TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

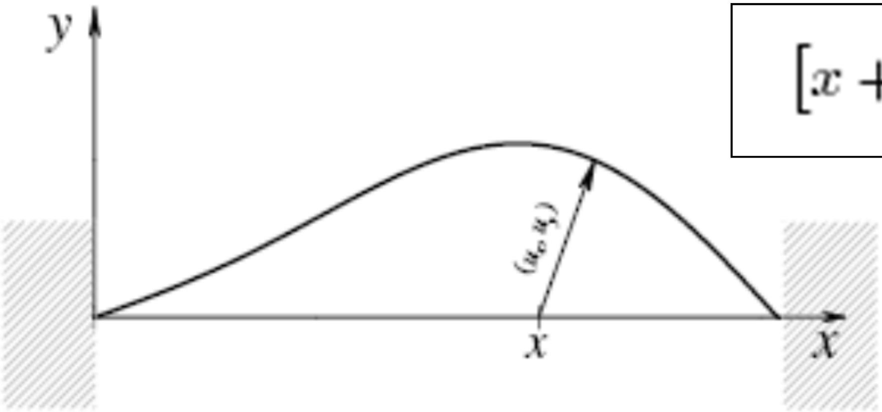
L4A. Método Fourier: Oscilaciones transversales de una Cuerda

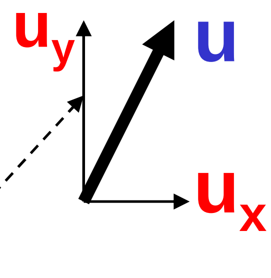
En parte Según Cap.2 Libro Levanuyk, p.43-71

Tratamos pequeños desplazamientos u(x,t) de cuerda en dirección transversal
Movimientos solo en plano x, u(x,t)

$$u_x \ll u_y$$

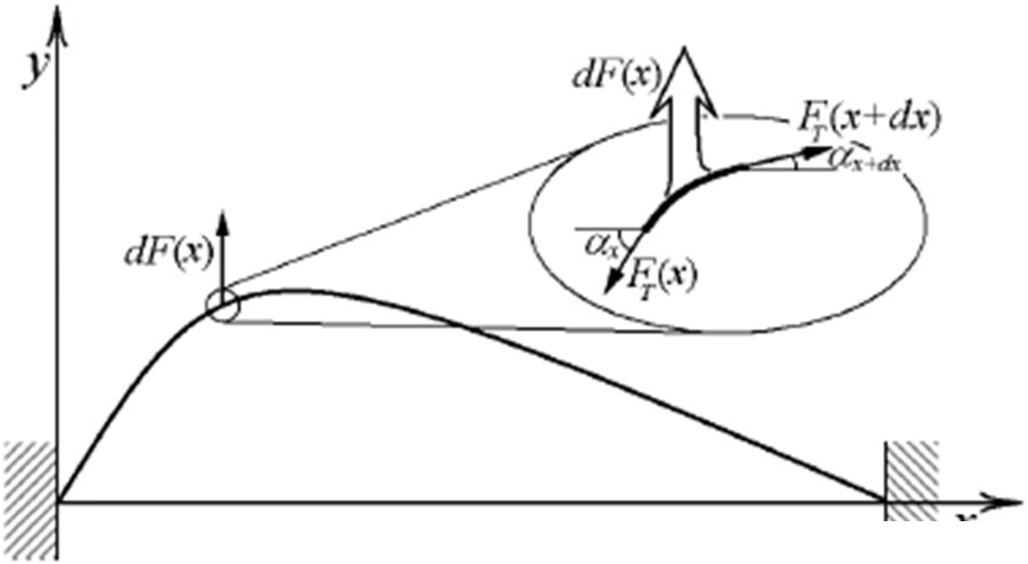
$$[x + u_x(x),\ \ u_y(x)] \simeq [x,\ \ u_y(x)]\,.$$





Solo buscamos
dispalzamentos verticales en plano $u_y(x,t)=u(x,t)$

Sumando efecto de tensiones T(x), T(x+dx) mas fuerzas externas (f) [actuan sobre elemento dx]



$$T\left(\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x+dx}-\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x}\right)+f(x)dx=0$$

$$\boxed{T\frac{d^2u(x)}{dx^2}=-f(x).}$$

Detalles: Cap.2.1.3 APL

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Ecuación de las oscilaciones transversales (pequeñas) de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} f(x,t),$$

$$c^2 = T/\rho$$

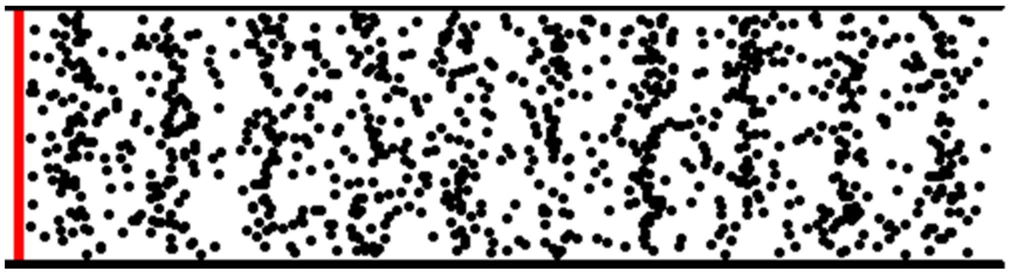
En general la densidad de fuerzas externas f(x,t) puede cambiar a o largo de la cuerda

Ver Movies explicando varios tipos de ondas

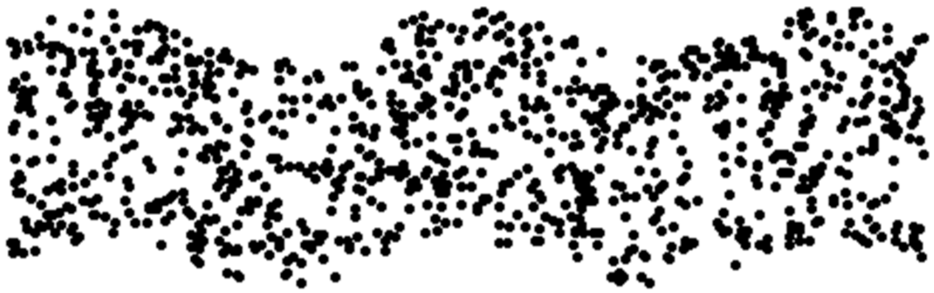
http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/waves-intro/waves-intro.html

http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html
http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/wave-x-t/wave-x-t.html

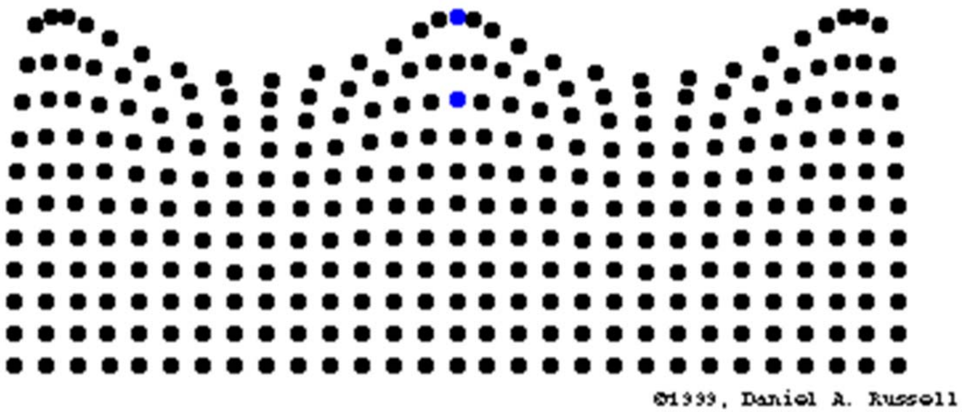
Ondas longitudinales



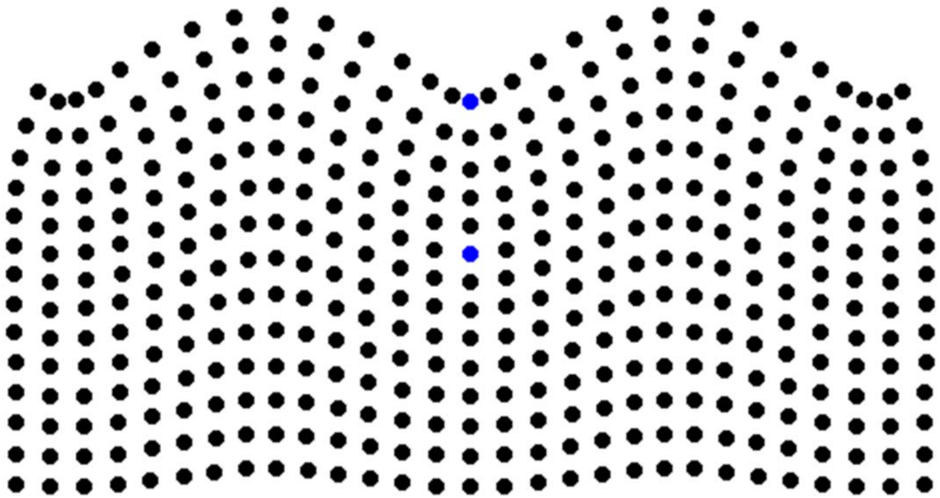
Ondas transversales



Ondas en agua (liquido) : transversales+longitudinales
Puntos azules mueven en circulos – direccion RELOJ



Ondas Rayleigh (solido): transversales+longitudinales
Puntos azules cerca de superficie mueven en elipses–CONTRA-RELOJ
Puntos mas profundos: en elipses direccion -RELOJ



Vibraciones propias de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad c^2 = T/\rho$$

Esta ecuación se denomina como ECUACION de ONDA (Ecuación tipo HIPERBOLICO)

Condiciones de contorno (puesto que los extremos son fijos)

$$\boxed{u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0.}$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Como hemos visto en capitulo anterior, los movimientos complicados (osciladores acoplados) pueden ser asociados con modos normales de vibración del sistema.

Veamos si en el caso de la cuerda es posible obtener resultados análogos.

Veamos si existen movimientos transversales LIBRES (i.e. con f=0) de la cuerda en los que cierto perfil de desplazamientos X se conserva.

Es decir, movimientos descritos por una función de la forma:
(T- función solo del tiempo)

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

1. Sustituir en EDP (homog.)
2. Separar variables

Para que esta función cumpla la ecuación de movimiento de la cuerda, esto es la ecuación de onda:

$$\boxed{X(x)\ddot{T}(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0}$$

Dividiendo por X*T y agrupando:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad =?$$

Como cada de 2 partes es función de distintas variables (x ; t)
Esta igualdad solo tiene sentido si:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. = \lambda$$

Signo de λ
se elige para futura conveniencia

$$\ddot{T}(t) + c^2 \lambda T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Las soluciones serán o de tipo exponencial ($\lambda \neq 0$) o lineales ($\lambda = 0$)

Para cumplir condiciones de contorno para todos modos en todos momentos del tiempo, buscamos aquellos que satisfacen a:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

A este tipo de problemas (que resultan en "autofunciones ortoganales") se les denomina problemas de Sturm-Liouville

Mas adelante trataremos características mas generales de estos problemas

NOTA 1
Si $\lambda<0$, la solución general se escribe de manera

$$X(x) = C_1 \operatorname{senh} kx + C_2 \cosh kx.$$

$$\boxed{k = \sqrt{|\lambda|}\,;}$$

Para cumplir condiciones de contorno:

$$X(0) = C_2 = 0,$$
$$X(L) = C_1 \operatorname{senh} kL = 0$$

C_1=0 → Solo tendremos **solución trivial**

NOTA 2
Si λ=0, la solución general se escribe de manera

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

$$X(0) = C_2 = 0,$$
$$X(L) = C_1 L = 0.$$

También tendremos **solución trivial**

CLASE

Vamos hallar TODOS soluciones posibles del problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

si $\lambda > 0$

NOTA 3
Solo si $\lambda > 0$, tendemos soluciones tipo onda
La solución general se escribe de manera

$$\boxed{X(x) = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx.}$$

$$k = \sqrt{\lambda}.$$

$$X(0) = C_2 = 0,$$
$$X(L) = C_1 \operatorname{sen} kL = 0.$$

Tendremos soluciones no-triviales para

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Tendremos conjunto de autovalores

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi/L)^2$$

Y conjunto de auto funciones que forman el conjunto de soluciones no triviales del problema de Sturm-Liouville

$$X_n(x) = C \operatorname{sen} k_n x$$

NOTA 4

El subconjunto de soluciones que se obtiene con n < 0 no es esencialmente distinto del que se obtiene con n > 0:

$$\lambda_n = \lambda_{-n} \text{ y } X_n = -X_{-n}.$$

Dicho de otro modo, con n > 0 se obtienen todas las funciones asociadas con un determinado valor de λ

Entonces se ve que el conjunto de movimientos de la cuerda en los que se conservan determinados perfiles de desplazamiento es un conjunto de oscilaciones armónicas (λ_n > 0) de tipo:

$$\ddot{T}(t) + c^2\lambda T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

$$u_n(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \delta)\,\mathrm{sen}\,k_n x$$

A, δ, son constantes arbitrarias,
Frecuencias angulares (frecuencias propias) de estas oscilaciones ω_n son:

$$\omega_n = ck_n.$$

k_n son números de onda

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Formula D`Alembert (mas adelante)

representa 2 soluciones
(ondas propagantes) que habitualmente se propagan en medios infinitos en direcciones opuestas

En medios restringidos soluciones son ondas estacionarias.

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Necesitamos buscar vibraciones propias de una cuerda (FIJA en AMBOS EXTREMOS) como superposición de oscilaciones armónicas

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} k_n x;$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Supongamos condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} k_n x = \phi(x), \qquad \boxed{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \operatorname{sen} k_n x = \psi(x). \qquad \boxed{2}$$

Multipliquemos la primera ecuación (1) por la función por $\operatorname{sen} k_m x$

Y integraremos entre 0➔L

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L dx \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_m x = \int_0^L dx \phi(x) \operatorname{sen} k_m x .$$

$$\int_0^L dx \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_m x = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left\{ \cos\left[(k_n - k_m)x\right] - \cos\left[(k_n + k_m)x\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\left[(k_n - k_m)L\right]}{k_n - k_m} = \frac{L}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left[(n-m)\pi\right]}{n-m} .$$

$$\frac{L}{2\pi}\frac{\text{sen}\left[(n-m)\pi\right]}{n-m}$$

= L/2 (n=m)

= 0 (n≠m)

$$\frac{L}{2\pi}\frac{\text{sen}\left[(n-m)\pi\right]}{n-m}$$

=L/2*δ_{nm}

función de DELTA de Krönicker

Entonces:

$$(A_n =)\ A_m = \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\phi(x)\,\mathrm{sen}\,k_m x.$$

CLASE (Individualmente o colaborando):

Sin mirar libro !

B_n?

Analogicamente

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L dx\psi(x)\,\mathrm{sen}\,k_n x..$$

NOTA 1: para la solución del problema no-estacionaria usando método se separación de variables es (como realizada arriba) importante
presencia de condiciones del contorno 1er, 2-do o 3-er tipo homogéneas

En el caso contrario opcion es **realizar cambios para llegar a valores de contorno de tipo cero**

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Problema EDP con contornos no-homegeneos

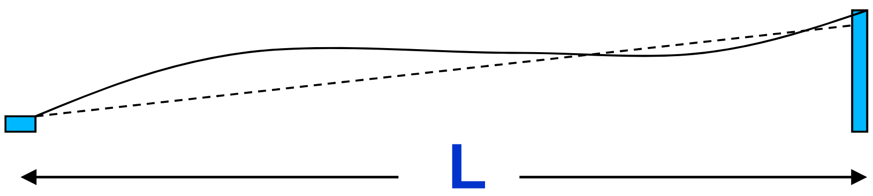
realizar cambios en funcion a resolver
$u(x,y,z,t)=v(x,y,x,t)+f(x,y,z,t)$
para llegar CC homogeneos (tipos 1-3)

Sustituir expresion para $u(x,y,z,t)$ en EDP
y llegar a CC homogeneos para $v(v,y,z,t)$
+
nueva EDP para $v(x,y,z,t)$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

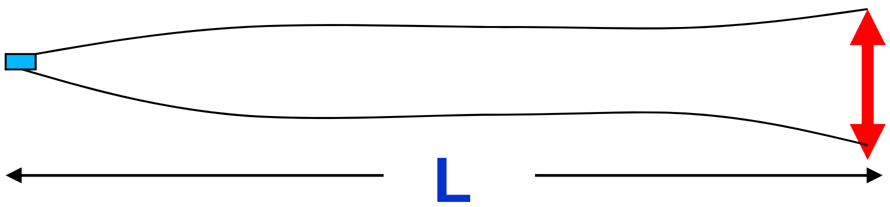
CLASE Realizar cambios de variables para llegar a Ec. diferencial con contornos homogeneos: a) Cambio de variable b) Ec. Diferencial y Cond. contornos para nueva variable

1. Oscilaciones de cuerda con extremos a distinta altura (1)



h=Const

2. Cuerda con un extremo izquierdo fijo; otro variando posicion

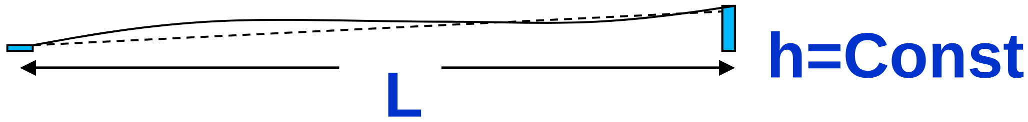


a) $h=h_o \exp(-t)$

b) $h=h_o \operatorname{sen} \omega t$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

1. Oscilaciones de cuerda con extremos a distinta altura



$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{h}{L}x$$

$$-------------$$

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$ ....Ec. homogenea

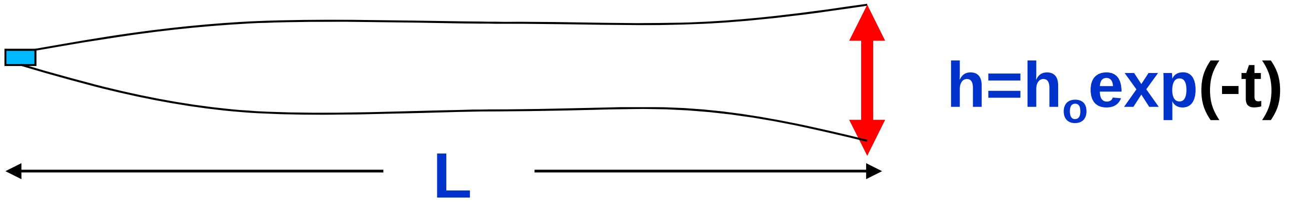
$$v(0,t) = v(L,t) = 0$$ ...CC homogeneos

$$-------------$$

$$u(0,t) = v(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = h$$

2a. Cuerda con un extremo fijo y otro despazado exponencialmente



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Cambio de variable $u(x,t) = v(x,t) + \frac{h_0}{L} x \exp(-t)$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

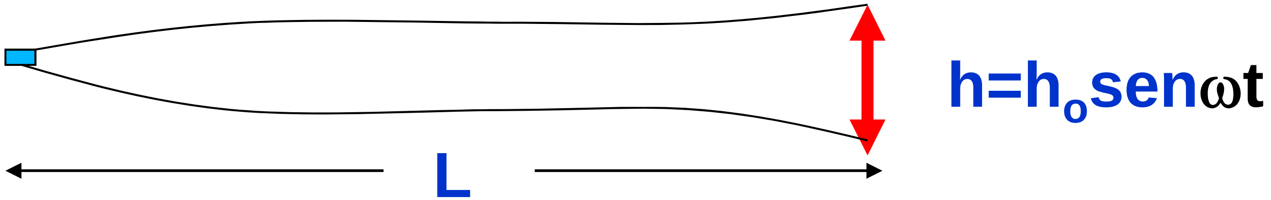
$v_{tt} - c^2 v_{xx} = -\frac{h_0}{L} x \exp(-t)$ .... Ec. no homogenea

$v(0,t) = v(L,t) = 0$ ....CC homogeneos

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$u(0,t) = 0; \quad u(L,t) = h_0 \exp(-t)$

2b. Cuerda con un extremo fijo y otro oscilado periódicamente



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$Cambio \text{ de variable } u(x,t) = v(x,t) + \frac{h_0}{L} x \sin(\omega t)$$

$$-------------$$

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = \omega^2 \frac{h_0}{L} x \sin(\omega t) \quad \text{............ Ec. no homogenea}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \qquad \text{.........CC homogeneos}$$

$$-------------$$

$$u(0,t) = 0; \quad u(L,t) = h_0 \sin(\omega t)$$

NOTA 2: Suponemos que es necesario solucionar siguiente problema (Ec. Onda nohomogenea)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Según principio de superposición (sistemas lineales)

http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_superposici%C3%B3n

Podemos buscar la solución con superposición de soluciones de problemas (I) y (II)

$$\text{I)}\quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \end{cases}$$

PROBL. u_1

$$u = u_1 + u_2$$

$$\text{II)}\quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

PROBL. u_2

Métodos Matemáticos en Física
L.3. Método Fourier: Cuerda

Miercoles 24/09:

2 horas seguidas : Termo+MM3 =2MM3

Parte de segunda hora: micro-evaluacion

Traer LIBROS de INTEGRALES / Wolfram Matematica

NOTA 3: para la solución de ecuación no-homogénea de condiciones del contorno tipo cero (homogéneas)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

En muchos casos

se puede buscar la solución usando método de desarrollo por Funciones propias (Autofunciones)

Por ejemplo, en caso anterior:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) sen(\frac{\pi n}{L} x)$$

NOTA 4 sobre funciones propias y Coordinadas Normales:

Expresando la solución como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x).$$

Sumamos la solución por todos posibles vibraciones harmónicas de cuerda X_n que cumplen condición de ortogonalidad:

(TEORIA: mas adelante L4G)

$$\boxed{\int_0^L X_n X_m dx = (L/2)\delta_{nm}}$$

Otro punto de vista a método SL:

Sustituyendo solución en ecuación de onda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x).$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

Con X_n hallados de problema SL (que permite disminuir numero de derivadas parciales) obtendremos:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{Q}_n(t) + c^2 k_n^2 Q_n(t)\right] \operatorname{sen} k_n x = 0.$$

$$k = \sqrt{\lambda}$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Multiplicando por sen(k_mx) y integrando entre 0→L

$$\int_0^L dx \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{Q}_n(t)+c^2k_n^2Q_n(t)\right]\operatorname{sen}k_nx\operatorname{sen}k_mx = \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{Q}_n(t)+c^2k_n^2Q_n(t)\right]\delta_{nm}$$

$$= \frac{L}{2}\left[\ddot{Q}_m(t)+c^2k_m^2Q_m(t)\right]=0.$$

$$\ddot{Q}_m(t)+c^2k_m^2Q_m(t) = 0$$

Se ve que para cada una de nodos normales (m) se cumple ecuación de oscilador harmónico:

Debemos identificar por tanto los coeficientes Q_m con las coordenadas normales del sistema.

En la física resulta bastante habitual **descomponer un movimiento complicado en varios movimientos más sencillos**.

Por ejemplo, el movimiento de una partícula en el espacio se describe a partir de tres movimientos: uno a lo largo de cada eje de coordenadas.

Usando el mismo metodo en caso de oscilaciones forzadas de una cuerda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} f(x,t);$$

Resolvemos el problema usando coordinadas normales
Buscamos solución u(x,t) en forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x).$$

Sustituyedo en Ec.
y usando soluciones SL

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0,$$

$$\sum_n \left[\ddot{Q}_n(t) + c^2 \lambda_n Q_n(t)\right] X_n(x) = \frac{1}{\rho} f(x,t)$$

Multiplicando por X_m y integrando entre 0→L
Llegamos a Ec. differencial a resolver:

$$\ddot{Q}_n(t) + c^2\lambda_n Q_n(t) = \frac{1}{\rho} f_n(t),$$

Ec. diff. ordinarias de 2 orden nohomogéneas

Con

$$f_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x,t) X_n(x) dx}{\displaystyle\int_0^L X_n^2(x) dx}.$$

Análisis espectral de sonidos: "un poco de música"

La frecuencia principal de una cuerda:

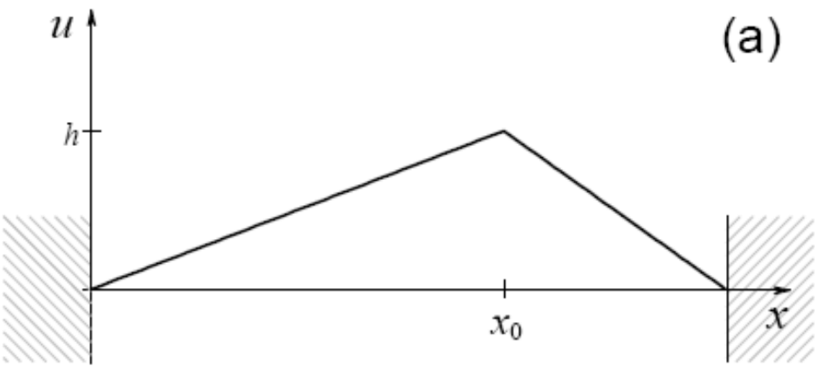
$$\omega_n = ck_n.$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Resto de frecuencias propias:

$$\boxed{\omega_n = n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = n\omega_1,}$$

<u>Caso particular</u> con SOLO desplazamiento inicial:
Cuerda con extremos fijos



$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}x, & \text{si } 0 < x < x_0, \\ \dfrac{h}{L-x_0}(L-x), & \text{si } x_0 < x < L \end{cases}$$

Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} k_n x,$$

Supongamos condiciones iniciales

$$u(x,0) = \phi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} k_n x = \phi(x), \qquad \boxed{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \operatorname{sen} k_n x = \psi(x). \qquad \boxed{2}$$

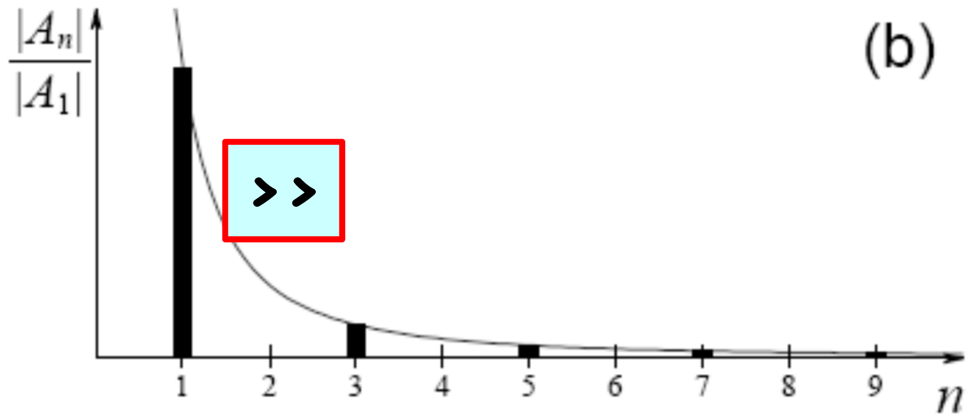
Métodos Matemáticos en Física
L.4. Método Fourier: Cuerda

Los coeficientes A_n de serie:

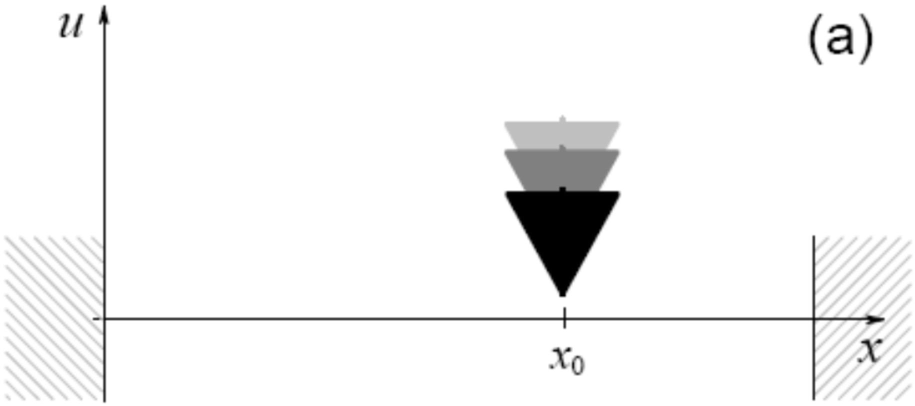
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\,\mathrm{sen}\,k_n x\,dx = \frac{2h}{x_0(L-x_0)}\,\frac{\mathrm{sen}\,k_n x_0}{k_n^2}$$

$$= \frac{2hL^2}{\pi^2 x_0(L-x_0)}\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x_0}{L}}{n^2}$$

Amplitud de harmónicos para x_0=L/2



PROB:vibraciones de cuerda con extremos fijos despues de golpe puntual : METODO #1



$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \frac{I}{2\varepsilon\rho}, & \text{si } x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon], \end{cases}$$

Los coeficientes B_n de serie:

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L dx\psi(x)\,\mathrm{sen}\,k_n x..$$

$$B_n = \frac{1}{L\omega_n}\frac{I}{\varepsilon\rho}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx\,\mathrm{sen}\,k_n x..$$

$$B_n \simeq \frac{1}{L\omega_n}\frac{I}{\varepsilon\rho}\,\mathrm{sen}\,k_n x_0 \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx = \frac{2}{L\omega_n}\frac{I}{\rho}\,\mathrm{sen}\,k_n x_0$$

$$= \frac{2I}{c\rho L}\frac{\mathrm{sen}\,k_n x_0}{k_n} = \frac{2I}{c\rho\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x_0}{L}}{n}.$$

Amplitud de harmónicos para $x_0=L/2$
(Solo harmónicos impares son excitados en este caso)