Tema 7: Integración

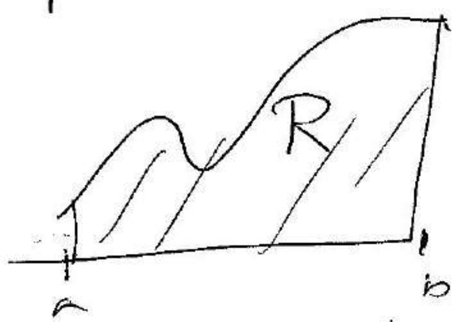
• **Introducción:**

Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua

Queremos asociar a la función f un número $I = \int_a^b f(x)\,dx$ que cumpla:

i) Si $f \geq 0$, $I \geq 0$, y además I debe representar el área de $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

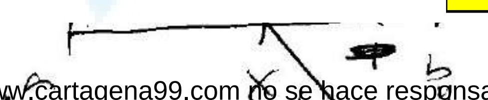
$I =$ "Área (R)".



ii) Si f es continua en $[a,b]$ pero existen puntos $\underset{x_0}{a} < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \underset{x_{k+1}}{b}$ de modo que

f tiene signo constante en $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, k$,

entonces $I = \varepsilon_1 I_1 + \dots + \varepsilon_k I_k$,



iii) Si $a \leq x \leq b$, e $I(x) = \int_a^x f(t)\, dt$,

$I(x)$ es diferenciable con $I'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Para ello, el procedimiento que usaremos será dividir el intervalo $[a,b]$ usando particiones más y más finas:

Def 1: i) Sea $I = [a,b]$ $(a<b)$ Por partición P de $[a,b]$, entendemos un subconjunto finito y ordenado en orden creciente $P = \{x_j : 0 \leq j \leq n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (así pues, P consta de $n+1$ puntos).

ii) Dada una partición P de $[a,b]$ con $n+1$ puntos, definimos los incrementos Δ_j como $\Delta_j = x_{j+1} - x_j$, $0 \leq j \leq n-1$

(observamos que $\Delta_j > 0$, $j = 0, \dots, n-1$ y $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j = b-a$)

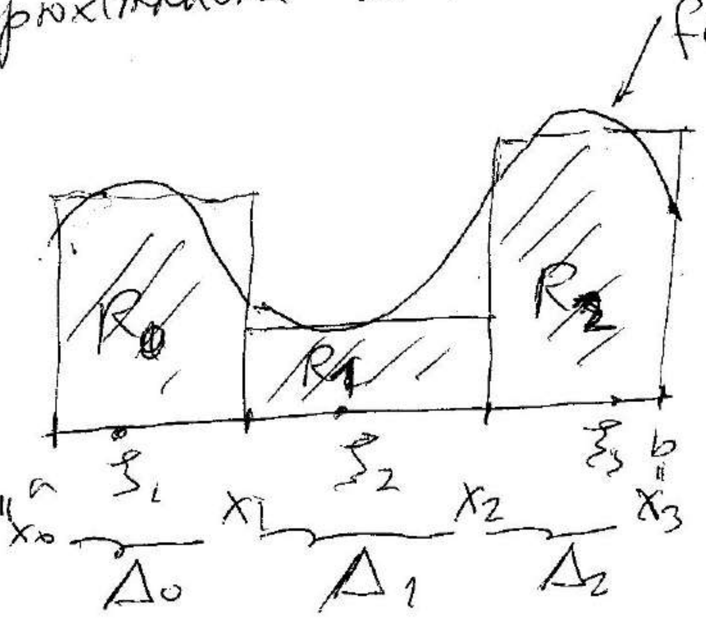
Def 2: Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$

dado por

$$S_{P,Q}(f) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' f(\xi_j)\,\Delta_j \,,$$

siendo $\left| \begin{array}{l} \xi_j \in [x_j, x_{j+1}] \,, \quad j = 0, \dots, n-1 \\ Q = \{ \xi_j : j = 0, \dots, n-1 \} \end{array} \right.$

- Tales sumas de Riemann $S_{P,Q}(f)$ pretenden ser aproximaciones al verdadero valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$



R_j := rectángulo de base Δ_j y altura $f(\xi_j)$; $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

<u>Def3:</u> Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ una función

<u>Por integral (en el sentido de Riemann)</u> de f, extendida

siendo para una partición ... $0 \le j \le n$

$P = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$

(Cuando decimos que $\exists \lim_{\Delta P \to 0} S_{P,Q}(f)$, queremos

que si P_n ($n = 1, 2 \ldots$) es una sucesión de particiones

de $[a,b]$ con $\Delta(P_n) \mapsto 0$, entonces

$\exists \lim_{n \to \infty} S_{P_n, Q_n}(f)$, y además tal límite

no depende de cómo se escoja la sucesión de

particiones P_n)

Prop 1: Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Entonces,

$\exists \lim_{\Delta P \to 0} S_{P,Q}(f)$ (que es, por definición,

la integral $\int_a^b f(x)\,dx$)

Para probar la Prop 1 la herramienta fundamental es el siguiente resultado:

Prop 2: Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en cada $x \in [a,b]$

(intervalo cerrado y acotado). Entonces, dado $\varepsilon > 0$

que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ con $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Entonces f se dice uniformemente continua en A.

Obs: Con la continuidad a secas (que se dio no en un punto $x_0 \in A$), si damos $\varepsilon > 0$ el $\delta > 0$ que hace $|x-x_0| \leq \delta$ con $x \in A \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$ depende a priori de ε y del punto x_0.
En la continuidad uniforme queremos poder elegir $\delta > 0$ independientemente de x_0).

Ejemplos, i) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,1)$ es continua en todos sus puntos, pero no uniformemente continua (f deja de ser uniformemente continua por no ser acotada cerca de $x=0$).

ii) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $(x \in (0,1))$ tampoco es uniformemente continua (cerca de $x=0$ oscila cada vez más

uniformemente continua, pero veamos un papel

5)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta P \to} S_{P,Q}(f).$$

<u>Dem (Prop 1)</u> i) Veamos primero que si f es continua en $[a,b]$, las sumas de Riemann $S_{P,Q}(f)$, donde se ha fijado P, varían muy poco con la elección de Q: para ello, si

$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y $Q = \{\xi_j : j = 0, \ldots, n-1\}$

$Q_P = \{x_j : j = 0, \ldots, n-1\}$

(en Q_P en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$ elegimos precisamente ξ_j = extremo inferior de $[x_j, x_{j+1}]$),

$S_{P,Q}(f) - S_P(f)$ (con $S_P(f) = S_{P,Q_P}(f)$)

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (f(\xi_j) - f(x_j)) \Delta_j$$

$$\Rightarrow |S_{P,Q}(f) - S_P(f)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\xi_j) - f(x_j)| \Delta_j$$

modo que $\Delta P \leq \delta$ y $\delta > 0$ tal que ...

$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ (tal elección de $\delta > 0$ puede hacerse por ser f uniformemente continua en $[a,b]$)

Usando (1), si Q, Q' son subconjuntos

$Q = \{\xi_j : j = 0, \ldots, n-1\}$, $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

$Q' = \{\xi_j' : j = 0, \ldots, n-1\}$, $\xi_j' \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$|S_{P,Q}(f) - S_{P,Q'}(f)| = |(S_{P,Q}(f) - S_P(f)) + (S_P(f) - S_{P,Q'}(f))|$$

$$\leq |S_{P,Q}(f) - S_P(f)| + |S_{P,Q'}(f) - S_P(f)|$$

$$\leq 2\varepsilon(b-a) \qquad (2).$$

Por (2), basta considerar suma de Riemann del tipo $S_P(f)$, sin más que tomarlas suficientemente "finas" (con ΔP suficientemente pequeño, dado un error $\varepsilon > 0$)

ii) Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo y $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$

$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Consideremos P, P'

Lema: Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ como antes y P una partición de $[a,b]$ con $\Delta P \leq \delta$. Si P' es otra partición de $[a,b]$ con $P \subset P'$, entonces

$$\left| S_P(f) - S_{P'}(f) \right| \leq \varepsilon (b-a) \qquad (3)$$

Dem (Lema) Sean $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y $P' = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$. Como $P \subset P'$, tenemos:

- $x_0 = y_0$
- $x_1 = y_{k_1}$, $0 < k_1 < m$
- $x_2 = y_{k_2}$, $0 < k_1 < k_2 < m$

$\vdots$

- $x_n = y_{k_n}$, $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n = m$

$ \overset{\|}{b}$

$$S_{P'}(f) = \sum^{m-1} f(y_j)(y_{j+1} - y_j)$$

$$\dots \left(\sum_{j=k_{n-1}} \dots \right)$$

Observamos que $\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' (y_{j+1} - y_j) = x_1 - x_0$

$$\sum_{j=k_1}^{k_2-1}{}' (y_{j+1} - y_j) = x_2 - x_1 \qquad (*)'$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n-1}{}' (y_{j+1} - y_j) = x_n - x_{n-1}$$

Usando $(*)$ y $(*)'$,

$$S_{P'}(f) - S_P(f) = \left(\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' f(y_j)(y_{j+1} - y_j) - f(x_0)(x_1 - x_0) \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=k_1}^{k_2-1}{}' f(y_j)(y_{j+1} - y_j) - f(x_1)(x_2 - x_1) \right)$$

$$\vdots$$

$$+ \left(\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n-1}{}' f(y_j)(y_{j+1} - y_j) - f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \right) \qquad (**)$$

- Asimismo, $\left| \sum_{j=0}^{k_1-1}{}' f(y_j)(y_{j+1} - y_j) - f(x_0)(x_1 - x_0) \right| =$

$j=0$

$\leq \varepsilon$, pues $|y_j - x_0| \leq |x_1 - x_0| \leq \Delta P \leq \delta$

Estimando de forma análoga los otros términos en $(**)$,

$$|S_{P'}(f) - S_P(f)| \leq \varepsilon(x_1 - x_0) + \varepsilon(x_2 - x_1) + \dots + \varepsilon(x_n - x_{n-1})$$
$$= \varepsilon(b-a)$$

Usando el Lema, si P, P' son dos particiones de $[a,b]$ con $\Delta P, \Delta P' \leq \delta$ entonces $P'' = P \cup P'$ cumple $P, P' \subset P''$, luego

$$|S_P(f) - S_{P'}(f)| = |(S_P(f) - S_{P''}(f)) + (S_{P''}(f) - S_{P'}(f))|$$
$$\leq |S_P(f) - S_{P''}(f)| + |S_{P'}(f) - S_{P''}(f)|$$
$$\leq 2\varepsilon(b-a) \qquad (4).$$

Para concluir la prueba de la Prop 1, de (4) se sigue que si P_n es una sucesión de particiones

Cauchy, y de (3) que si P_n es cualquier otra sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\Delta P'_n \to 0$, y $a'_n = S_{P'_n}(f)$, el límite de a_n y el de a'_n coinciden. Asimismo, si consideramos suma de Riemann $S_{P_n,Q_n}(f)$ (con Q_n puntos elegidos compatiblemente con P_n) y $\Delta P_n \to 0$, también $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n,Q_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n}(f)$. De todo esto deducimos no sólo que $I=\int_a^b f(x)\,dx$ se puede calcular con precisión arbitraria con suma de Riemann $S_{P_n,Q_n}(f)$, sino que podemos controlar a priori cómo de buenas son esas aproximaciones a $I=\int_a^b f(x)\,dx$, dado un $\varepsilon > 0$ (error admisible) si conocemos $\delta > 0$ (el apropiado para ese ε ~~para~~ f en $[a,b]$)

i) Si $f(x) = cte$ en $[a,b]$, $I = \int_a^b f(x)dx = cte.(b-a)$.

ii) Si $f \geq 0$ en $[a,b]$, $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

iii) Si $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ son funciones continuas,

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

iv) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante, $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

v) Si $f, g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ son funciones continuas con $f \leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

vi) Si $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

vii) Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, F es diferenciable en $[a,b]$ * con $F'(x) = f(x)$

(A vii) se le conoce habitualmente como "Teorema Fundamental del Cálculo")

y si $x = b$, ... $F(b)$ ... por la izquierda

Dem:

i) Si P es una partición de $[a,b]$

con $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$,

$$S_P(f) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' f(\alpha_j)\Delta_j = \sum_{j=0}^{n-1}{}' c\,\Delta_j$$

$$= c \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}{}' \Delta_j}_{= b-a} = c(b-a). \quad (1).$$

Como (1) vale para cualquier partición P,

$$\mathcal{J}\text{-}\lim_{\Delta P \to 0} S_P(f) = c(b-a).$$

ii) Si $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$ con $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$,

$$S_P(f) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' \underbrace{\underbrace{f(\alpha_j)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta_j}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0. \quad (2).$$

Como (2) vale para cualquier partición P, con $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \lim_{\Delta P \to 0} S_P(f+g)$.

Pero si $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$,

$$S_P(f+g) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' (f+g)(x_j)\,\Delta_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}{}' \left[f(x_j)\Delta_j + g(x_j)\Delta_j \right]$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n-1}{}' f(x_j)\Delta_j \right] + \left[\sum_{j=0}^{n-1}{}' g(x_j)\Delta_j \right]$$

$$= S_P(f) + S_P(g) \qquad (3).$$

Como (3) se cumple para cualquier partición P,

$$\lim_{\Delta P \to 0} S_P(f+g) = \lim_{\Delta P \to 0} \left[S_P(f) + S_P(g) \right]$$

$$= \lim_{\Delta P \to 0} S_P(f) + \lim_{\Delta P \to 0} S_P(g)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Como (4) se cumple para cualquier partición P,

(4)

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \lim_{\Delta P \to 0} S_P(\alpha f) = \lim_{\Delta P \to 0} (\alpha\, S_P(f))$$

$$= \alpha \lim_{\Delta P \to 0} S_P(f) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

v) Si $f \leq g$ en $[a,b]$, escribimos $g = f + h$,

con $h = g - f \geq 0$ en $[a,b]$.

Usando iii),
$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \underbrace{\int_a^b h(x)dx}_{\geq 0 \text{ (por iii)}}$$

$$\geq \int_a^b f(x)dx.$$

vi) Como f es continua en $[a,b]$, si $a \leq c \leq b$, también es continua en $[a,c]$ y en $[c,b]$, luego
$\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ existen ambas.

Sea ahora $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ y supongamos $x_{m-1} \leq c < x_m$.

$$\sum^{m-2} \dots$$

Si P_n es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\Delta P_n \mapsto 0$, $S_{P_n}(f) \to \int_a^b f(x)dx$,

y $S_{P_n}(f) = I_{P_n}(f) + II_{P_n}(f) + III_{P_n}(f)$.

Entonces · $I_{P_n}(f) \mapsto \int_a^c f(x)dx$

· $|II_{P_n}(f)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \Delta P \mapsto 0$

· $III_{P_n}(f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$.

$\Rightarrow S_{P_n}(f) \to \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

vii) Sea $a < x < b$ y $h > 0$ con $x+h \leq b$.

Entonces $F(x+h) = \int^{x+h} f(t)dt$

$= F(x) + \int_x f(t)dt$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad (a<x<x+h\leq b). \qquad (S.1)$$

Del mismo modo, si $h<0$ con $a\leq x+h<x<b$,

$$F(x) = F(x+h) + \int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \quad (a\leq x+h<x<b) \qquad (S.2).$$

$$S.1) \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right] \quad (S.1)'$$

$$S.2) \Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt\right] \quad (S.2)'.$$

Veamos que los límites en $S.1)'$ y $S.2)'$ son ambos $f(x)$:

-. Sea $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ tal que $x,y\in[a,b]$ con $|x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. Tomando en

Pero para $t\in[x,x+h]$, $-\varepsilon\leq f(x)-f(t)\leq\varepsilon$

Usando Prop 7.v), se sigue que

$$-\varepsilon h \leq \int_x^{x+h} (f(x)-f(t))\,dt \leq \varepsilon h$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x)-f(t))\,dt \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon \text{ si } 0<h\leq\delta$$

(con $h>0$ tal que $x+h\leq b$)

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

- Si en 5.7) tomamos $-\delta\leq h<0$ (con $a\leq x+h<x$),

$$f(x) - \left(-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} (f(x)-f(t))\,dt,$$

y razonando como antes, $\left|\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} (f(x)-f(t))\,dt\right| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

17)

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - f(a) = \frac{F(a+h)}{h} - f(a)$$
$$= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} (f(t)-f(a))\,dt$$

y razonando como antes, $\left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - f(a)\right| \le \varepsilon$,

luego $\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(a)$.

- (La prueba de que $\lim_{h\to 0^-} \frac{F(b+h)-F(b)}{h} = f(b)$ es similar y la omito).

<u>Def 3</u>: Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces, decimos que F es una <u>primitiva</u> de f en $[a,b]$ si $F' = f$ en $[a,b]$.

<u>Prop 3</u>: Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$.

Entonces:

ii) $I = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Dem:

i) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f según el TFC (Teorema Fundamental del Cálculo: Prop. 2 vii))

ii) Si F, G son dos primitivas de f en $[a,b]$, puesto que son derivables, son asimismo continuas. Puesto que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ en (a,b), según el Teorema de Rolle, $F-G$ = cte en $[a,b]$ (pues $F-G$ es continua en $[a,b]$ con $(F-G)' = 0$ en (a,b)).

iii) Con $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, claramente $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)dt$, luego $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Por ii), si G es cualquier otra primitiva de F,

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - 0 \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Prop 4: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en cierto intervalo I. Entonces:

i) $$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

ii) Si $[a,b] \subset I$,
$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) g(x) \Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

(tanto i) como ii) se conocen como Fórmula de Integración por partes)

Dem: Puesto que $f \cdot g$ es derivable en I con $(f \cdot g)' = f'g + f g'$ tenemos

$$\int (f \cdot g)'(x)\, dx = f(x) g(x)$$

(pues $f(x) g(x)$ es primitiva de $(f \cdot g)'(x)$)

y $\int (f \cdot g)'(x)\, dx = \int [f'(x) g(x) + f(x) g'(x)]\, dx$,

Tomando $\left| \begin{array}{l} u = f(x) \\ dv = g'(x)\, dx \end{array} \right.$

Ejemplos:

i) $\int \underbrace{\log x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x\log x - \int x\cdot\frac{dx}{x}$

$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$

$= x\log x - \int dx$

$= x\log x - x + C.$

ii) $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x - \int e^x dx$

$du = dx$

$v = e^x$

$= xe^x - e^x + C.$

iii) $I = \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = -e^x\cos x - \int (-\cos x)\, e^x dx$

$du = e^x dx$

$v = -\cos x$

$= -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}$

$u = e^x, \; du = e^x dx$

$v = \operatorname{sen} x$

$= -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int \operatorname{sen} x\, e^x dx}_{I}$

$\Rightarrow 2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$

Entonces $\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + C = (f\circ g)(x) + C$

ii) Sea $g : [a,b] \longmapsto I$ diferenciable con g' continua en $[a,b]$ y $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ continua en I,

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du & \text{si } g(a) \leq g(b) \\ \displaystyle -\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)\,du & \text{si } g(a) \geq g(b) \end{cases}$$

Dem:

i) Consecuencia inmediata de la Regla de la Cadena, pues $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = h(x)$.

ii) Supongamos $g(a) \leq g(b)$ y sea $F = \int f(x)\,dx$ (luego $F' = f$ en I).

Entonces $f(g(x))\,g'(x) = (F \circ g)'(x)$, $x \in [a,b]$

luego $F \circ g$ es una primitiva de $f(g(x))\,g'(x)$ en $[a,b]$.

Por el TFC, $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = (F \circ g)(x)\Big|_{x=a}^{b}$

(c. ..)

$\Rightarrow$, si $g(a) \geq g(b)$, $F(g(b)) - F(g(a)) = -(F(g(a)) - F(g(b))) = -\int_{g(b)}^{\ldots}$

Observaciones

1) Si entendemos $\int_c^d f(x)\,dx := \begin{cases} \int_c^d f(x)\,dx, & c \le d \\ -\int_d^c f(x)\,dx & c \ge d \end{cases}$,

entonces la fórmula i) puede escribirse como

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad \text{sin}$$

necesidad de distinguir si $g(a) \le g(b)$ ó $g(a) \ge g(b)$

2) Tomando $du = g'(x)dx$, es habitual escribir i) como $\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = f(u)+C$

$$= f(g(x)) + C$$

(pues $u = g(x)$).

Ejemplos:

i) $J = \int \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Tomando $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$

(o bien, $dg = 2x\,dx$)

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\int \frac{dg}{1+g^2} = \frac{1}{2}\arctan g + C$$

$$\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C.$$

2)

y entonces $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\,\cos u\,du$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du.$$

Si hubiéramos hecho $x = \cos u$, habríamos obtenido

$\left| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow u=\pi/2 \\ x=1 \Rightarrow u=0 \end{array} \right.$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\operatorname{sen} u)\,du$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (-\operatorname{sen}^2 u)\,du$$

$$= +\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u\,du$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} (\underbrace{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}_{=1})\,du = \pi/2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Integración de funciones racionales.

Def 5) Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$, $q(x)$ polinomios y $q(x) \neq 0$, f se denomina una función racional.

1.1) $p(x) = d(x)\, q(x) + r(x)$,

1.2) $gr(r) < gr(q)$

(Recordemos que si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, decir $gr(p) = n \iff a_n \neq 0$)

2) Si los coeficientes de $p(x)$ son complejos y consideramos $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $z \in \mathbb{C}$, p tiene al menos una raíz compleja: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ con $p(z_0) = 0$.

3) Si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ es un polinomio real, y consideramos $p(z) = a_n z^n + \dots + a_n$ con $z \in \mathbb{C}$, si $z_0 \in \mathbb{C}$ cumple $p(z_0) = 0$, entonces $p(\bar{z}_0) = 0$

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \iff Im(z_0) \neq 0$, entonces $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = q(x)$ es un polinomio de grado 2 real sin raíces reales para $x \in \mathbb{R}$,

(ejemplo: si $z_0 = i$, $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$)

$p(x) = a_n (x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_k)^{r_k}\, q_1(x) \cdots q_\ell(x)$

con $x_1, \dots, x_k$: raíces reales de $p(x)$,

y $q_1(x), \dots, q_l(x)$ polinomios reales de grado 2

sin raíces reales y $r_1, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_{k+l}$ enteros ≥ 1

con $n = r_1 + \dots + r_k + 2(r_{k+1} + \dots + r_{k+l})$.

Usando 1), 2), 3), si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función

racional, con $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$; $gr(r) < gr(p)$,

$$f(x) = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

y para integrar $f(x)$ usamos la denominada

expresión de $f(x)$ como combinación lineal de

fracciones simples:

$$\frac{r(x)}{(x-x_1)^{r_1} \cdots (x-x_k)^{r_k} q_1(x)^{r_{k+1}} \cdots q_l(x)^{r_{k+l}}} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_{r_1}^1}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{A_1^2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_{r_k}^2}{(x-x_k)^{r_k}}$$

$q_l(x)$ $\qquad q_l(x)^{r_{k+l}}$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Escribimos $\displaystyle\frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

$\Leftrightarrow\ 2x^2+x+1 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1)\ \ \forall x.$ (*)

Para calcular los coeficientes en (*) hay dos métodos (complementarios).

i) Desarrollar el miembro derecho de (*) e igualando potencias de x, obtenemos un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas para $A, \ldots, D$.

ii) Tomando en (*) valores particulares de x, obtener relaciones simples para los coeficientes.

· Por ejemplo, siguiendo (ii):

· Si $x=0 \Rightarrow 1 = A$
· Si $x=-1 \Rightarrow 2 = -2B$

$\longrightarrow$ sólo quedan por determinar C, D.

luego $\dfrac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + \arctan x + C$$

$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \arctan x + C.$$

Aplicaciones de la integral:

Prop 6: (Fórmula integral del resto de Taylor)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con k derivada continua ($k\geq 1$) en $[a,b]$. Entonces, si $a\leq x\leq b$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}_{P^{k-1}(f)(x)} + \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt}_{T_k(f)(x)},$$

$(*)_k$

$f(x) = P^{k-1}(f)(x) + \frac{1}{(k-1)!}\int f^{(k)}(t)(x-t)\,dt,$

interpretando $\int_a^x$ como $-\int_x^a$.

Obs 2: $r_k(f)(x)$ dados por la Prop 6 se conoce como la fórmula integral del resto de Taylor.

Dem: - Veamos el caso base $k=1$: si $a \leq x \leq b$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad \text{(por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC))}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{f(a)}_{P_a^0(f)(x)} + \underbrace{\int_a^x f'(t)dt}_{r_1(f)(x)} \quad (a \leq x \leq b) \checkmark \qquad (1)$$

- $k=2$: La fórmula $(*)_2$ para f dice

$$f(x) = P_a^1(f)(x) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \qquad (2)$$

con $P_a^1(f)(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ (y $a \leq x \leq b$).

(tal fórmula tiene sentido, pues f'' es continua en $[a,b]$,

$= \cancel{a} - (x-a) f'(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ (3).

(1) y (3) ⇒ $P_a^1(f)(x) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$

$= [f(a) + f'(a)(x-a)] + [-f'(a)(x-a) + \int_a^x f'(t)\,dt]$

$= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$

$= f(x)$ (por el caso $k = 1$).

→ Veamos ahora en general que $(*)_k \Rightarrow (*)_{k+1}$:

$(*)_{k+1}$ afirma que si f tiene $k+1$ derivadas continuas en $[a,b]$ y $a \leq x \leq b$,

$$f(x) = P_a^k(f)(x) + \underbrace{\frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt}_{r_{k+1}(f)(x)}.$$

(tal fórmula tiene sentido por ser $f^{(k+1)}$ continua en $[a,b]$).

Denuevo, hacemos una integración por partes en $r_{k+1}(f)(x)$:

$$r_{k+1}(f)(x) = \frac{1}{k!}\int_a^x \underbrace{(x-t)^k}_{u}\,\underbrace{f^{(k+1)}(t)\,dt}_{dv}.$$

$\frac{du}{dt} = -k(x-t)^{k-1}$

$v = f^{(k)}(t)$

$= \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_k(f)(x)$ (2)

de dónde $P_a^k(f)(x) + r_{k+1}(f)(x) =$

$$= \left[\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j\right] + \left[-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_k(f)(x)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}{}' \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + r_k(f)(x)$$

$$= P_a^{k-1}(f)(x) + r_k(f)(x),$$

luego la fórmula $(*)_{k+1}$ coincide con la $(*)_k$, la cual a su vez (hipótesis de inducción), es cierta.

Ejemplos:

1) Veamos que si $\cancel{|x|<1}$ $-1<x\leq 1$, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n$:

(obs: esta fórmula ya la hemos probado si $0\leq x\leq 1$, que es una hipótesis más restrictiva).

- Si $f(x) = \log(1+x)$, $x\in(-1,1)$, $\quad f^{(n)} \quad (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$

Con ello, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\dots)$; $f(0)=0$.

$$y\ r_n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^{n-1}\,dt$$

$$= (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

• Si $0\le x\le 1$, ya sabemos que $r_n(f)(x)\longmapsto 0$,

así que supondré $-1<x\le 0$:

$$r_n(f)(x) = (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt = (-1)^{n-1}(-1)\int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

$$\Rightarrow |r_n(f)(x)| = \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt\right| = \int_x^0 \frac{(t+|x|)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

$$= \int_x^0 \left(\frac{|x|+t}{1+t}\right)^{n-1}\frac{1}{(1+t)^2}\,dt.$$

• Si $x\le t\le 0$, $0\le \frac{|x|+t}{1+t} \le \frac{|x|+|x|t}{1+t} = |x| \Rightarrow 0\le\left(\frac{|x|+t}{1+t}\right)^{n-1}\le |x|$

$$\le \int_x^0 |x|^{n-1}(1-|x|)^{-2}\,dt = \frac{|x|^n}{(1-|x|)^2} \longmapsto 0 \text{ (pues } 0\le|x|<1)$$

2) Consideremos $f(x)=(1+x)^a$ con $0<a<1$ y $|x|<1$.

Entonces $f^{(n)}(x) = \underbrace{a(a-1)\cdots(a-n+1)}_{=c_n}(1+x)^{a-n}$

y $|c_n| \le a\underbrace{(1-a)}_{\le 1}\cdots\underbrace{(n-1-a)}_{\le n-1} \le a(n-1)!$

$$\Rightarrow |r_n(f)(x)| = \left|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x c_n(1+t)^{a-n}(x-t)^{n-1}\,dt\right|$$

$$\le a\left|\int_0^x [(1+t)(x-t)]^{n-1}(1+t)^{a-1}\,dt\right|$$

Razonando como en el caso de $f(x)=\log(1+x)$,

$|(1+t)(x-t)^{n-1}| \le |x|^{n-1}$ con t entre 0 y x,

y entonces $|r_n(f)(x)| \le a|x|^{n-1}\left|\int_0^x (1+t)^{a-1}\,dt\right|$

$$\le a|x|^{n-1}(1-|x|)^{a-1}|x| \to 0$$

3) Sea $f(x)=\arctan x$.

$f' \quad f'' \quad f^{(3)} \quad f^{(4)}$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n}{}'(-t)^j = \frac{(-t)^{n+1}-1}{-t-1} = \frac{1+(-t)^n}{1+t}$$

Tomando $t=x^2$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}'(-x^2)^j = \frac{1+(-x^2)^n}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{n}{}'(-1)^j x^{2j} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{n}{}'(-1)^j t^{2j} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2j}}{1+t^2}\right]dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n}{}'\frac{(-1)^j}{2j+1}x^{2j+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt.$$

• Si $|x|\le 1$, $\displaystyle\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|}\frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt$

$$\le \int_0^{|x|} t^{2j}\,dt \quad \left(\text{pues } \frac{1}{1+t^2}\le 1\right)$$

$$= \frac{|x|^{2j+1}}{2j+1} \longmapsto 0.$$

Con ello obtenemos la serie:

Es un ejercicio simple que $\frac{\pi}{4}$ puede escribirse como:

$$\rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Usando la 2ª de las expresiones para $\frac{\pi}{4}$ de $(*)$ y la serie de Taylor de $\arctan x$, es fácil calcular $\frac{\pi}{4}$ con precisión arbitraria.

• <u>Integrales impropias y de funciones continuas "a trozos"</u>

A menudo se presenta el problema de considerar integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ donde o bien el intervalo (a,b) no es acotado y/o la función f presenta discontinuidades y/o no es acotada.

discontinuidades, definimos: $\left(\ldots \;\middle|\; b = x_{n+1} \right)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

Ejemplo 1

i) Si $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} (1)\,dx = 1 \cdot t -$$

$$= (-1)\cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

ii) $f(x) = [x]$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ (para $x \geq 0$).

Si $k \leq x < k+1$ con $k \in \mathbb{N}$,

$$F(x) = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt + \dots + \int_{k-1}^{k} (k-1)\,dt + \int_k^x k\,dt$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} j + k(x-k) = \frac{\quad}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[x]([x]-1) + [x]\{x\} \quad 35)$$

Def 7: Sea f función continua a trozos en (a,b) (intervalo abierto y no necesariamente acotado). Definimos:

i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to a+ \\ d \to b-}} \int_c^d f(x)\,dx$

(y $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$ como por la Def. 6).

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to a+ \\ d \to \infty}} \int_c^d f(x)\,dx$$

iii) Si $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to -\infty \\ d \to b-}} \int_c^d f(x)\,dx.$$

iv) Si $a = -\infty$, $b = \infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to -\infty \\ d \to \infty}} \int_c^d f(x)\,dx.$$

$\displaystyle\int_0 f(x)\,dx = \lim_{a \to 0+} \int_a d(2x^{1/2}) \quad \lim_{a \to 0+} \Big[\ \Big]_{x=a}$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[2 - 2a^{1/2} \right] = 2$$

ii) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no está acotada si $\begin{cases} x \to 1^- \\ x \to (-1)^- \end{cases}$.

$$I = \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \left[\arcsin x \Big|_{x=a}^{b} \right]$$

$$= \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \left[\underbrace{\arcsin b}_{\downarrow \pi/2} - \underbrace{\arcsin a}_{\downarrow -\pi/2} \right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

iii) $I = \int^{\infty} x^{-p} \, dx$, donde $p \geq 0$.

– Si $p = 0$, $I = \lim_{R \to \infty} \int 1 \, dx = \lim_{R \to \infty} (R-1) = \infty$

- Si $0<p<1$, $I = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{x^{-p}\,dx}_{d\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{x=1}^{R} \right]$

$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \infty$, pues $1-p>0$.

- Si $p=1$,

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{\frac{dx}{x}}_{d(\log x)} = \lim_{R\to\infty} \left[\log x \Big|_{x=1}^{R} \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \log R = \infty.$$

- Si $p>1$, $I = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{x^{-p}\,dx}_{d\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)} =$

$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1}$, pues $1-p<0$

iv) Sea $a>0$ e $I = \int^{\infty} e^{-ax}\,dx$.

$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-aR} \right] = \frac{1}{a}$, pues

3 p)

- Sabemos que $I=\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de sumas de Riemann (por ejemplo, $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{j}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$)

- A menudo se presenta el problema de calcular (exacta o aproximadamente), sumas del tipo $S_n=\sum_{j=1}^{n} f(j)$, donde f es una función "con variación suave". La idea es que, en algún sentido, $S_n \simeq \int_0^n f(x)\,dx$, y a menudo es mucho más sencillo calcular/estimar $\int_0^n f(x)\,dx$.

Prop 7: Sea f una función con derivada continua en $[0,n]$ $(n\in\mathbb{N})$, si $S_n=\sum_{j=1}^{n} f(j)$, tenemos

$$S_n=\int_0^n f(x)\,dx+\int_0^n f'(x)\{x\}\,dx,$$

$\{x\} = x-[x]$

$$S_n-\int_0^n f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\left[f(j)-\int_{j-1}^{j} f(x)\,dx\right]$$

Asimismo, $\int_{j-1}^{j} f(x)\,dx = \int_{j-1}^{j} u\,dv$ $\Big|$ $u = f(x)$, $v = x-j+1$

$$= \underbrace{uv}_{f(x)(x-j+1)}\Big|_{x=j-1}^{j} - \int_{j-1}^{j} (x-j+1)\, f'(x)\,dx$$

$$= f(j) - \int_{j-1}^{j} (x-j+1)\, f'(x)\,dx$$

$$= f(j) - \int_{j-1}^{j} \{x\}\, f'(x)\,dx, \quad \{x\} = x-j+1 \text{ si } j-1 \le x < j \qquad (7)$$

(1) y (7) $\Rightarrow$ $S_n - \int_0^n f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n}{}' \int_{j-1}^{j} \{x\}\, f'(x)\,dx = \int_0^n f'(x)\{x\}\,dx$ ■

Ejemplo:

i) $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{j}$: $S_n = 1 + \sum_{j=2}^{n}{}' \frac{1}{j}$, y usando la Prop 7, $\sum_{j=2}^{n}{}' \frac{1}{j} = \int_1^n \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$,

luego $S_n = 1 + \log n - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$.

(10)

o en otros términos, $S_n = \log n + \gamma + o(1)$, $n \to \infty$,

siendo $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx$ la denominada

constante de Euler–Mascheroni ($\gamma = 0.577\ldots$)

Este resultado implica en particular que $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$

diverge, pues las sumas parciales de esta serie

son $\simeq \log n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log n} \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{j}\right) = 1\right)$

ii) $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' \log j$: $S_n = \sum_{j=2}^{n}{}' \log j$, y usando

la Prop. 7.7. $S_n = \int_1^n \log x \, dx + \int_1^n \frac{\{x\}}{x} dx$

- $\int_1^n \log x \, dx = x\log x - x \Big|_{x=1}^{n} = n\log n - n + 1$

- $\int_1^n \frac{\{x\}}{x} dx = \sum_{j=1}^{n-1}{}' \int_j^{j+1} \frac{\{x\}}{x} dx$.

$\int_j^{j+1} \frac{\{x\}}{x} dx = \int_j^{j+1} \{x\}\left[\frac{1}{j} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{j}\right)\right] dx =$

$\frac{1}{2j} - \int_j^{j+1} \frac{\{x\}}{x \cdot (x)} dx$

$$\Rightarrow \int_1^n \frac{\{x\}^3}{x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \int_1^n \frac{\{x\}^3}{x[x]}\,dx$$

Por tanto: $S_n = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \int_1^n \frac{\{x\}^3}{x[x]}\,dx$

y puesto que según el ejemplo anterior, $\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = \log(n-1) + A_n$, con $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

$$= \log n + \log\frac{n-1}{n} + A_n$$

$$= \log n + \underbrace{\log\left(1-\frac{1}{n}\right) + A_n}_{= A'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A},$$

podemos escribir

$$S_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C_n, \qquad (*)$$

con $C_n = 1 + \frac{1}{2}A'_n - \int_1^n \frac{\{x\}^3}{x[x]}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} C = 1 + A - \int_1^\infty \frac{\{x\}^3}{x[x]}\,dx$

(C es una constante finita porque $0 < \frac{\{x\}^3}{x[x]} \le \frac{1}{x^2}$ $(x \ge 1)$

y $\int^\infty \frac{dx}{\ldots} = 1$, que hace a $0 < \int^\infty \frac{\{x\}^3}{\ldots}$ ... < 1)

$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$

Observaciones:

i) La Prop. 8 puede expresarse $n! \simeq A n^{n+1/2} e^{-n}$, $n >> 1$

ii) Puede probarse que $A = \sqrt{2\pi}$

<u>Dem (Prop 8)</u>: Según (*), $\log n! = \sum_{j=1}^{n} \log j$ puede

escribirse como $\log n! = (n+\frac{1}{2}) \log n - n + c_n$

$$= \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + c_n$$

$$\Rightarrow n! = \exp(\log n^{n+\frac{1}{2}} - n + c_n)$$

$$= e^{c_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Si $n \to \infty$, $e^{c_n} \longmapsto e^{c}$; $C = \lim_{n\to\infty} c_n$,

y si $A = e^{c}$, $0 < A < \infty$ por lo visto anteriormente

y tenemos $\frac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} = e^{c_n} \underset{n\to\infty}{\longmapsto} A$ ☒

Entonces, si consideramos $S=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $I=\int_1^{\infty} f(x)\,dx$,

$S, I \geq 0$ y son ambas finitas o infinitas simultáneamente

(A la Prop. 9 se le suele conocer como "Criterio de Convergencia de la Integral").

<u>Dem</u>: Por i), f es decreciente en $[1,\infty)$,
luego si $x \geq 1$, $f(1) \geq f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Consideremos ahora $n \in \mathbb{N}$ y $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(j)$, $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$

e $I_n = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} f(x)\,dx$. (1)

Para $j \geq 1$ fijo, si $j \leq x \leq j+1$, $f(j) \geq f(x) \geq f(j+1)$

$$\Rightarrow \int_j^{j+1} f(j)\,dx \geq \int_j^{j+1} f(x)\,dx \geq \int_j^{j+1} f(j+1)\,dx$$

(2)

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}{}' f(j)}_{S_n} \geq I_n \geq \underbrace{\sum_{j=2}^{n}{}' f(j)}_{S_{n+1}-f(1)}$$

$$\Rightarrow S_n \geq I_n \geq S_{n+1} - f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \ (3)$$

Tomando en (3), $\lim_{n\to\infty}$, deducimos

$$S \geq I \geq S - f(1) \qquad (4),$$

luego S e I son finitas o infinitas simultáneamente (que $S, I \geq 0$ es obvio, por ser $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 1$).

Ejemplos:

i) $\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{j}$ diverge:

Ya lo hemos visto, pues $\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{j} = \log n + O(1)$, $n \to \infty$,

ii) $\sum_{j=1}' \frac{1}{j^p}$ converge si $p > 1$.

Prop 10: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ función continua en $[a,b]$: intervalo cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

Dem: Sea, para $\varepsilon>0$ fijo, A el conjunto

$A=\{c\in[a,b]:\exists\delta>0$ tal que $x,y\in[a,c]$ y $|x-y|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon\}$.

- $A\neq\phi$, pues f continua en $x=a\Rightarrow a\in A$.
- A está acotado superiormente (por b).

Por tanto $\exists\alpha=\sup A$. Si vemos que $\alpha\in A$ y además $\alpha=b$, hemos terminado: (está claro que $a\leq\alpha\leq b$)

- $\alpha\in A$: Por definición de α, si $a\leq c<\alpha$, $c\in A$.

Como f es continua en $x=\alpha$, $\exists\delta_1>0$ tal que si $|x-\alpha|\leq\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(\alpha)|\leq\varepsilon/2$ Si α fuera a, ya lo tendríamos, y si no, $a<\alpha\leq b$. Fijemos entonces $c\in(a,\alpha)$ con $\alpha-c<\delta_1$. Como $c\in A$, $\exists\delta_2>0$

$|x-y|$ ... $|x-y|\leq\delta_3\leq\delta_2\Rightarrow|f(x)$ ...

Si $x,y\in[a,c]$,

- Si $x, y \in [c, \alpha] \Rightarrow |x-\alpha|, |y-\alpha| \le \alpha - c < \delta_1$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |(f(x)-f(\alpha)) + (f(y)-f(\alpha))|$$
$$\le \underbrace{|f(x)-f(\alpha)|}_{\le \varepsilon/2} + \underbrace{|f(y)-f(\alpha)|}_{\le \varepsilon/2}$$
$$\le \varepsilon. \qquad (2)$$

- Si $x \in [a,c]$ e $y \in [c, \alpha]$ con $|x-y| \le \delta_3$,

$$|f(x)-f(y)| = |(f(x)-f(c)) + (f(c)-f(y))|$$
$$\le \underbrace{|f(x)-f(c)|}_{\substack{\le \varepsilon/2 \\ (\text{por } (1))}} + \underbrace{|f(c)-f(y)|}_{\substack{\le \varepsilon/2 \\ (\text{por } (2))}}$$
$$\le \varepsilon.$$

de donde $|f(x)-f(y)| \le \varepsilon$ si $x, y \in [a, \alpha]$ con $|x-y| \le \delta_3$,

luego $\alpha \in A$.

- Para ver que $\alpha = b$, basta ver que si $a \le c < b$, con $c \in A$, $\alpha > c$ (pues sabemos que $\alpha \le b$).

Como $\exists \delta_1 > 0$ tal que $x, y \in [a,c]$ con $|x-y| \le \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in [a,b]$ con $|x-c| \le \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(c)| \le \frac{\varepsilon}{2}$

con $|x-y| \le$ ...