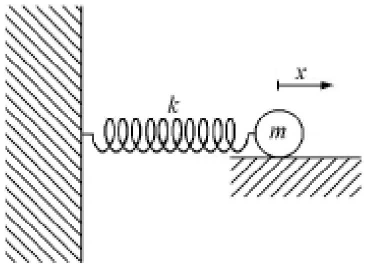
TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

En parte Según Cap.1 Libro Levanuyk+Cano

Antes de tratar aplicación de método Fourier para sistemas continuos
http://www.youtube.com/watch?feature=endscreen&NR=1&v=no7ZPPqtZEg
=> Consideramos sistemas discretos

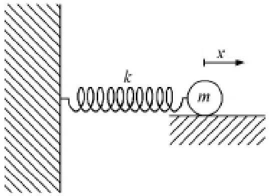
Metodo Fourier (version mas simple) consiste de desarrollo de solucion en funciones harmonicas-
Soluciones de Oscilador Armónico (OA) / OAs acoplados



Buscamos desplazamientos horizontales x(t)

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

x(t) describe movimiento armónico si



$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

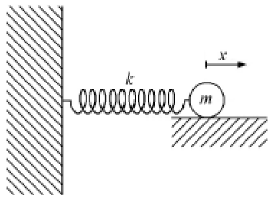
Ec. Diferencial que describe movimiento

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Para muelle ideal y movimiento si rozamiento
F(x)=-kx (k – constante de muelle)



Ley Newton $$m\ddot{x} = -kx$$

asignando $$\omega_0^2 = k/m$$

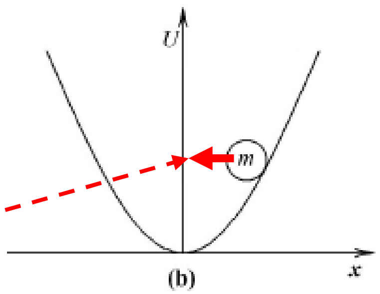
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Nota: Ec. análogos describen movimiento de oscilador en campo gravitatorio

U- potencial de campo gravitatorio

$$U = mgz = mgax^2/2$$

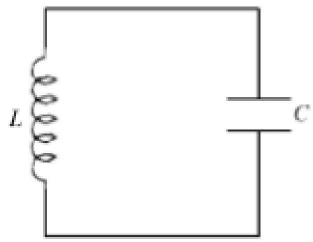


$$F = -mgax$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

-Oscilador electrónico (Capacidad+inductancia)
-(Q- Carga)

$$\boxed{\ddot{Q} + Q/(CL) = 0}$$



Otros tipos de Osciladores armónicos

-Basados en solo cargas eléctricas?
-Dipolos magnéticos?
-Concentración local en gases?
-Calor???

-Se podria desarollar matematicamente solucion para procesos de calor/difusion en series de funciones harmonicas?

Se denomina vibraciones (o oscilaciones) propias a aquellas vibraciones que tienen lugar en ausencia de fuerzas externas.

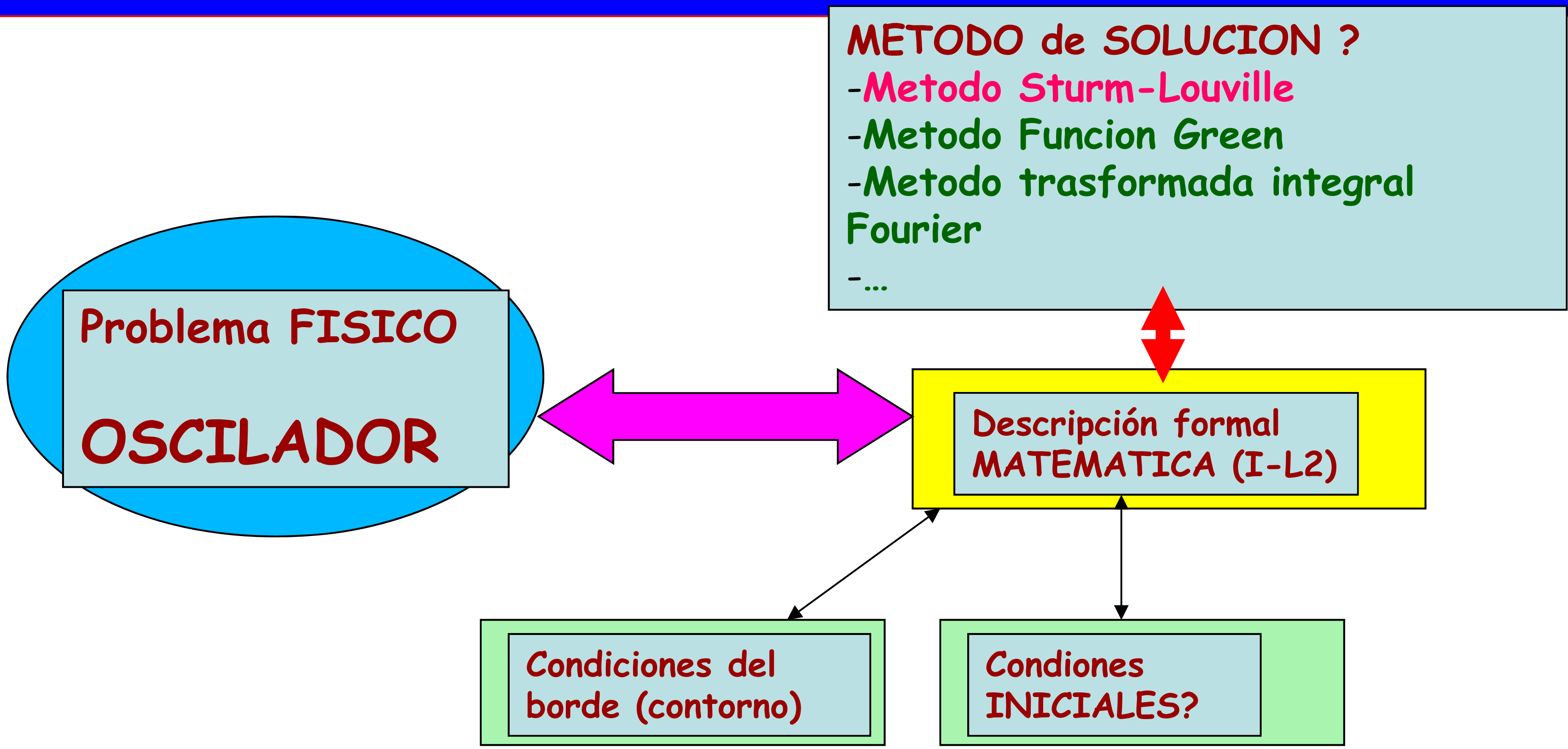
Solución general (OA) es una combinación lineal de dos soluciones particulares linealmente independientes entre si.

Una función (f_3) es linealmente independiente de otras dos (f_1, f_2)

si no se puede expresar como su combinación lineal:

$$f_3 \neq A f_1 + B f_2$$

Tema 1: INTRODUCCION en Métodos Matemáticos en Física
L.1. Introducción: aspectos históricos

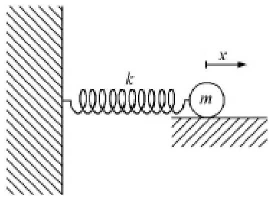


TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

APUNTAR !
Buscamos solución GENERAL de Ec.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



¿ Cual deberia ser ?

Buscando en forma de una función exponencial:

$$\boxed{x \propto e^{at}}$$

$$\boxed{a^2 = -\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{a = \pm i\omega_0}$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Entonces dos funciones linealmente independientes satisfacen a Ec.

$$e^{i\omega_0 t} \qquad\qquad e^{-i\omega_0 t}$$

Solución general es suma (con peso) de todos posibles soluciones linealmente independientes

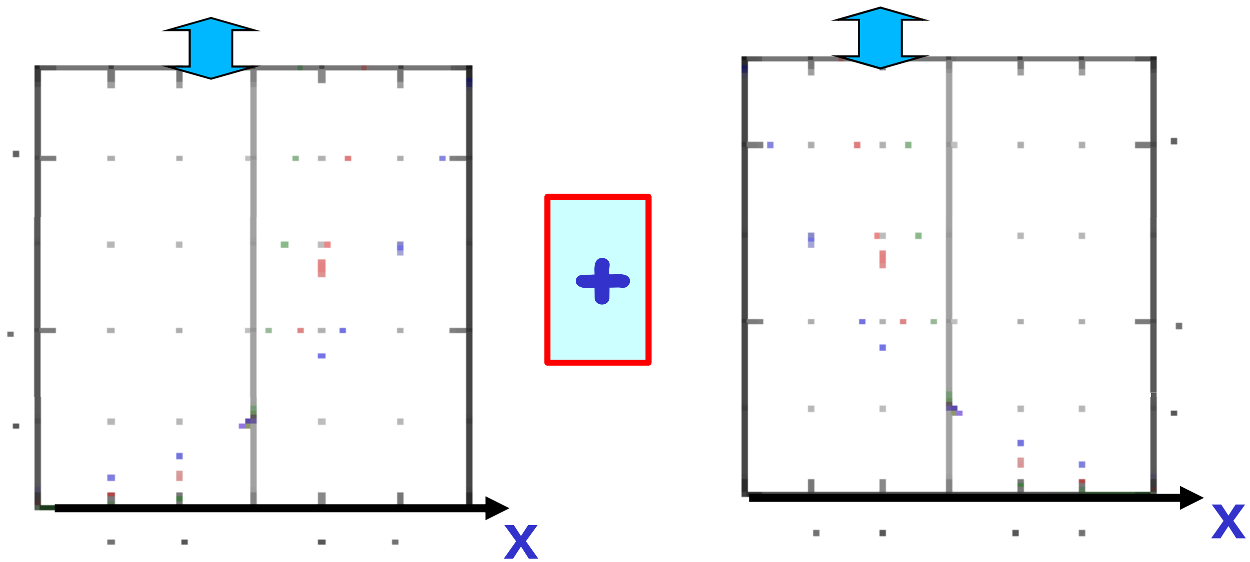
$$x(t)=A\ \exp(+i\omega_0 t)+B\ \exp(-i\omega_0 t)$$

CLASE: Hallar Solución general de Ec. $X'' - \omega_0^2 X = 0$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

CLASE: Hallar Solución general de Ec. $X'' - \omega_0^2 X = 0$

$$X = C_1 \exp(+\omega_0 x) + C_2 \exp(-\omega_0 x)$$

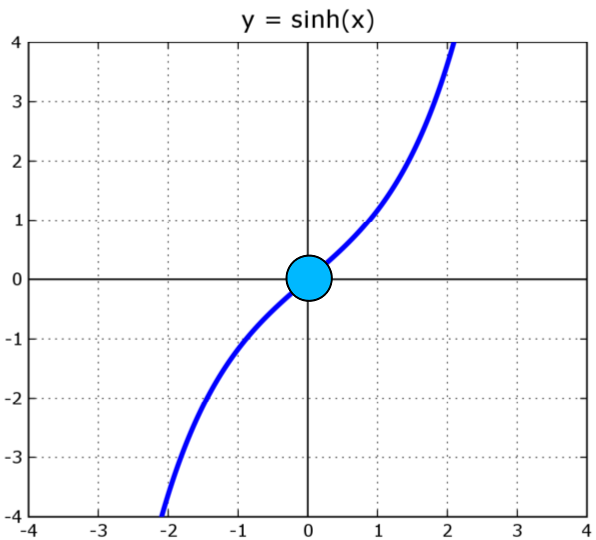


Presentacion alternativa de Solución general de Ec.
$X'' - \omega_0^2 X = 0$

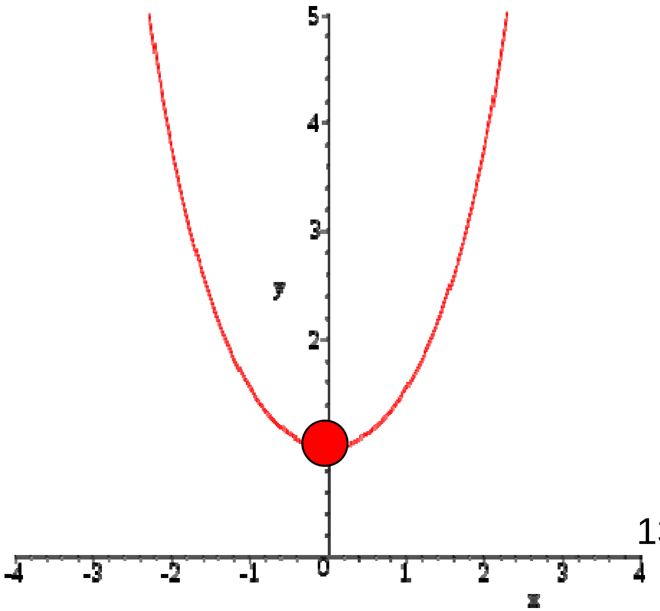
$$X = C_1 \sinh(\omega_0 x) + C_2 \cosh(\omega_0 x)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



+



NOTA

Estas Funciones exponenciales

NO forman conjunto de funciones ortogonales

(autodunciones)

Volvamos analizar solucion de Ec: $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Como solución debe ser real → x*(t)=x(t)

A*exp(-iωt)+B*exp(+iωt)=Aexp(+iωt)+Bexp(-iωt)

=>A*=B; B*=A
→

A=c+id
B=c-id

$$x(t)=(c+id)\exp(+i\omega t)+(c-id)\exp(-i\omega t)=$$

$$=2c[\exp(+i\omega t)+\exp(-i\omega t)]/2+$$

$$+2id[\exp(+i\omega t)-\exp(-i\omega t)]/2$$

$$=2c\mathrm{Cos}(\omega t)-2d\mathrm{Sen}(\omega t)$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Entonces Solución general:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Para mostrar sentido físico reescribamos Solucion así:

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \operatorname{sen} \omega_0 t \right)$$

Como Sen(α+β)=Sen(α)Cos(β)+Cos(α)Sen(β)
➔

Podemos presentar Solucion también así:

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)}$$

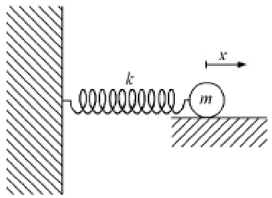
Con

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \mathrm{sen}\,\delta, \qquad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\delta,$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$



ω_0- **frecuencia angular propia**

A- **Amplitud máxima de modo correspondiente**

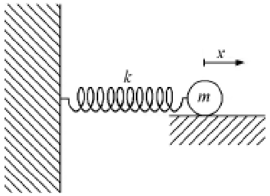
δ- **indica en que estado esta oscilador en momento t=0**

[o cuando $\omega t=2\pi n$ (n- entero)]

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$$

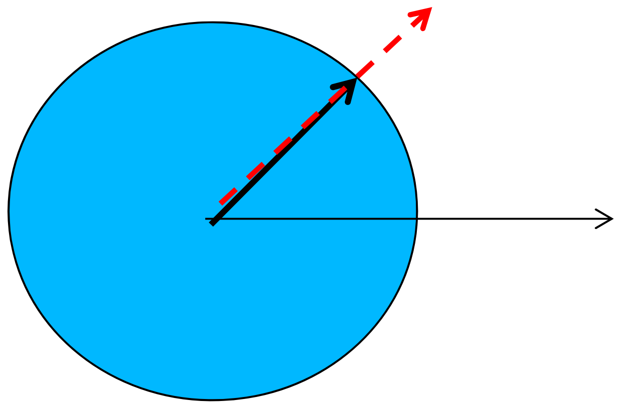


INFO oscilador: Amplitud, Fase +Frecuencia

Problema: Oscilador con condiciones periodicas en 2π

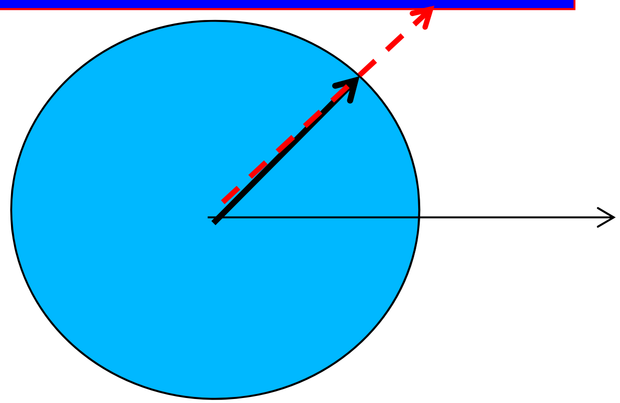
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\lambda^2\Phi=0;$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$



TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos



Usando solucion compleja :

$$\Phi(\varphi) = A\exp(+i\lambda\varphi) + \mathrm{B}\exp(-i\lambda\varphi)$$

$$A\exp(+\mathrm{i}\,\lambda\varphi) + \mathrm{B}\exp(-i\lambda\varphi) = \exp[+i\lambda(\varphi + 2\pi)] + \mathrm{B}\exp[-i\lambda(\varphi + 2\pi)]$$

$\lambda 2\pi = 2\pi n$ (n- numeros eneros)

$\lambda = 0, \pm 1; \pm 2, \pm 3 \ldots$

=> $\Phi(\varphi) = \exp(\mathrm{i}\, n\varphi)$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

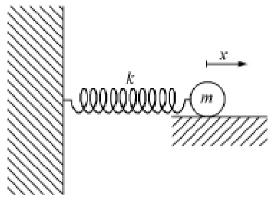
Para resolver Ec. a veces necesitamos **condiciones iniciales (CI)**

Lo que es habitual para sistemas fisicos (mecanicos) es saber desplazamiento y velocidad en determinado momento

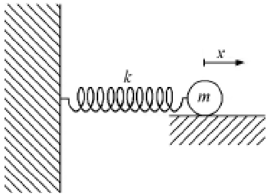
Supongamos siguiente información:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t=0) = x_0, \qquad \dot{x}(t=0) = 0$$



$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$



Con estos condiciones iniciales obtendremos

$$C_1 = x_0 \text{ y } C_2 = 0$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos \omega_0 t}$$

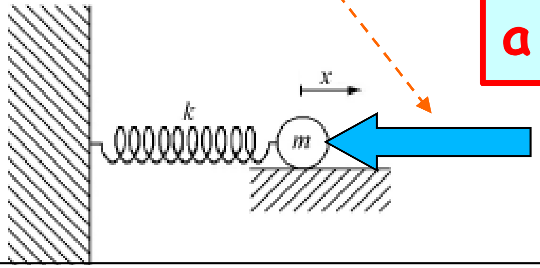
Otra posibilidad: golpe instantáneo en t=0

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

CI1 $x(t=0) = 0$

CI2 $\dot{x}(t=0) = v_0$

SOLUCION
a partir de Sol.General?

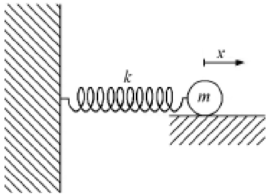


$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

(CL)

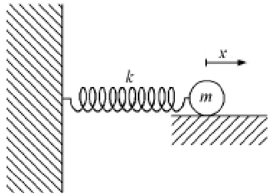
Buscamos solución aplicando CC1 y luego CC2

A la Sol. General



$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

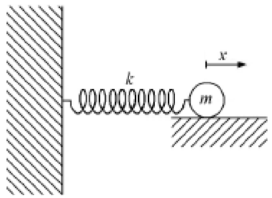
1) Aplicando CI 1 → C_1=0,



2) Aplicando CI2

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

Desplazamiento + velocidad inicial para t=0



$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

$$x(t=0) = x_0,$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0.$$

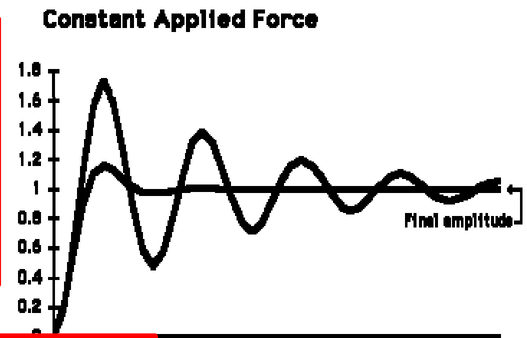
$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t. \quad *$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

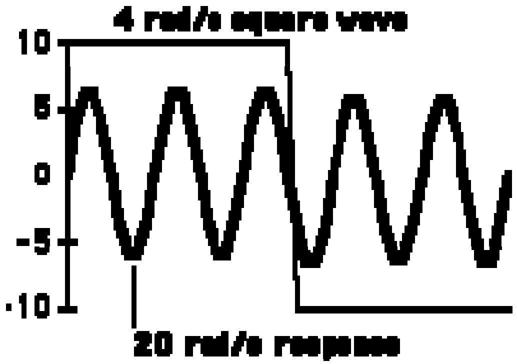
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Hasta ahora siempre obtuvimos la única solución x(t)

←→ solucion transitoria



t=0

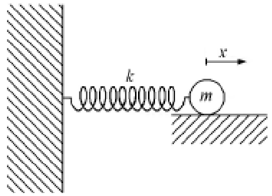


Veamos que ocurre si suponemos <u>otro tipo de condiciones</u>:

Por. Ej. x=0 para t=0

y x=0 para t=T

←→ Solucion estacionaria

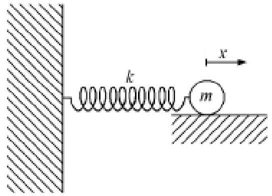


De primera condición (X=0 para t=0) nos da:

$x(t)=C_2 Sen(\omega_0 t)$

De la segunda condición implica:

$$x(t=T) = C_2 \operatorname{sen} \omega_0 T = 0$$



Hay dos posibilidades:

$$C_2 = 0, \qquad \operatorname{sen}\omega_0 T \neq 0;$$

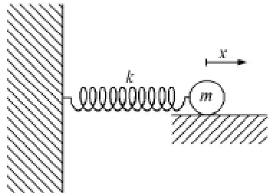
Solución trivial

$$C_2 \neq 0, \qquad \operatorname{sen}\omega_0 T = 0.$$

Segunda opción es valida si:

(n- entero)

$$\omega_0 T = \sqrt{k/m}\, T = n\pi$$



Entonces
Con periodicas tendremos una infinidad de posibles
Soluciones con DISTINTAS frecuencias posibles:

$$\omega_n = n\pi/T \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x(t) = C \,\mathrm{sen}\, \omega_n t}$$

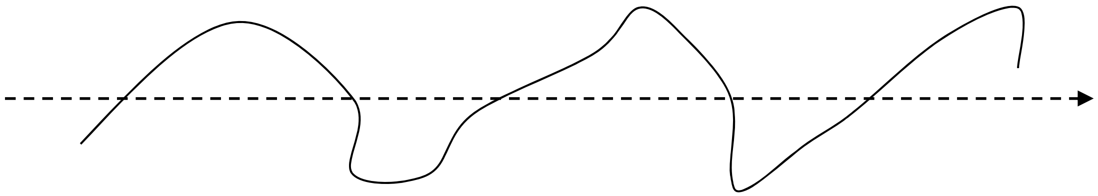
Los llamados "problemas Sturm-Louville" (SL)

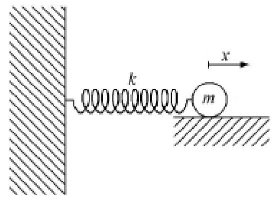
(los que veremos en próximo futuro)

QUE también tendrán una <u>infinidad de soluciones</u>

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos





Mas adelante veremos que cualquier movimiento periódico x(t) con periodo T puede ser descrito por serie Fourier

$$x(t) = \sum_{n} C_n Sen\omega_n t + D_n Cos\omega_n t$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

CASO

mas

TRIVIAL

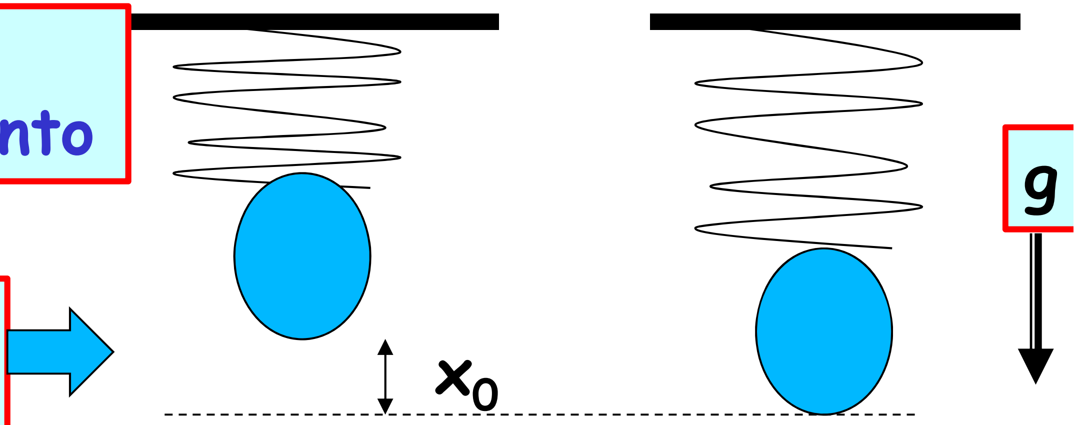
a) Formulación matemática del problema Con C. Contorno (CC) y C. Iniciales (CI)

b) Búsqueda de todos soluciones posibles que cumplan CC

c) Aplicación de CI a la solución general para hallar solución definitiva

VOLVEMOS a OSCILADOR
complicando Ec.de movimiento

Oscilador con muelle en campo gravitatorio



$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\beta x + mg$$

Desplazamiento situacion estatica: $x_0 = mg/\beta$

volvemos a Ec. de Oscilador harmonico cambiando variables

$x' = x - x_0$

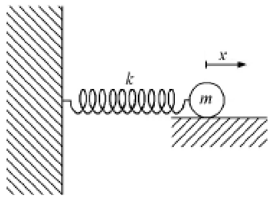
$$m\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \beta x' = 0$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

INFLUENCIA de <u>AMORTIGUAMIENTO</u>

En realidad en la naturaleza siempre
hay fuerzas de amortiguamiento
La relación mas sencilla es cuando rozamiento
Es proporcional a la velocidad



$$F_{\text{vis}} = -\eta \dot{x}.$$

Ecuación resultante:

con

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\boxed{\gamma \equiv \eta/(2m)}$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Vibraciones forzadas armónicamente

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Usaremos principio de superposicion

Solucion= $X_{part}+X_{hom}$

Buscamos solución particular
En forma

$$x_{\text{part}} = x_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Sustituyendo en Ec.
→ x_0

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\boxed{x_{\text{part}}(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t}$$

Solución general

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Vibraciones forzados sin rozamiento

$C_{1,2}$ se determina de CI

En el caso de presencia de rozamiento, a tiempos bastante grandes, influencia de CI se borra ($C_{1,2} \rightarrow 0$)

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Ec. a solucionar

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \operatorname{sen} \omega t$$

como

$$\operatorname{sen} \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$$

Podemos presentar Ec.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

Buscamos Solucion y luego tomamos Im (Solución)

Buscamos

$$x_{\text{part}} = x_0 e^{i\omega t}$$

Al sustituir en Ec. ➔ Hallamos x_0

$$x_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} = \frac{f_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}},$$

Con

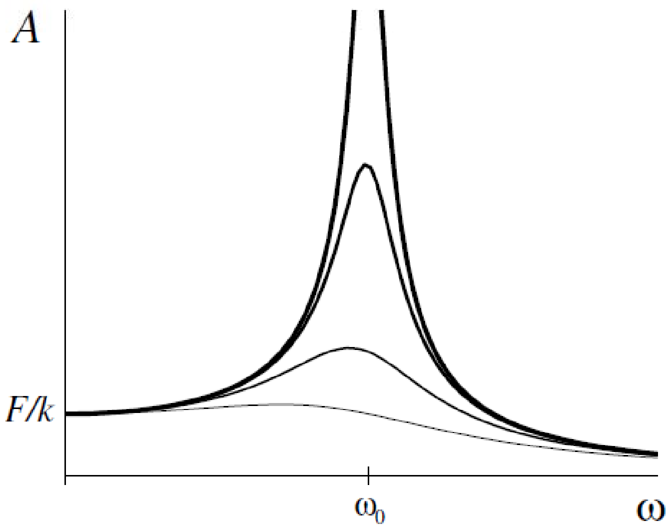
$$\varphi = \arctan[2\gamma\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)]$$

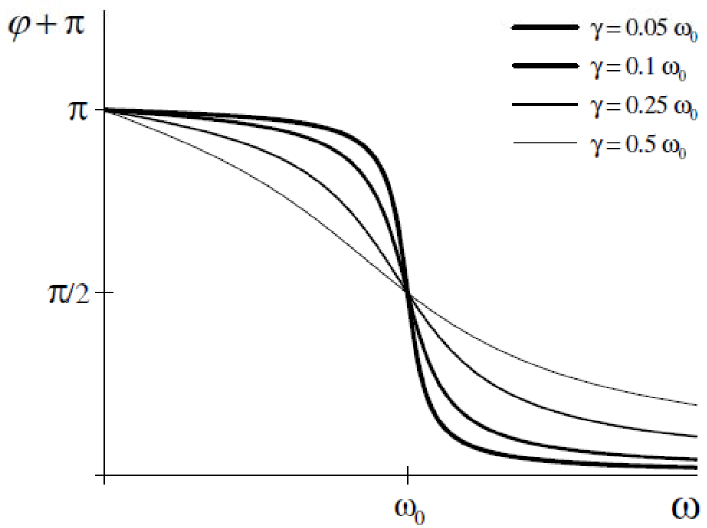
Finalmente

$$x_{\text{part}}(t) = \text{Im}\frac{f_0 e^{(i\omega t+\varphi)}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{f_0 \operatorname{sen}\left(\omega t+\varphi\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Son llamadas curvas de resonancia: amplitud y fase de respuesta de oscilador forzado harmónicamente

http://techtv.mit.edu/videos/769-mit-physics-demo----driven-mechanical-oscillator





TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Solución general en el limite de pequeño amortiguamiento

$$(\omega_0 > \gamma)$$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t}\cos\Omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\Omega_0 t + \frac{f_0\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Son llamadas curvas de resonancia: amplitud y fase de respuesta de oscilador forzado harmónicamente

Para CI x(0)=x`(0)=0 →

$$C_1 + \frac{f_0 \operatorname{sen}(\cancel{\omega t} + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = 0 \rightarrow C_1$$

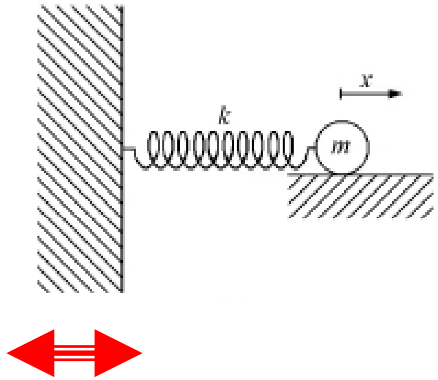
$$\frac{d}{dt}\left(C_1 e^{-\gamma t} \cos \Omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \Omega_0 t + \frac{f_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \right)_{t=0} = 0$$

$\boxed{\rightarrow C_2}$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Resonancia parametrica

http://il.youtube.com/watch?v=kQI3AWpTWhM



Oscilador NO-linear:
espectro vs. frecuencia
se transforma de Lorentiano a hysteretico

$$m\ddot{x} = -(\beta x + \alpha x^2 + \eta x^3)$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Una fuerza externa arbitraria: **función de Green**

Antes relación (*) en Pág. 24 se demostró el resultado de una fuerza instantánea sobre un oscilador harmónico

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

Aprovechamos de este resultado para considerar influencia de una fuerza externa arbitraria

Fuerza por unidad de masa

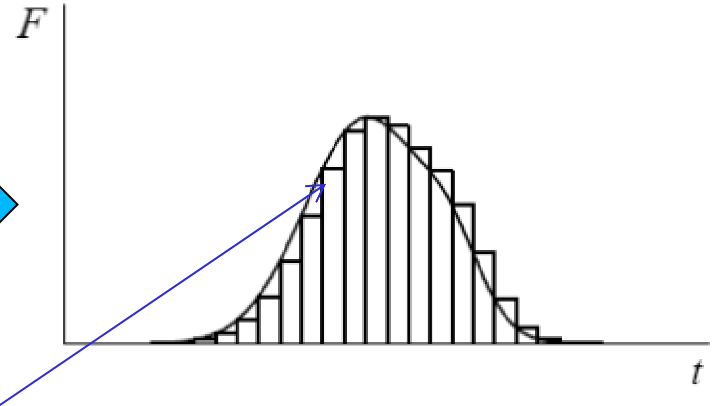
$\boxed{**}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f;$$

$$F(t) = m f(t);$$

Modo de presentar f(t) como suma de golpes instantáneos

$$f(t) \simeq \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(t)$$



$$f_i(t) = \begin{cases} f(t_i), & \text{si } t \in [t_i, t_i + \Delta t_i] \\ 0, & \text{si } t \notin [t_i, t_i + \Delta t_i]. \end{cases}$$

Resultado de uno de golpes en el momento (i)

$$x_i(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t_i)\Delta t_i}{\omega_0}\,\mathrm{sen}[\omega_0(t-t_i)], & \text{si } t > t_i; \\ 0, & \text{si } t < t_i. \end{cases}$$

Resultado de todos golpes (hasta momento t):

$$x(t) = \sum_{t_i=-\infty}^{t} \frac{f(t_i)\Delta t_i}{\omega_0}\,\mathrm{sen}[\omega_0(t-t_i)].$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

En limite $\Delta t_i \longrightarrow 0$

Es CONVOLUCION entre dos funciones !
(se analizara durante excursion)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(t')}{\omega_0} \operatorname{sen}[\omega_0(t - t')]dt'.$$

Sin embargo, esta solución NO es solución general ya que NO contiene dos constantes arbitrarias

[que deberia tener solucion de Eq. de segundo orden].**

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Usaremos un método matemático (llamado de variación de las constantes) que permite obtener soluciones particulares de ecuaciones diferenciales no homogéneas [1.54-1.62 de libro APL].

Buscamos solución de Ecuación en forma con $C_{1,2}(t)$ - incógnitas

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f$$

$$x(t) = C_1(t)e^{i\omega_0 t} + C_2(t)e^{-i\omega_0 t}$$

SOL.

con $C_{1,2}(t)$ - incógnitas

$$\dot{x}(t) = \dot{C}_1 e^{i\omega_0 t} + \dot{C}_2 e^{-i\omega_0 t} + i\omega_0 \left(C_1 e^{i\omega_0 t} - C_2 e^{-i\omega_0 t} \right)$$

Imponemos condición adicional que $C_{1,2}(t)$ cambian muy poco con el tiempo

$$\dot{C}_1 e^{i\omega_0 t} + \dot{C}_2 e^{-i\omega_0 t} = 0 \qquad \boxed{1}$$

Sustituyendo SOL. en Ec. (**) a resolver

$$\dot{C}_1 e^{i\omega_0 t} - \dot{C}_2 e^{-i\omega_0 t} = f/(i\omega_0) \qquad \boxed{2}$$

Sumado dos ultimas ecuaciones (1+2) → obtenemos

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{2i\omega_0} f e^{-i\omega_0 t}$$

Integrando:

$$C_1(t) = C_1(t_0) + \frac{1}{2i\omega_0} \int_{t_0}^{t} f(t') e^{-i\omega_0 t'} dt'$$

Restando (1-2) →

$$\dot{C}_2 = \frac{-1}{2i\omega_0} f e^{i\omega_0 t}$$

Integrando

$$C_2(t) = C_2(t_0) - \frac{1}{2i\omega_0}\int_{t_0}^{t} f(t')e^{i\omega_0 t'}dt'$$

Es la solución general con constantes $C_{1,2}$ dependientes de posición y velocidad de oscilador en instante (t_0)

$$x(t) = C_1(t_0)e^{i\omega_0 t} + C_2(t_0)e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2i\omega_0}\int_{t_0}^{t} f(t')\left[e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}\right] dt'$$

$$= \underbrace{C_1(t_0)e^{i\omega_0 t} + C_2(t_0)e^{-i\omega_0 t}}_{\text{Sol. de Ec. Homogénea}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{f(t')}{\omega_0} \operatorname{sen}\left[\omega_0(t-t')\right] dt'}_{\text{Sol particular de Ec NO Homogénea}}.$$

Sol. de Ec. Homogénea

Sol particular de Ec NO Homogénea

En relación anterior $t_0<t$ ya que posición de oscilador es determinada por fuerzas que actúan antes del momento, no de futuro

Si CI son conocidos solo para $t_0 = -\infty.$

$$\cancel{C_1(t_0)e^{i\omega_0 t} + C_2(t_0)e^{-i\omega_0 t}}$$

→0 debido a fuerzas de rozamiento finitas

La solución se convierte en sol particular Que obtuvimos anteriormente

$$x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(t')}{\omega_0} \operatorname{sen}[\omega_0(t-t')]dt'$$

Las soluciones de los problemas físicos de tipo <u>causa-efecto</u> que involucran ecuaciones lineales se suelen presentar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')G(t,t')dt'.$$

G(t,t´) es denominada función GREEN

En nuestro caso particular

$$G(t,t') = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}[\omega_0(t-t')], & \mathrm{si}\ t' < t. \\ 0, & \mathrm{si}\ t' > t. \end{cases}$$

Es la solución de siguiente Ec.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t - t').$$

La condicion de velocidad inicial x´(0)=v_0
se puede presentar como "fuerza" en Ec, no-homogenea

$$f = v_0 \delta(t - t_0)$$

Entonces el movimiento de Oscilador sera descrito por función Green multiplicado por v_0

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')G(t,t')dt' = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t'-t_0)G(t,t')dt' = v_0 G(t,t_0).$$

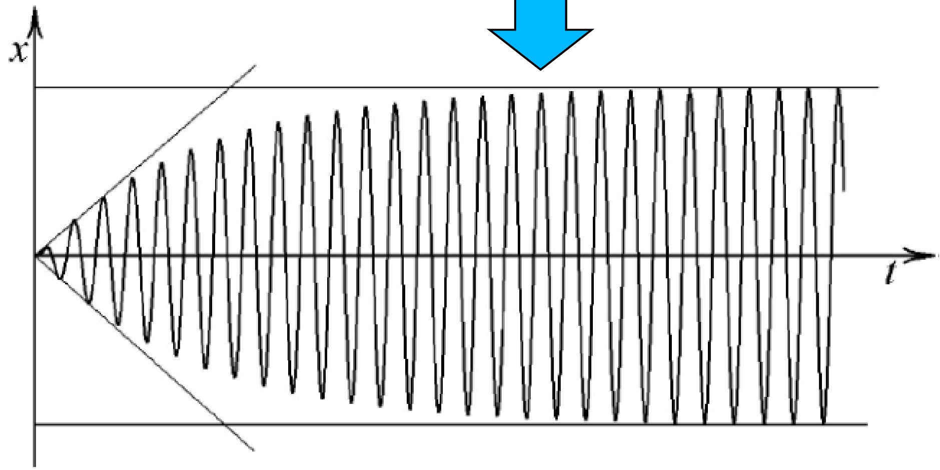
Solución para un oscilador inicialmente en reposo ($t<0$) bajo una fuerza periódica con frecuencia de resonancia
$f=f_0 \mathrm{Sen}(\omega_0 t)$ [$t>0$]

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = f.$$

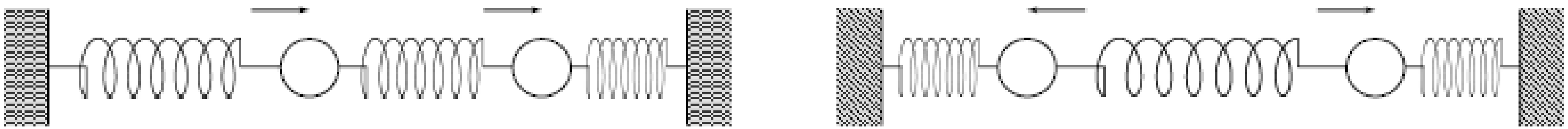
$$\begin{aligned} x(t) =& f_0 \int_0^\infty \operatorname{sen}(\omega_0 t')G(t,t')dt' = \frac{f_0}{\omega_0}\int_0^t \operatorname{sen}(\omega_0 t')\operatorname{sen}[\omega_0(t-t')]dt' \\ =& \frac{f_0}{2\omega_0}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0} - t\cos\omega_0 t\right). \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f,$$

Influencia de amortiguamiento



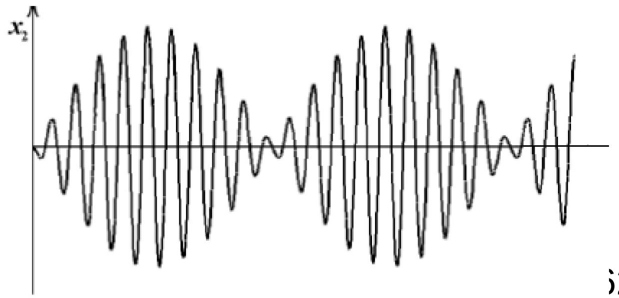
Osciladores Armónicos (OA) acoplados



DEMO_ Osciladores magnéticos acoplados

http://www.youtube.com/watch?v=XOxDK74DRJg

Desplazamientos intermitentes



Tratamos ejemplo de 2 OA acoplados

$x_{1,2}$ son desplazamientos de cada una de masas (1,2)

$$m\ddot{x}_1 = F_1 + F_c = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = F_2 + F_c = -kx_2 + k(x_1 - x_2)$$

F_c- fuerza del muelle CENTRAL

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{aligned}}$$

Buscamos oscilaciones harmónicas para cada masa

$$x_1(t) = C_1 T(t), \qquad x_2(t) = C_2 T(t).$$

$$T(t) = \exp(i\omega t)$$

Sustituyendo

$$mC_1\ddot{T}(t) + k(2C_1 - C_2)T(t) = 0$$
$$mC_2\ddot{T}(t) + k(2C_2 - C_1)T(t) = 0.$$

Como dichas soluciones tienes que ser mismos y Entonces soluciones del mismo tipo de ecuaciones, presentamos:

$$\ddot{T}(t) + \frac{k}{m}\frac{2C_1 - C_2}{C1}T(t) = 0,$$
$$\ddot{T}(t) + \frac{k}{m}\frac{2C_2 - C_1}{C_2}T(t) = 0,$$

Y imponemos (se trata de la misma ecuacion)

$$\frac{2C_1 - C_2}{C_1} = \frac{2C_2 - C_1}{C_2}.$$

Entonces Condiciones para tener soluciones no triviales:

$$C_1 = C_2, \qquad \text{o} \qquad C_1 = -C_2$$

Frecuencias correspondientes:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \qquad \omega_2 = \sqrt{3k/m},$$

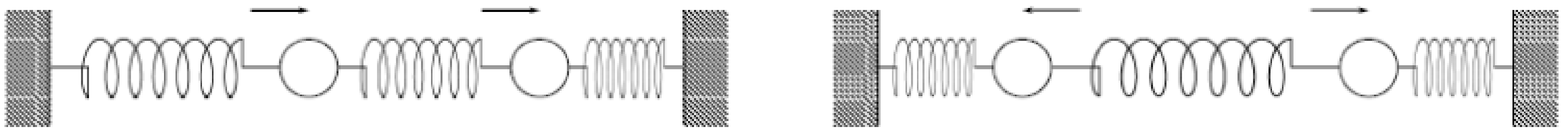
Son modos normales de osciladores acoplados

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

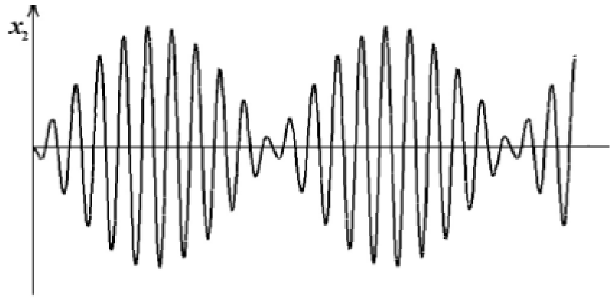
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Movimiento general de las masas

$$x_1(t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) + B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \delta_2)\,,$$
$$x_2(t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta_1) - B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \delta_2)\,.$$



Se presenta como suma de movimientos harmónicos simples



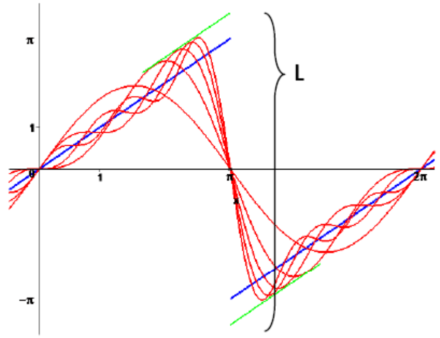
Oscilaciones de tres partículas unidas por muelles elásticos http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/oscilaciones/:

TEMA 1 Métodos Matemáticos III

L3. Oscilaciones en sistemas discretos

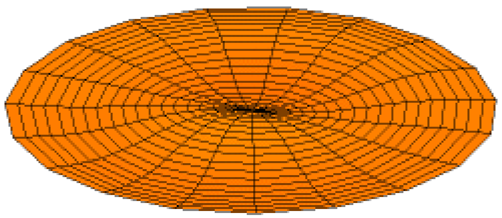
Analógicamente problema de N osciladores acoplados

$$x_n(t) = \sum_{i=1=>N} A_i f_i(n) Sen(\omega_i t + \varphi_i)$$



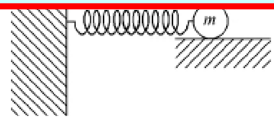
f_i ➔ función que describe amplitud de modo (i) en sitio (n)

De modo similar en este curso presentaremos soluciones complejas en forma de sumatorio por todos modos sencillos (modos normales) que son funciones periódicas harmónicas



TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

INFLUENCIA de AMORTIGUAMIENTO:
CASO PRACTICADO en HOJA 1.1



En realidad en la naturaleza siempre
hay fuerzas de amortiguamiento
La relación mas sencilla es cuando rozamiento
Es proporcional a la velocidad

$$F_{\mathrm{vis}} = -\eta\dot{x}.$$

Ecuación resultante:

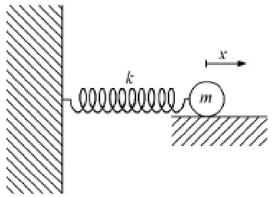
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

con

$$\boxed{\gamma \equiv \eta/(2m)}$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos III
L3. Oscilaciones en sistemas discretos

Buscamos desplazamiento horizontales x(t)



$$x = Ce^{at}$$

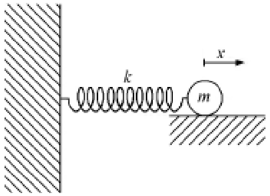
Sustituyendo en Ec. de movimiento:

$$a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0.$$

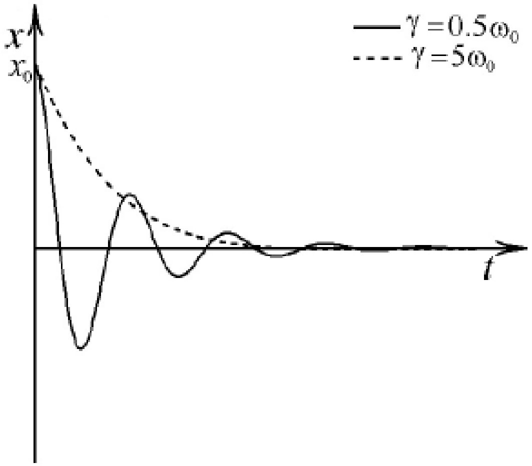
Obtenemos:

$$\boxed{a_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\Omega_0}$$

si $\omega_0^2 > \gamma^2$



Solución para (a) son números complejos

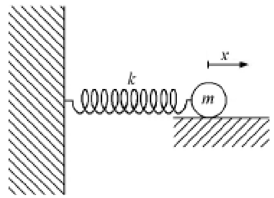


Solución general será

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \Omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \Omega_0 t = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen} (\Omega_0 t + \delta)$$

Vibraciones en x(t) desaparecen si aumentamos la viscosidad

$$\omega_0^2 < \gamma^2$$

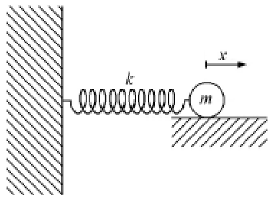


$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_+ t} + C_2 e^{-\gamma_- t}$$

$$\gamma_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Relajador

Cuando $\gamma \gg \omega_0$



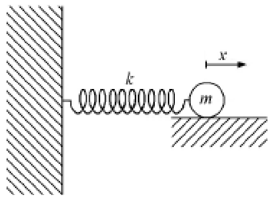
para $t > \gamma_+^{-1}$

$$x(t) = C_2 e^{-\gamma_- t}$$

Con $\gamma_- \simeq \omega_0^2/(2\gamma) = k/\eta.$

movimiento NO depende de masa!!!

Es porque en este limite Ec. para x(t) es:



Ec. De UN RELAJADOR:

$$\eta\dot{x} + kx = 0$$

Vibraciones bajo la acción de fuerzas externas:
1. Fuerza constante (sin amortiguamiento)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0$$

Debemos resolver una ecuación no homogénea.

Su solución general es la suma de la solución de la ecuación homogénea +
+una solución particular de la ecuación completa ($x=f_0/\omega_0^2$)

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

Supongamos siguientes CI (Condiciones Iniciales):

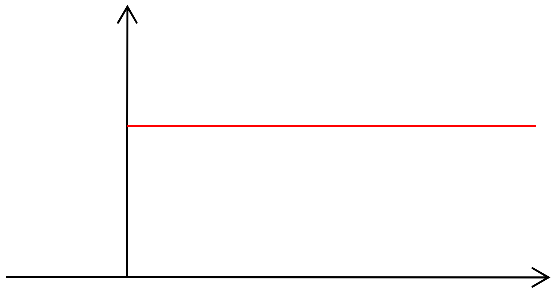
Oscilador se encuentra en reposo en t=0 →

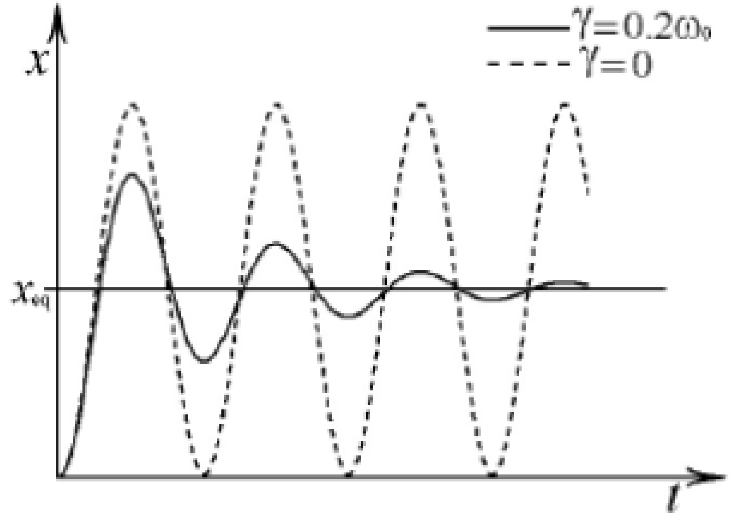
$$C_1 = -f_0\omega_0^{-2} \text{ y } C_2 = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}\left(1 - \cos \omega_0 t\right)$$

Fuerza y desviación vs. Tiempo:





Suponiendo presencia de pequeño rozamiento:

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \omega_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t + C_2 e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$