Tema 1: INTRODUCCION en MM3
L.2. Introducción: ecuaciones principales

Muchos procesos físicos son descritos usando ecuaciones en derivadas parciales cuando parámetro de interés es una función de varios variables.

Por ejemplo temperatura **T=T(x,y,z, t)**

Ecuaciones principales

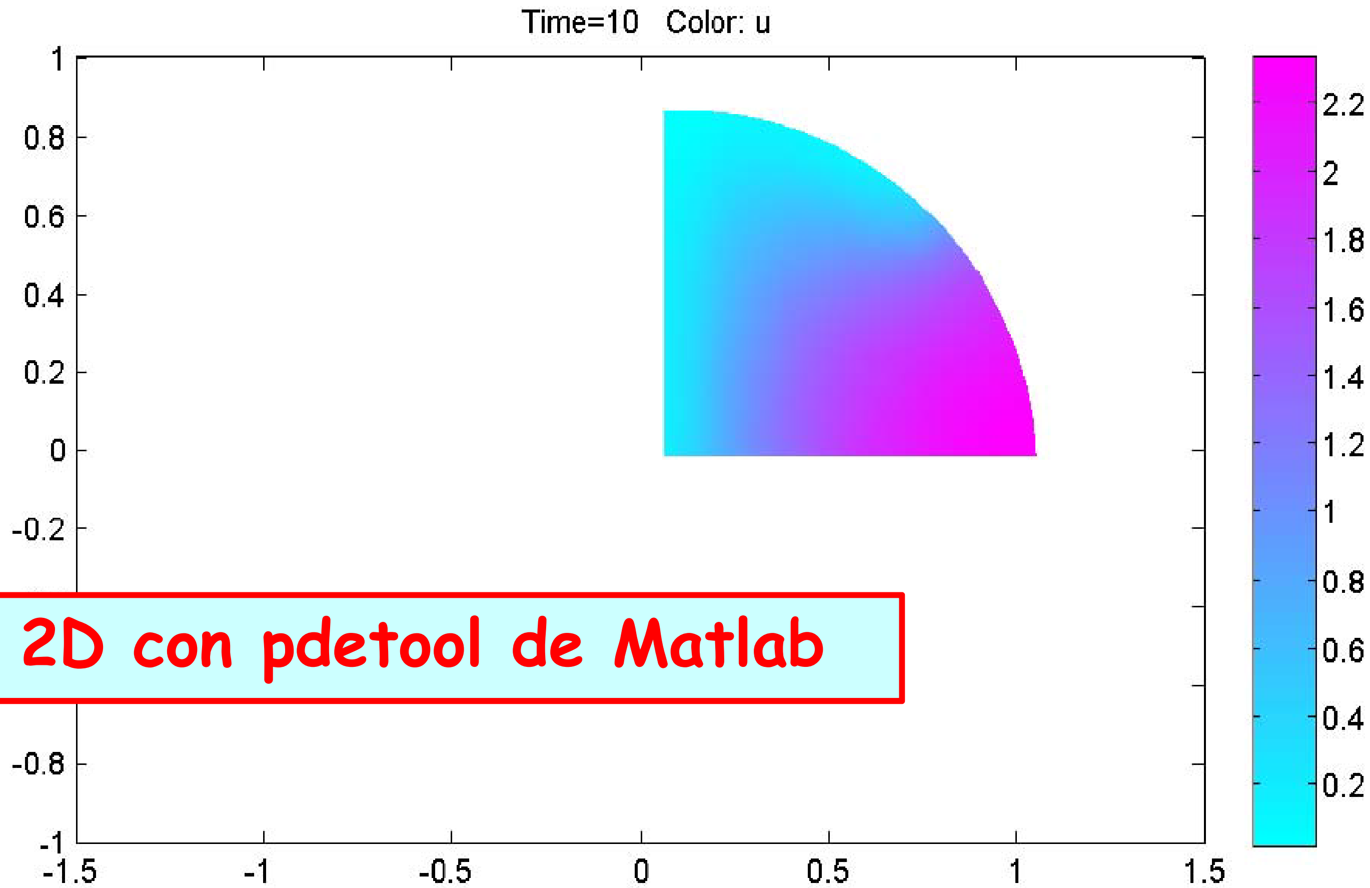
1. Ecuación de Laplace (ejemplo en 3D)

$$\Delta u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III
L.2. Introducción: ecuaciones principales

Ecuaciones principales: Poisson

$$\Delta u = f$$



ejemplo en 2D con pdetool de Matlab

Estas EDP presentan casos particulares de EPD generales de tipo:

$$\mathbf{L}\,[x]\,(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2\, x &= 0, && \text{movimiento armónico simple,} \\ x'' + \gamma\, x' + \omega^2\, x &= f(t), && \text{oscilador lineal amortiguado forzado} \\ x'' + \frac{1}{t}\, x' + \frac{t^2 - n^2}{t^2} x &= 0, && \text{ecuación de Bessel,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{L}\,[x]\,(t) = x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x}$$

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III
Introducción: ecuaciones principales

Linearidad de operador L[x]

$$\mathbf{L}\left[c_1\, x_1 + c_2\, x_2\right] = c_1\, \mathbf{L}\left[x_1\right] + c_2\, \mathbf{L}\left[x_2\right]$$

Principio de superposicion para ecuaciones no-homogeneas

$$\mathbf{L}\left[x\right](t) = x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = f(t)$$

$$\boxed{x(t) \;= x_H(t) + x_p(t)}$$

Solucion de **L[x]=0**

Solucion particular de **L[x]=f**

Ejemplos de otros casos EDP a considerar en curso

2. Ecuación de onda (por ejemplo en 3D)

$$\boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u}$$

Ecuaciones principales
3. Ecuación de conductividad térmica (Fourier / Difusión, ejemplo en 3D)

$$\boxed{u_t = a^2 \Delta u}$$

Resumen de tipos de ecuaciones a tratar en presente curso:

$u_{xx}+u_{yy}=0$ (1)

$u_{tt}=a^2u_{xx}$ (2)

$u_t=a^2u_{xx}$ (3)

Son correspondientemente ecuaciones de tipo

Elíptico (1);

Hiperbólico (2);

Parabólico (3);

Que es la solución de Ecuacion?

En sentido clásico, la solución de Ec. en derivadas parciales es una función que:

(i) posee las derivadas

(ii) que una vez sustituida en la ecuación convienrte ecuación en igualdad ($A \equiv A$)

Por ejemplo,

función $u(x,t)=sen(x)*sen(at)$

es una de soluciones de ecuación

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0$$

En espacio $-\infty < (x,t) < \infty$

La misma ecuación habitualmente tiene muchas soluciones

Ejemplos…

función $u(x,t)=sen(2x)*sen(2at)$

es <u>otra</u> de soluciones de ecuación

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0$$

En espacio $-\infty<x;\ t<\infty$

Otro ejemplo:

función $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$
es una solución general de ecuación

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0$$

con f, g, - funciones arbitrarias
(que poseen segundas derivadas)

Por otro lado,

Función $u=C_1x+C_2$ es solución de ecuación

$$u_{xx}=0$$

Con C_1, C_2, constantes arbitrarias

Para poder elegir una (unas) **solución**(es) **única**(s) **de conjunto de múltiples soluciones**

➔

Hay que introducir unos condiciones adicionales:

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III
L.2. Introducción: ecuaciones principales

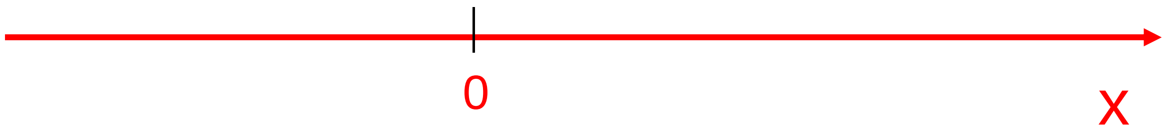
Para procesos no estacionarios investigados en todo espacio:

Necesitamos condiciones iniciales

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x < +\infty) \;\; , t > 0$$

$$u(x,0)=f(x) \;\; ; \; u_t(x,0)=g(x)$$

Es ejemplo de problema uno dimensional (1D):



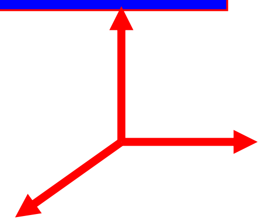
Otro Ejemplo

de problema no estacionario con condiciones iniciales:

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x < +\infty) \;, \; t > 0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

<u>Mas ejemplos</u> de problemas no-estacionarios (3D):



$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x, y, z < +\infty) \;\; , \mathrm{t} > 0$$

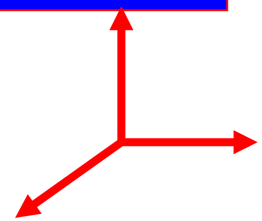
$$\mathrm{u(x,y,z,0)=f(x,y,z)} \;\; ; \mathrm{u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)}$$

Formular el problema…

Estos problemas suelen tener solución única

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III
L.2. Introducción: ecuaciones principales

Mas ejemplos de problemas no-estacionarios (3D):



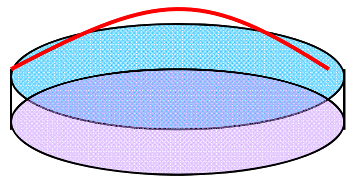
$$u_t = a^2 \Delta u \quad (-\infty < x, y, z < +\infty) \ , \mathrm{t} > 0$$

$$\mathrm{u(x,y,z,0)=f(x,y,z)}$$

Formular el problema…

Estos problemas suelen tener solución única

Para problemas en espacios restringidos llegamos a problema de contorno



Ejemplo: cuerda con extremos fijos:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (0 < x < L) \quad , t > 0$$

$$u(0)=u(L)=0$$

$$u(x,0)=f(x) \;\; ; u_t(x,0)=g(x)$$

Para CC Libre?

Son posibles varios otros tipos de condiciones de contorno
Ejemplo: contorno libre / medio-libre

Ejemplos de problemas de contorno

Ecuación de onda en 3D (u=Δρ-desviacion de la densidad)

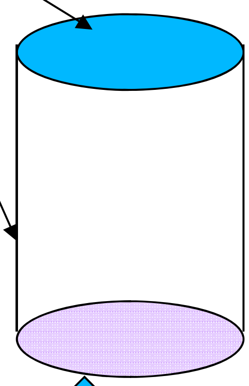
$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

Ec. de onda en el cilindro semi-cerrado

+ CONDICIONES de CONTORNO

$$\frac{du}{dn} = 0$$

En la superficie lateral+superior de cilindro



$$u(x,y,z,\ t=0)=f(x,y,z)\ ;\ u_t(x,y,z,\ t=0)=g(x,y,z)$$

Si la base de cilindro es abierta→condicion de contorno para z=0 es **u(z=0)=0**

Ejemplo:

Propagación de calor en cilindro **1D** de longitud **L**
Se describe usando ecuación de conductividad térmica

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (0 < x < L) \;,\; t > 0$$

Aquí **u(x,t)** es temperatura en punto x en el momento (**t**)

Considerando que temperatura en los extremos se mantiene CERO
Y en instante inicial la distribución de temperatura es φ(x)

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (0 < x < L) \;, \mathrm{t} > 0$$

$$\mathrm{u(0,t)=0;\ u(L,t)=0}$$

$$\mathrm{u(x,0)}=\varphi(\mathrm{x})$$

Además, existen muchos problemas que NO llevan variable temporal

En mayoría de casos son distritos por ecuaciones de tipo elíptico

EJEMPLO: $u_{xx}+u_{yy}=0$

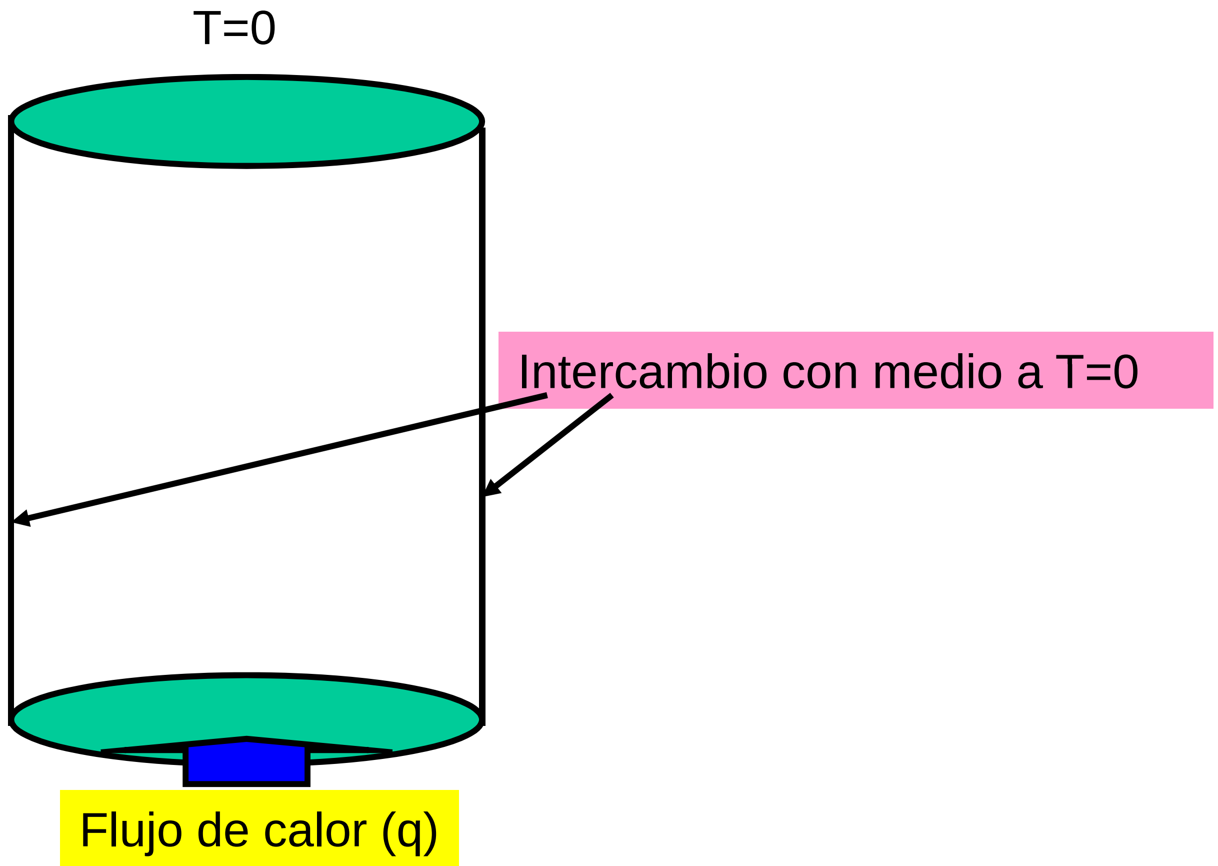
Este tipo de problemas no suelen tener condiciones iniciales y SOLO precisan condiciones de contorno

En general:

$$\Delta u = 0$$

EJEMPLO de reciente examen

Hallar la distribución de la temperatura dentro de un cilindro si por la superficie de base se suministra flujo de calor (**q**). La superficie superior esta a **T=u=0** y la superficie lateral está cambiando calor con el exterior a **T=0** según la Ley de Newton $\mathbf{u_\rho+hu=0}$. El radio del cilindro es igual a **R** y su altura es igual a **L.**



Mas adelante consideraremos en detalles

3 tipos distintos de Condiciones de Contorno (CC) Homogéneas

Tipo 1 (Condiciones de Dirichlet)

Tipo 2 (Condiciones tipo Neumann)

Tipo 3 (Condiciónes de tipo Robin)

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III

L.2. Introducción: ecuaciones principales

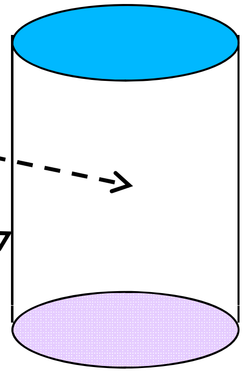
Ejemplo de problema para ecuación de Laplace
con Condiciones de Contorno de <u>1er tipo</u>

Hallar potencial eléctrico estacionario en un espacio restringido (cilindro) si se conoce potencial en la superficie

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

Dentro del cilindro

En la superficie (CC)



$$u = f(x, y, z)$$

Cual sera la solucion para CC triviales?

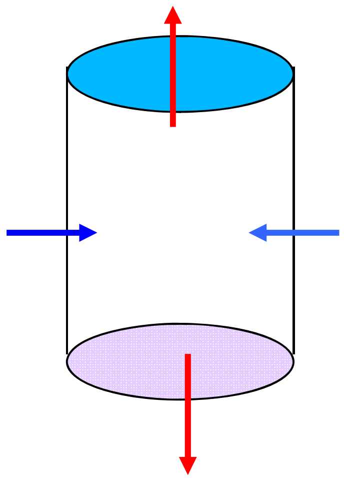
f(x,y,z)=0

Ejemplo de problema para ecuación de Laplace con condiciones de contorno de <u>2do tipo</u>

Hallar temperatura estacionaria en un espacio restringido (cilindro) si se conoce flujo de calor en la superficie

$$\Delta u = 0$$

En el cilindro



$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi$$

Flujo de calor en dirección normal (n) a la superficie

El problema tiene sentido solo si flujo integral de calor por la superficie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0.$$

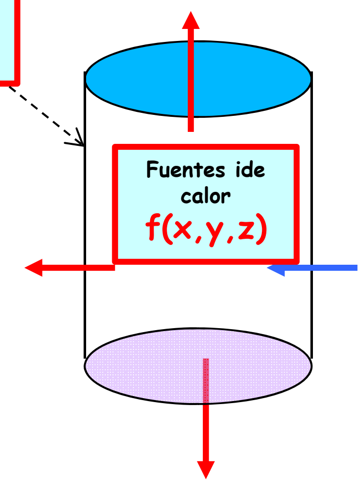
Analógicamente se formulan problemas para ecuación de Poisson

$$\Delta u = f$$

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi \end{cases}$$

Ejemplo para Ec. difusion para un objeto con "fuentes" dentro

Flujo de calor/masa, etc. en la superficie



<u>El problema tiene sentido solo si</u>

$$\int_{\Omega} f\,dx = \oint_{\partial\Omega} \varphi\,ds$$

Ejemplo de problema para ecuación de Laplace con condiciones de contorno de 3-tipo

$$\Delta u = f$$

En el objeto

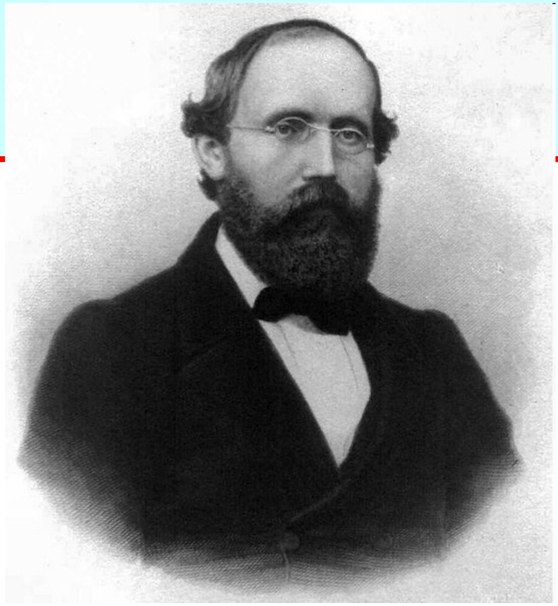
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \varphi$$

Condición de contorno (superficie)

Tiene o no el problema la solución <u>depende de comportamiento</u> de σ, en particular de su signo

. . . partial differential equations are the basis of all physical theorems.

In the theory of sound in gases, liquids and solids, in the investigations of elasticity, in optics, everywhere partial differential equations formulate basic laws of nature which can be checked against experiments.



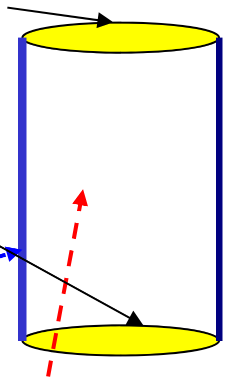
-BERNHARD RIEMANN

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos III

L.2. Introducción: ecuaciones principales

CLASE (aprox 5min): Formular matematicamente problema para buscar temperatura dentro de cilindro (R, h)

Superficies superior y inferior aisladas termicamente (todo el tiempo)



La superficie lateral en contacto con foco termico a T=0 (todo tiempo)

$$u = f(x, y, z)$$

Temperatura de cilindro en el momento t=0