Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas

TEMA I. EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO BASADO EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL.

TEMA II. MEDIOS Y TRANSFERENCIA DE ENERGÍA.

TEMA III. ONDAS PLANAS HOMOGÉNEAS (OPH).

TEMA IV. INCIDENCIA DE ONDAS PLANAS SOBRE OBSTÁCULOS PLANOS.

TEMA V. ONDAS GUIADAS POR SOPORTE FÍSICO. LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN.

Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas
2º curso, 2º cuatrim. del Grado en Ing. de T^{as} y Servicios de Telecomunicación
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid
Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)

Tema I. El modelo electromagnético basado en las ecuaciones de Maxwell.

I.1. DEFINICIÓN DEL MODELO ELECTROMAGNÉTICO MACROSCÓPICO: ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

I.2. DEFINICIÓN DE LOS MEDIOS MATERIALES EN EL MODELO ELECTROMAGNÉTICO.

I.3. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN ESTÁTICO: ELECTROSTÁTICA Y MAGNETOSTÁTICA.

I.4. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN DE VARIACIÓN TEMPORAL LENTA. LEYES DE KIRCHOFF.

I.5. DEFINICIÓN DE RÉGIMEN DE VARIACIÓN TEMPORAL ARBITRARIA.

I.6. TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A LAS ECUACIONES DE MAXWELL. RÉGIMEN MONOCROMÁTICO.

Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid
Grupo de RadioFrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas

I.4. Concepto de variación temporal lenta. Leyes de Kirchoff.

• Se ha visto en el tema anterior que cuando no hay variación temporal (régimen estacionario, también denominado estático), el campo eléctrico y magnético se pueden estudiar independientemente: están desacoplados.

• El modelo de Maxwell además relaciona cada parte del campo con unas fuentes determinadas (distribuciones de carga para el campo eléctrico estacionario y distribuciones de corriente para el campo magnético estacionario).

• Cuando lay variación temporal todos los fenómenos están interrelacionados, y es cuando el término campo electromagnético, entendido como el conjunto cohesionado de todos los vectores de campo, toma su sentido completo.

• No obstante, incluso cuando hay variación temporal, se puede hacer una distinción muy práctica: la variación temporal lenta (o baja frecuencia) frente a variación temporal rápida (o alta frecuencia). La distinción depende de las dimensiones físicas del problema considerado.

• En este tema se verá la variación temporal lenta, y como en este caso surgen las leyes de Kirchhoff como representación integral de las relaciones de los campos.

Caso estacionario vs. variación temporal

• Para los casos estacionarios las fuentes estaba perfectamente diferenciadas:

$$\rho \longrightarrow \vec{\boldsymbol{E}} \quad \vec{\boldsymbol{D}}$$

$$\vec{\boldsymbol{J}} \longrightarrow \vec{\boldsymbol{B}} \quad \vec{\boldsymbol{H}}$$

• Cuando hay variación temporal, incluso si no hay distribuciones de carga, existen fuentes de campo eléctrico:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

• Igualmente, cuando hay variación temporal, incluso si las corrientes son nulas, existen fuentes de campo magnético:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

- Al término $\partial \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)/\partial t$ se le conoce por densidad de corriente de desplazamiento (mismas unidades que la densidad de corriente [A/m^2])

• Dentro de la variedad de problemas que existen con variación temporal, se puede considerar un caso particular de gran interés: las variaciones lentas con el tiempo o *baja frecuencia* (denominación asociada al dominio de la frecuencia que se verá en el tema I.6).

• *El concepto de baja frecuencia o variación lenta con el tiempo es totalmente relativo y depende de cuales sean las dimensiones reales del problema o circuito bajo estudio*.

Definición de *variación temporal lenta*

• La ***variación temporal lenta o baja frecuencia***, se caracteriza porque en las ecuaciones de Maxwell se desprecia el término de la corriente de desplazamiento:

$$\left|\frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\right| \ll |\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)|$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

Variación temporal lenta

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

• Sin este término, el modelo de Maxwell no desemboca en ecuaciones de onda y no hay fenómenos de propagación: es una aproximación de respuesta instantánea (que también se extiende a los medios materiales: no puede haber dispersión temporal).

• Además, se hace notar que el campo eléctrico ya no es irrotacional. → El concepto de potencial eléctrico debe ser revisado cuando hay variación temporal (ver apéndice del Tema_I3-I5).

• Las condiciones concretas que diferencian la variación lenta de la variación arbitraria son difíciles de definir cuando sólo se conoce la variación lenta, y se pospondrán al siguiente tema.

- Pero se anticipa que será en aquellas situaciones en que las dimensiones físicas en el problema sean mucho menores que la longitud de onda en el circuito.

Electromagnetismo vs. teoría de circuitos

• Las relaciones de circuitos fueron postuladas y verificadas antes que las relaciones de campo.

• Sin embargo, son un caso particular de las ecuaciones de Maxwell.

Los lemas de Kirchoff son un caso particular de las ecuaciones de Maxwell para variación temporal lenta.

• La teoría de circuitos, cuando se pueden usar, proporciona una descripción mucho más manejable y eficiente que las ecuaciones de Maxwell, pero conviene conocer sus limitaciones.

• El problema surge al intentar ver como es un elemento real y como se comporta en función de la frecuencia:

- Salvo en estática no se puede hablar estrictamente de elementos concentrados puros.

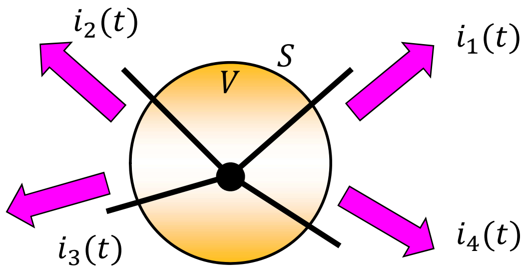
- conforme se aumenta la frecuencia (la rapidez de la variación temporal) hay que ir añadiendo más y más elementos al circuito equivalente para tener en cuenta su comportamiento real, y se usan circuitos equivalentes de cada componente.

- Incluso así, cuando hay fenómenos de propagación, los elementos concentrados no sirven, y la aproximación de variación lenta deja de ser válida.

Primera Ley de Kirchoff

- Primera Ley de Kirchoff: en una unión de varios conductores (nudo en el circuito) no debe producirse acumulación de cargas:

$$\sum_k i_k(t) = 0$$



- Se va analizar esa ley desde el punto de vista del modelo de Maxwell, utilizando la ecuación de continuidad de la carga y la divergencia de la inducción eléctrica en el volumen V que encierra al nudo por una superficie S:

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \frac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$$0 = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}) dV = \oiint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} + \oiint_S \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} =$$

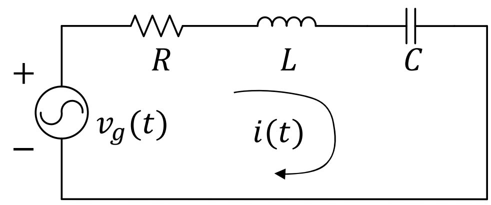
$$= \sum_k i_k(t) + i_{desp}(t)$$

La primera ley de Kirchhoff es válida si en un nudo no se acumula carga ($\partial \rho / \partial t = 0$), o, equivalentemente, si las corrientes de desplazamiento son nulas (condición de variación temporal lenta)

Segunda Ley de Kirchoff

- Segunda Ley de Kirchoff: El segundo lema de Kirchhoff establece que la tensión aplicada en un circuito es igual a la suma de caídas de tensión a lo largo del circuito:

$$v_g(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{di} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



- En la teoría clásica el caso general corresponde a una caída de tensión en las resistencias, otra en bobinas y otra en los condensadores (que sé podrían agrupar si hay varios).

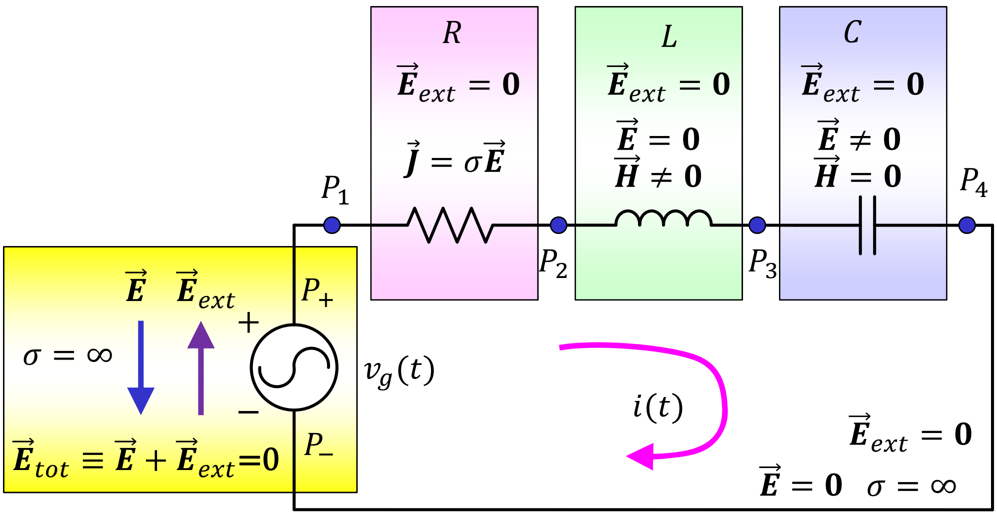
- Sin pérdida de generalidad, el generador, los elementos R,L,C, y el cable, son ideales (en caso contrario sus efectos parásitos o circuito equivalente se englobarían dentro de los elementos concentrados, simplemente modificando los valores del circuito a R',L',C').

- Se va analizar la segunda ley de Kirchoff desde el punto de vista del modelo de Maxwell, donde los componentes R,L,C serán cada uno de ellos un *cajón* en el que se especificará *lo que se espera de ellos* desde el punto vista electromagnético.

- Las fuente de tensión se describirá como un campo eléctrico impuesto ***externa y exclusivamente*** en la zona del generador.

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{tot}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{E}}_{ext}(\vec{\boldsymbol{r}},t) + \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

Circuito desde el punto de vista electromagnético (I)



$$\oint_C \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l} = \text{fem}_g - \frac{d\Phi_B}{dt} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\vec{J}}{\sigma} dl + \int_{P_3}^{P_4} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (Electro-magnetismo)

(ver demostración posterior)

$$v_g(t) - L\frac{di(t)}{di} = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$ (circuitos)

Circuito desde el punto de vista electromagnético (y II)

- Resistencia R: Disipa energía debido a su conductividad finita.
  - No almacena energía eléctrica. No almacena energía magnética.

- Bobina L: almacena energía magnética
  - No almacena energía eléctrica. No tiene pérdidas

- Condensador C: almacena energía eléctrica.
  - No almacena energía magnética. No tiene pérdidas.

(los conceptos energéticos se verán en el tema II.3 y II.4)

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r},t) = \vec{E}_{ext}(\vec{r},t) + \vec{E}(\vec{r},t)$$

- Generador: Únicamente aporta energía, y el campo $\vec{E}_{ext}$ sólo es no nulo en esta zona.
  - Si se supone ideal y sin pérdidas, su conductividad será infinita $\sigma = \infty$ y su resistencia interna nula. Como existe una corriente finita a través del generador, implica que *dentro del generador*:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}_{tot}$$
$$\vec{E} = -\vec{E}_{ext}$$

- Conexiones con hilo de conductor perfecto $\sigma = \infty$ (por lo que campo eléctrico nulo en su interior).
  - Por tanto, a efectos del análisis $P_1 \equiv P_+$, $P_4 \equiv P_-$, y cualquier punto entre R-C, y C-L se puede definir como P_2 y P_3, respectivamente (el orden de los elementos además tampoco importaría).

Dem. 2ª Ley Kirchoff: Fuerza electrom. total en la malla (I)

- Primero, se va a calcular la circulación del campo total a lo largo del contorno del circuito:

$$\oint_C \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_{ext} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l}$$

$$\left. \begin{aligned} & \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ & \oint_C \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = \int_{P_-}^{P_+} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = \mathrm{fem}_g \equiv v_g(t) \end{aligned} \right\} \quad \oint_C \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l} = v_g(t) - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

- A diferencia del caso estacionario, el campo eléctrico ya no es conservativo, y aparece una fuerza electromotriz inducida debida la variación del flujo magnético.

  - Si el flujo está concentrado en la zona de la bobina, se podrá escribir (L independiente del tiempo): $\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \dfrac{dLi}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$

  - Si hubiera otros coeficientes de inducción entre distintas partes del circuito, la variación de flujo ya no sería estrictamente este término, en el que habría que incluir las contribuciones al flujo adicionales por esas inducciones mutuas (pero se podrían tener en cuenta en el circuito con transformadores e inductancias mutuas).

Dem.: Fuerza electromotriz total en la malla (II)

- Segundo, descomponiendo la integral en el contorno por trozos:

$$\oint_C \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\substack{\vec{J} = \sigma\vec{E} \\ \vec{E}_{ext} = 0 \\ R}} + \underbrace{\int_{P_2}^{P_3} \cancelto{0}{\vec{E} \cdot d\vec{l}}}_{\substack{\vec{E} = 0 \\ \vec{E}_{ext} = 0 \\ L}} + \underbrace{\int_{P_3}^{P_4} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\substack{\vec{E} \neq 0 \\ \vec{E}_{ext} = 0 \\ C}} + \underbrace{\int_{P_4}^{P_-} \cancelto{0}{\vec{E} \cdot d\vec{l}}}_{\substack{\vec{E} = 0 \\ \vec{E}_{ext} = 0 \\ conexiones}} + \underbrace{\int_{P_-}^{P_+} \cancelto{0}{\vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l}}}_{\substack{\vec{E} = -\vec{E}_{ext} \\ \vec{E}_{ext} \neq 0 \\ generador}}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \overset{(1)}{=} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} \approx \int_{P_1}^{P_2} \frac{i}{\sigma S} dl = Ri$$

(1),(2) ver pag. siguiente

$$\int_{P_3}^{P_4} \vec{E} \cdot d\vec{l} \overset{(2)}{=} \int_{P_3}^{P_4} \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{l} \approx \int_{P_3}^{P_4} -\nabla\Phi \cdot d\vec{l} = \Phi(P_3) - \Phi(P_4) = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

- Finalmente, en los casos que las condiciones descritas para las aproximaciones se cumplan, se llega a la segunda ley de Kirchoff (a falta de reordenar los términos):

$$\boxed{v_g(t) - L\frac{di(t)}{dt} = \oint_C \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{l} = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt}$$

Dem.: Fuerza electromotriz total en la malla (y III)

- Paso (1): si la frecuencia es suficientemente baja, se puede suponer que la corriente se distribuye uniformemente por la sección del conductor (aproximación filiforme), por lo cual

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\vec{\boldsymbol{J}}}{\sigma} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} \approx \int_{P_1}^{P_2} \frac{i}{\sigma S} dl = Ri \qquad |\vec{\boldsymbol{J}}| \approx i/S \quad \vec{\boldsymbol{J}} \approx \parallel d\vec{\boldsymbol{l}}$$

- Paso (2): el campo no estacionario ya no es irrotacional y no se puede derivar exclusivamente de una función potencial escalar; si se puede hacer: $\vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$

  - Dem: el campo inducción magnética cuando hay variación temporal sigue siendo solenoidal, por lo que se puede escribir: $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right)}_{} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

Irrotacional, y por tanto *obtenible* de un gradiente

  - Al calcular la integral del campo eléctrico se puede despreciar el término de $\vec{\boldsymbol{A}}$ (caída de tensión inductiva en el condensador) frente a Q/C, e incluso frente a Ldi/dt

$$\left|\int_{P_3}^{P_4} \boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\right| \ll \left|\int_{P_3}^{P_4} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}\right|$$