

Cálculo de una variable

Funciones y Modelos	2
Sucesiones y series infinitas	34
Integrales	41
Aplicaciones de la integración.....	52
Ecuaciones Diferenciales	58
Bibliografía.....	65



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Integrales

Definición de Integral Definida

Si f está definida en el intervalo $[a, b]$ y dividimos el intervalo en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ los puntos extremos de estos subintervalos y $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ cualquier punto muestral en esos subintervalos y x_i^* está en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la integral definida de f de a a b es:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

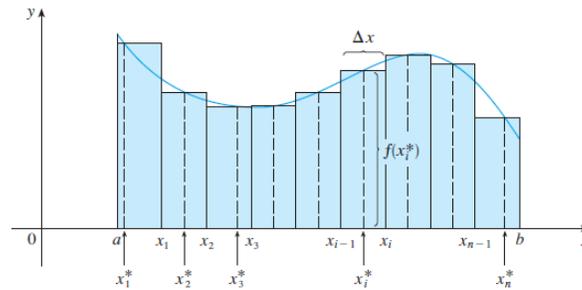


Ilustración 48.- Integral Definida

Si existe el límite decimos que f es integrable en $[a, b]$. Para simplificar haciendo $x_i^* = x_i$ queda la definición:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

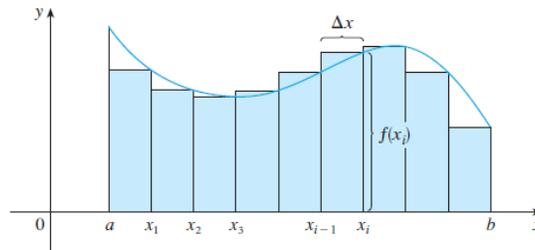


Ilustración 49.- Integral Definida

Teorema: si f es continua en $[a, b]$ y sólo tiene un número finito de discontinuidades de salto, f es integrable en $[a, b]$, esto es existe la integral definida $\int_a^b f(x) dx$.

Regla del punto medio: En lugar de utilizar los extremos de los subintervalos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b cdx = c(b - a)$
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
7. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
8. Si $f(x) \geq 0$ para $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
9. Si $f(x) \geq g(x)$ para $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
10. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $[a, b]$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

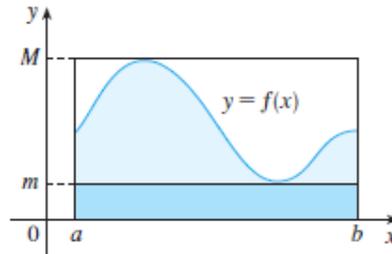


Ilustración 50.- Función con una cota inferior m

Teorema de la evaluación

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es cualquier antiderivada de F , esto es $F' = f$

Demostración: Se tiene $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$

Y por el teorema del valor medio $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x$

Por lo que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Integral Indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Principales integrales indefinidas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

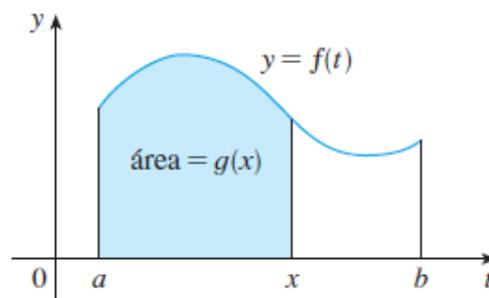
$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Teorema del Cambio Neto

La integral de una rapidez de cambio es el cambio neto: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Teorema Fundamental del Cálculo

Establece una conexión entre el cálculo integral y el diferencial. Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ $a \leq x \leq b$ es una antiderivada de f , es decir $g'(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Por tanto si los límites de integración son distintos de x se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right) = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

Regla de Sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I , entonces $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

Ejemplo: $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$ Haciendo el cambio $u = x^4 + 2 \rightarrow du = 4x^3 dx$ se tiene

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \text{sen } u + C = \frac{1}{4} \text{sen}(x^4 + 2) + C$$

Regla de Sustitución para integrales definidas

Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua en el intervalo $u = g(x)$ entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

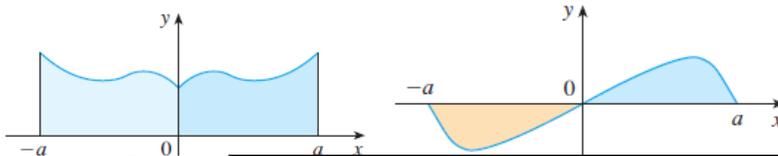
Por ejemplo $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ haciendo el cambio $u = 2x+1 \rightarrow du = 2dx$ y llevando el cambio a los límites de integración $x=0 \rightarrow u=1$ $x=4 \rightarrow u=9 \Rightarrow \int_1^9 \frac{1}{2} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_1^9 u^{\frac{1}{2}} du =$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{1}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{26}{3}$$

Integrales de funciones simétricas

Si f es continua en $[-a, a]$ se cumple:

- Si f es par ($f(-x) = f(x)$) $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$
- Si f es impar ($f(-x) = -f(x)$) $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Integración por partes

La regla del producto expresa que si f y g son funciones derivables se cumple que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Y tomando integrales indefinidas se cumple

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f(x)g'(x)dx \\ &+ \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Haciendo $u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx$
 $v = g(x) \rightarrow dv = g'(x)dx \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$

Por ejemplo obtener $\int x \sin x dx$. Tomamos $f(x) = x$ y $g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$, con lo que la integral $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

Otro ejemplo. $\int \ln x dx$ hacemos $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

Con lo que la integral queda $\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Técnicas adicionales de integración. Trigonométricas

Potencia impar de cos x

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

También se puede resolver haciendo $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \int du - \int u^2 du = u - \frac{u^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Sustituciones trigonométricas

Se aplica a funciones algebraicas de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$. Por ejemplo: Haciendo la sustitución $x = r \sin \theta \Rightarrow dx = r \cos \theta d\theta$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Y como $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ la integral queda $\frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{r^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$

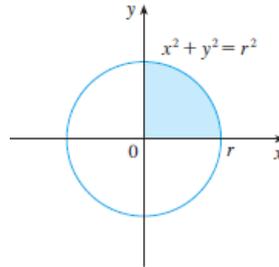


Ilustración 53.- Ilustración del ejemplo

Fracciones Parciales

Integramos funciones racionales (razones entre polinomios) al expresarlos como sumas de fracciones más sencillas, llamadas fracciones parciales que ya sabemos como integrar.

Para calcular $\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1} dx$, para lo cual transformamos la fracción de la siguiente manera: $\frac{5x-4}{2x^2+x-1} = \frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$ Se cumplirá que $5x - 4 = A(2x - 1) + B(x + 1) = (2A + B)x + B - A \Rightarrow \begin{cases} 2A + B = 5 \\ B - A = -4 \end{cases} \Rightarrow A = 3; B = -1$

$$\int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2x-1} \right) dx = 3 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C$$

Nota 1: Si el grado del numerado es mayor que el del denominador, primero se hace la división.

Nota 2: Si un factor lineal es múltiple se añade un término extra.

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Nota 3: Si un factor cuadrático no se descompone en factores lineales se utiliza la fracción $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Integrales Impropias

Si $\int_a^t f(x)dx$ existe para $\forall t \geq a \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ siempre que este límite exista.

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se denominan convergentes si existe el límite y divergentes si no existe.

Definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$

Ejemplo: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty \rightarrow$
Diverge

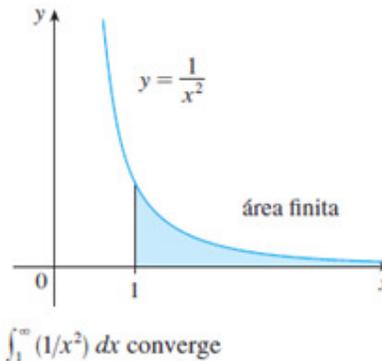


Ilustración 54.- Ejemplo de integral impropia convergente

Estudiar si converge $\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ para los distintos valores de p.

Por el ejemplo anterior sabemos que si $p = 1$ es divergente. Si suponemos que $p \neq 1$ se tiene:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]$$

Si $p > 1$ entonces $p - 1 > 0$, con lo que cuando $t \rightarrow \infty$, $t^{p-1} \rightarrow \infty$, y $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0$. Con lo que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ y la integral converge.

Si $p < 1$ entonces $p - 1 < 0$ y $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow \infty$ y la integral diverge.

Resumiendo $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ es convergente cuando $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Impropias con integrandos discontinuos

Si f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a, b)$ pero tiene asíntota vertical en b . Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje X entre a y b . El área de S comprendida entre a y t es $A(t) = \int_a^t f(x)dx$. Si $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \rightarrow b^-$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

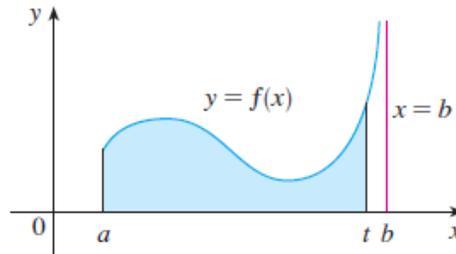


Ilustración 55.- Integral impropia con integrandos discontinuos

Esta definición es útil aún cuando f no es positiva.

Podemos definir además la integral impropia si la discontinuidad está en a y f se define en $(a, b]$ como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$.

La integral impropia se dice convergente si existe el límite y si no es divergente. Si la discontinuidad está en un punto intermedio c , con $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx$$

Ejemplo: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 2^+} [2\sqrt{x-2}]_t^5 = \lim_{t \rightarrow 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}$. En este caso es convergente!

$$\text{Ejemplo: } \int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln(x-1)]_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) = -\infty \rightarrow \text{Diverge}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

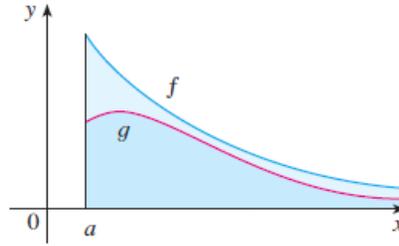


Ilustración 56.- Teorema de la Comparación

Examen Final Julio 2018. Dada la región comprendida entre la gráfica de la función $y = 2x - x^2$ y el eje x . Se pide: Área de dicha región; valor promedio de dicha función sobre el intervalo en que es positiva; volumen que genera dicha región al girar alrededor del eje x .

La función $y = 2x - x^2$ tiene cortes con el eje OX en 0 y 2

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El valor promedio es

$$A = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

Y el volumen engendrado alrededor de OX es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi r^2 = \int_0^2 \pi (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 + x^4 - 4x^3) dx = \pi \left[\frac{4}{3} x^3 + \frac{x^5}{5} - x^4 \right]_0^2 \\ &= \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Examen Final Julio 2018. Calcular, si converge, el valor de la integral $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-x^2}}{-2} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{t^2}} \right] = \frac{1}{2}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70