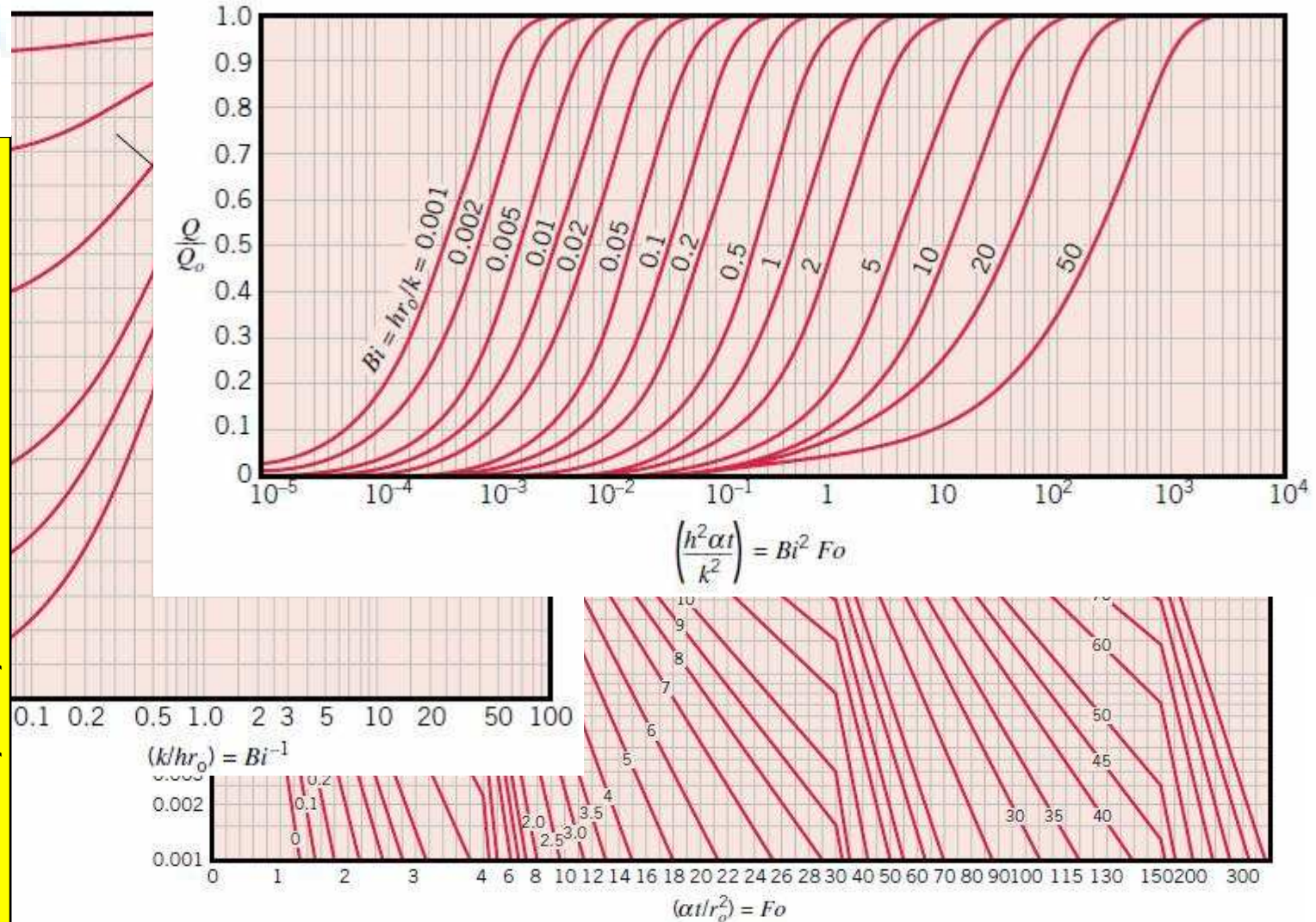
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.1 Método analítico

encia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

implícito

[4]

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T) + G$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [125]$$

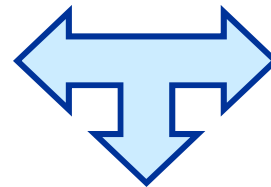


Dimensional
Iteración
Celdas rectangulares
Actividad constante

Derivadas espaciales

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad [80]$$

$$\frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad [81]$$



Derivada temporal

$$\tau = \rho \cdot \Delta t \quad [126]$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad [127]$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} \quad [128]$$

$$\Delta x = \Delta y \quad F_0 = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad [130]$$

$$T_{m,n}^{p+1} = F_0 \cdot (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4 \cdot F_0) \cdot T_{m,n}^p \quad [129]$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

› **explícito**

$$T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + (1 - 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^p \quad [ca 129]$$

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo \cdot (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot T_m^p \quad [131]$$

Ecuaciones explícitas

$$T_i^p \Rightarrow T_i^{p+1}$$

de cálculo:

- temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = 0$
- temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = \Delta t$
- temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = 2 \Delta t$
- ...
- temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = t_{Final}$

✓ Precisión:

- Depende de Δx , Δy y Δt
- A menor valor del incremento:
 - Mayor precisión
 - Mayor tiempo de cálculo

de cálculo:

El método explícito converge para determinados valores del incremento de tiempo (hay un valor por encima del cual no converge la solución).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

o *explícito*

Convergencia de la solución

Incrementos espaciales: compromiso entre precisión y requerimientos de cálculo.

Incremento temporal: criterio de estabilidad de la solución.

de estabilidad:

coeficiente asociado con la temperatura del nodo de interés en el tiempo anterior, mayor o igual que cero.

sistema bidimensional y nodo interior:

$$\left(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p \right) + \underbrace{(1 - 4 \cdot Fo)}_{Fo \leq \frac{1}{4}} \cdot T_{m,n}^p \quad [\text{ca } 129] \quad [132]$$

sistema unidimensional y nodo interior:

$$\left(T_{m+1}^p + T_{m-1}^p \right) + \underbrace{(1 - 2 \cdot Fo)}_{Fo \leq \frac{1}{2}} \cdot T_m^p \quad [\text{ca } 131] \quad [133]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

✓ *explícito*

Balance de energía

Balance de energía:

$$\text{entra} + E. \text{ generada} = E. \text{ acumulada}$$

✓ Nodo exterior:

$$h \cdot A \cdot (T_\infty - T_0^p) + \frac{k \cdot A}{\Delta x} \cdot (T_1^p - T_0^p) = \rho \cdot c_p \cdot A \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} \quad [134]$$



$$T_0^{p+1} = \frac{2 \cdot h \cdot \Delta t}{\rho \cdot c_p \cdot \Delta x} \cdot (T_\infty - T_0^p) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot (T_1^p - T_0^p) + T_0^p \quad [135]$$



$$Bi = \frac{h \cdot \Delta x}{k} \quad [137]$$

$$T_0^{p+1} = 2 \cdot Fo \cdot (T_1^p + Bi \cdot T_\infty) + (1 - 2 \cdot Fo - 2 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_0^p \quad [136]$$

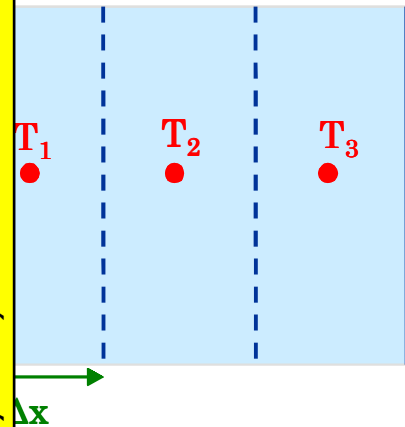
Criterio de estabilidad

$$Fo \cdot (1 + Bi) \leq 1/2 \quad [138]$$

✓ Nodo interior (ya visto):

$$T_m^{p+1} = Fo \cdot (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot T_m^p \quad [\text{ca } 131] \quad Fo \leq \frac{1}{2} \quad [133]$$

Dimensional
generación
señadas rectangulares



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CA
energía

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

implícito

[4]

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [125]$$



Dimensional
generación
celdas rectangulares
actividad constante

implícito

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} \quad [128]$$

implícito

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} - 2 \cdot T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} - 2 \cdot T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta y)^2} \quad [139]$$

$\Delta x = \Delta y$

$$(1 + 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^{p+1} - Fo \cdot (T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p \quad [140]$$

de energía

Dimensional

$$\left. \begin{aligned} \text{Nodo superficial} \quad (1 + 2 \cdot Fo + 2 \cdot Fo \cdot Bi) \cdot T_0^{p+1} - 2 \cdot Fo \cdot T_1^{p+1} &= 2 \cdot Fo \cdot Bi \cdot T_\infty + T_0^p & [141] \\ \text{Nodo interior} \quad (1 + 2 \cdot Fo) \cdot T_m^{p+1} - Fo \cdot (T_{m-1}^{p+1} + T_{m+1}^{p+1}) &= T_m^p & [142] \end{aligned} \right\}$$



ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

	Método explícito		Método implícito
	Ecuación ($\Delta x = \Delta y$; $G=0$)	Criterio estabilidad	
$m+1, n$	$T_{m,n}^{P+1} = Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^P + T_{m-1,n}^P + T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P \right) + (1 - 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \leq \frac{1}{4}$	$(1 + 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^{P+1} - Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^{P+1} + T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P$
$m+1, n$	$T_{m,n}^{P+1} = \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^P + 2T_{m-1,n}^P + 2T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + \left(1 - 4 \cdot Fo - \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo \right) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (3 + Bi) \leq \frac{3}{4}$	$\left[1 + 4 \cdot Fo \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot Bi \right) \right] \cdot T_{m,n}^{P+1} - \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^{P+1} + 2T_{m-1,n}^{P+1} + 2T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$
$m, n+1$	$T_{m,n}^{P+1} = Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^P + T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + (1 - 4 \cdot Fo - 2 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (2 + Bi) \leq \frac{1}{2}$	$\left([1 + 2 \cdot Fo \cdot (2 + Bi)] \right) \cdot T_{m,n}^{P+1} - Fo \cdot \left(2T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + 2 \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$
$m, n-1$	$T_{m,n}^{P+1} = 2 \cdot Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + (1 - 4 \cdot Fo - 4 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (1 + Bi) \leq \frac{1}{4}$	$[1 + 4 \cdot Fo \cdot (1 + Bi)] \cdot T_{m,n}^{P+1} - 2 \cdot Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + 4 \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70