TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

En parte teoria_Según Apendice_B_Libro Levanuyk, p.279
+DEMO-MOVIES
http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos/reflect/reflect.html

Consideramos Ec. de onda SIN ninguna fuerza externa

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Introducimos cambios de variable que corresponde a nuevas sistemas de coordinadas que mueven con la Velocidad de onda en 2 direcciones opuestas

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Método D´Alembert

Transformando derivada en respecto (x) en derivadas en nuevos variable:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta},$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Transformando derivada en respecto (t) en derivadas en nuevos variables

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right] = c\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta}\right].$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Nueva forma de Ec. De onda con su solución general

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

$$u(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct) \qquad \boxed{1}$$

Solución general teniendo en cuenta CI
http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_d%27Alembert

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

EJEMPLOS de PROBLEMAS
1. Cuerda infinita, velocidad inicial nula

$$u(x,0) = \phi(x),$$ **CI-1**

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$ **CI-2**

Analizamos primera CI
De Ec. 1 obtenemos

$$f_1(x) + f_2(x) = \phi(x)$$ **2**

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Analizamos Segunda CI

Como argumento de $f_{1,2}$ es ($x \pm ct$) →

$$\left.\frac{\partial f_{1,2}(x \pm ct)}{\partial t}\right|_{t=0} = \pm c \left.\frac{\partial f_{1,2}(x \pm ct)}{\partial x}\right|_{t=0} = \pm c \frac{d f_{1,2}(x)}{dx}$$

CI-2

$$\left.\frac{\partial f_1(x + ct)}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial f_2(x - ct)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d f_1(x)}{dx} - \frac{d f_2(x)}{dx} = 0$$

integrando →
(C- constante a determinar)

$$f_1(x) = f_2(x) + C,$$

$$\boxed{3}$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Si imponer que solución (desviacion de cuerda a x_0) es nula a tiempos infinitos $u(x_o, t=\pm \text{ infinito}) \rightarrow 0$

i.e. como $f_1(\infty) \rightarrow 0$; $f_2(\infty) \rightarrow 0$; $\rightarrow$ $C=0$

$$f_1(x) + f_2(x) = \phi(x)$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right]$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Formula D`Alembert general para caso sistema 1D infinita

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x-ct) + g(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)\,d\xi}$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Nikhle H. Asmar, "Partial Differential Ecuations with Fourier Series and Boundary Value Problems" Second Edition, Pearson, (2005)

Solución D´Alembert para ondas en sistemas restringidas y con Cond. Contorno de 1-er tipo u(0)=u(L)=0

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\, ds,$$

-Valida para ondas en sistemas restringidas (CC– 1er tipo)
-(f* , g* son funciones que tienen extensión asimétrica de condiciones iniciales en respecto de punto x=0)

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{for } 0 < x < L.$$

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Solución D´Alembert para ondas en sistemas restringidas y con Cond. Contorno de 2-do tipo $u_x(0)=u_x(L)=0$

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x - ct) + f^*(x + ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\, ds,$$

-Valida para ondas en sistemas restringidas (CC- 2do tipo)
-(f^* , g^* son funciones que tienen extensión simétrica de condiciones iniciales en respecto de punto x=0)

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \text{for } 0 < x < L.$$

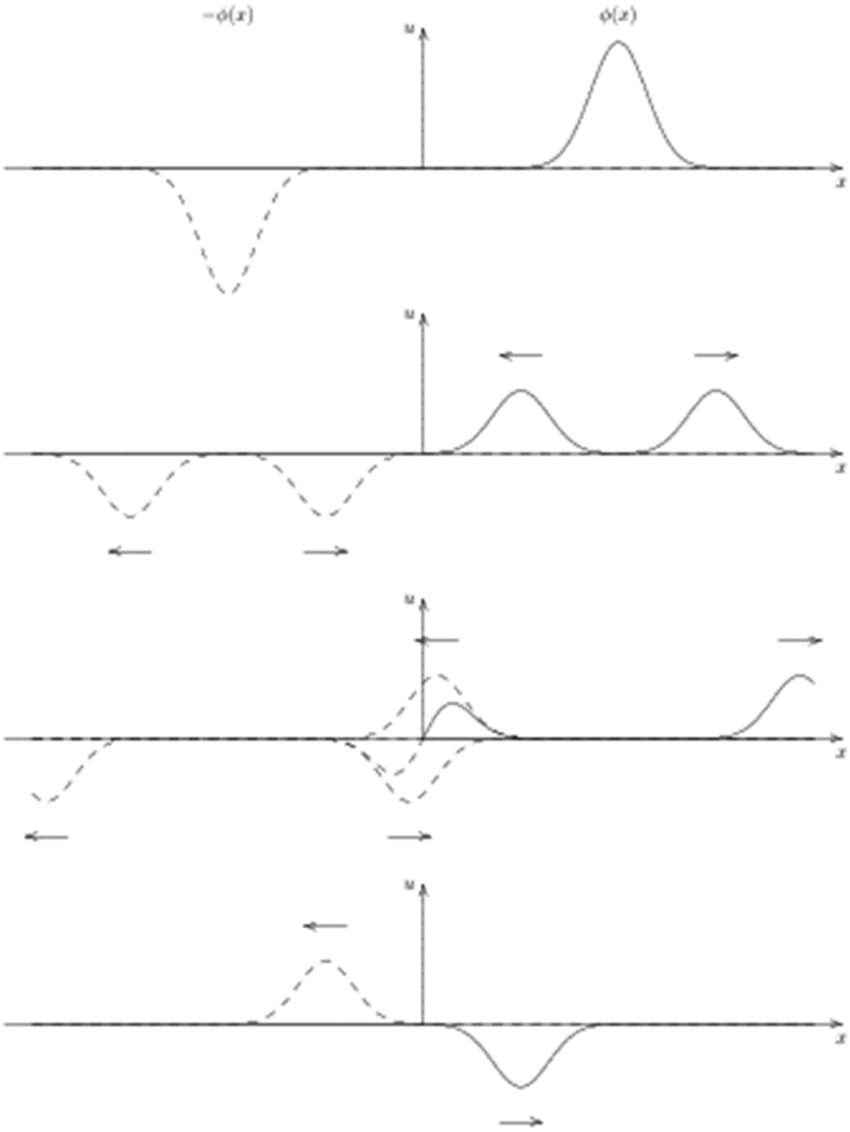
TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Ejemplo APL: onda solo con desplazamiento inicial (g=0)

1. Formamos extensión ASIMETRICA

2. Repartimos en DOS MITADES

3. Movemos cada una en DIRECCIONES OPUESTAS con velocidad de onda



B.3

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Ejemplo 1: onda solo

Medio INFINITO

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Ejemplo 2: onda reflejada del extremo FIJO

Ejemplo 3: onda reflejada del extremo BLANDO

Ejemplo 4: onda reflejada de discontinuidad de densidad
(de alta a baja)-
Analogo de extremo “libre”

Impedancia de material
$Z_{1,2}=\rho_{1,2}c_{1,2}$
(densidad por velocidad de sonido)

$$\xi_r = \frac{z_1/z_2 - 1}{z_1/z_2 + 1}\xi_1$$

Amplitud onda reflejada

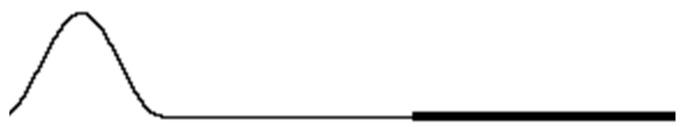
$$\xi_2 = \frac{2}{1 + z_2/z_1}\xi_1$$

Amplitud onda transmitida

TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4B: Oscilaciones de una Cuerda: Metodo D´Alembert

Ejemplo 5: onda reflejada de discontinuidad de densidad
(de baja a alta)
Analogo de extremo fijo



Métodos Matemáticos en Física
PROBELMA_Ec. DÁlembert

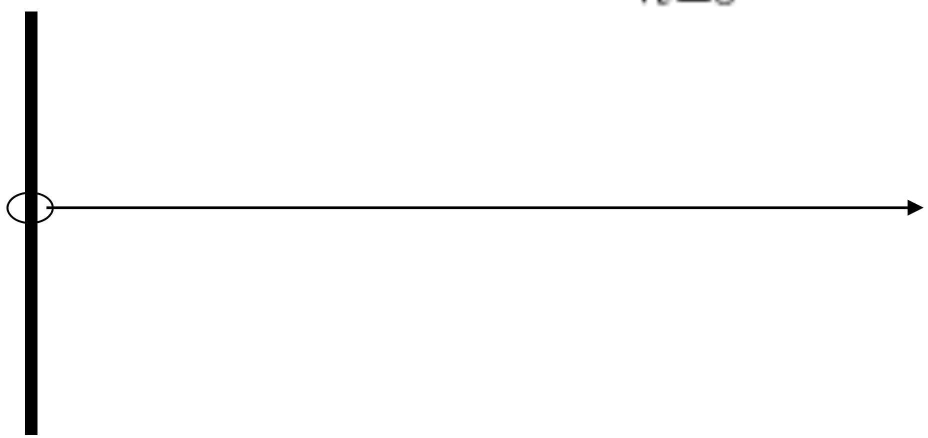
VERSION del PROBLEMA_Libro APL_2.5

Considerar una cuerda semi-infinita cuyo extremo se encuentra libre.

Deducir el desplazamiento transversal de los puntos de la cuerda si esta se encuentra sujeta a unas condiciones iniciales de la forma:

Proponer solucion del problema usando un solo tipo de funcion que describe onda

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

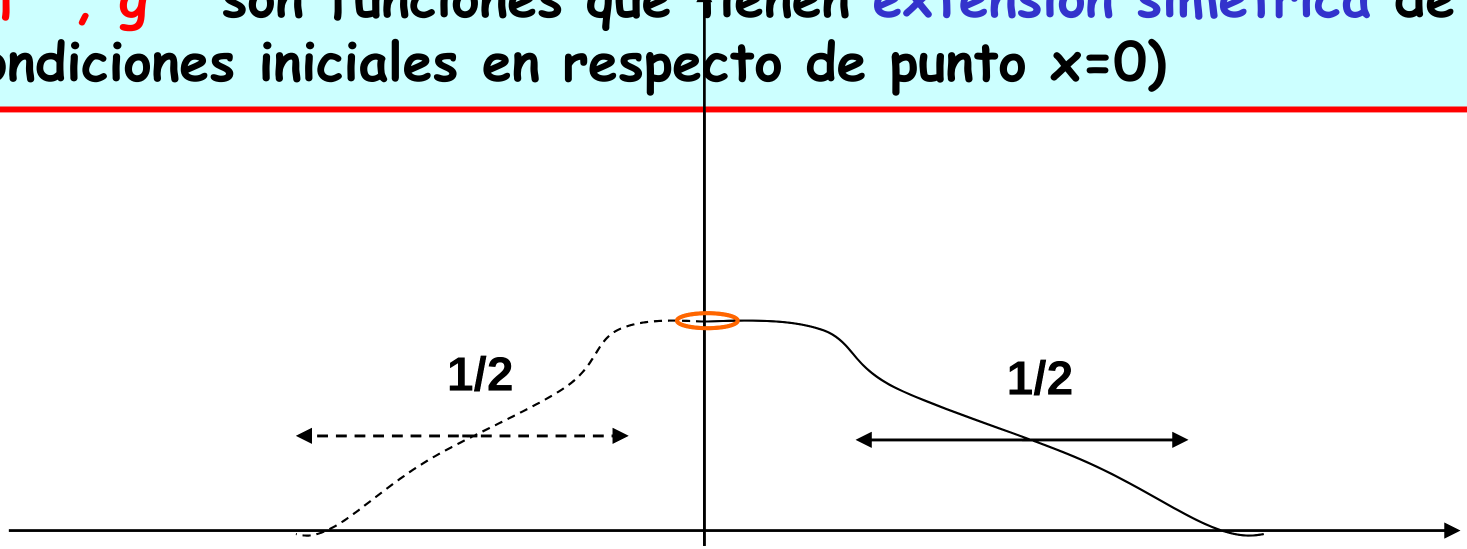


Métodos Matemáticos en Física
PROBELMA_Ec. DÁlembert

Aplicamos directamente relacion

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\,ds,$$

(*f** , *g** son funciones que tienen extensión simétrica de condiciones iniciales en respecto de punto x=0)

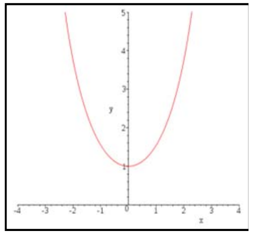


Métodos Matemáticos en Física
PROBELMA_Ec. DÁlembert

Consideramos caso de una funcion particular que satisface a Condiciones Iniciales y hallamos la solución:

$$u(x,0) = [\cosh(x)]^{-1} = ([\cosh(x]^{-1})^*$$

Extensión simétrica es la misma función



$$u(x,t) = \frac{1}{2} \times [([\cosh(x - ct)]^{-1}) + [\cosh(x + ct)]^{-1})]$$

Solución Final

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)\}$$

Métodos Matemáticos en Física
PROBELMA_Ec. DÁlembert

Equivalencia de desarrollo por Series de Fourier y Ex. D\`Alembert:
Caso de cuerda extremos fijos

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

CI: $f(x) = \sin \frac{m\pi}{L} x \quad g(x) = 0$

Con método de Fourier Series
(a partir de problema SL):

$$u(x,\, t) = \sin \frac{m\pi}{L} x \cos c \frac{m\pi}{L} t$$

Métodos Matemáticos en Física
PROBELMA_Ec. DÁlembert

Con método d` Alembert [**sen (X)** tienen NATURALMENTE "extensiones" ASIMETRICAS):

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{m\pi}{L}(x - ct) + \sin\frac{m\pi}{L}(x + ct)\right]$$

Como:

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Se ve equivalencia de metodos

$$u(x,\, t) = \sin\frac{m\pi}{L}x \cos c\frac{m\pi}{L}t$$

Métodos Matemáticos en Física
PROBLEMA_Ec. DÁlembert

Satisfacion de formula D Alembert a Ec de onda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\right\}$$
$$= \frac{1}{2}[-cf'(x-ct)+cf'(x+ct)] + \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2}[f''(x-ct)+f''(x+ct)] + \frac{c}{2}[g'(x+ct)-g'(x-ct)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}[f'(x-ct)+f'(x+ct)] + \frac{1}{2c}[g(x+ct)-g(x-ct)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[f''(x-ct)+f''(x+ct)] + \frac{1}{2c}[g'(x+ct)-g'(x-ct)]$$