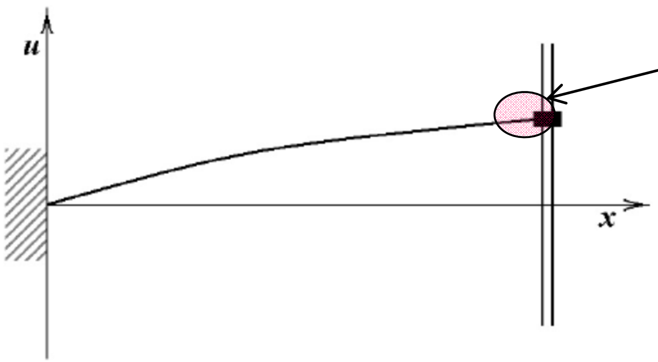
Métodos Matemáticos en Física

L4D. CONDICIONES de CONTORNO+Fuerzas Externas (Cap. 3, libro APL)

Condiciones de contorno. Fuerzas externas aplicadas sobre una cuerda.

condición que nos describe un extremo libre en una cuerda tensa.



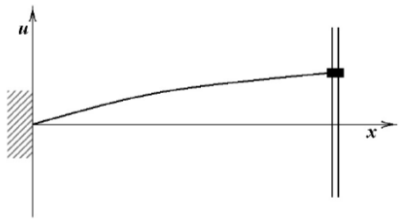
$$\rho dx \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} + T \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L-dx} = 0.$$

Ecuación para segmento cerca de x=L

du/dx = tangente

Despreciando primer termino debido a factor dx frente a segundo:

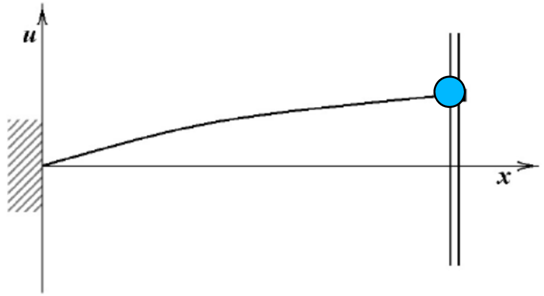
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$



ES la condición que nos describe un extremo libre en una cuerda tensa.

Supongamos que en el extremo anterior existe una masa concentrada m (este puede ser el caso si la masa de la arandela es significativa).

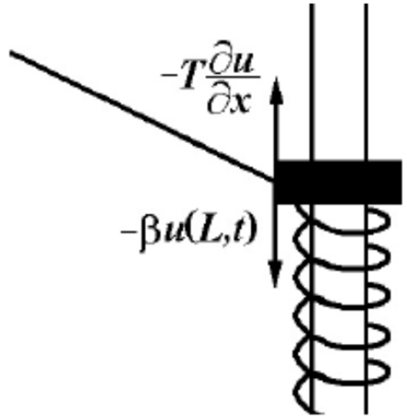
$$m\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} + T\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$



La condición de contorno debería entonces incluir masa (m)

la condición de contorno para el caso de un extremo de la cuerda unido a un muelle de constante elástica β

$$\beta u(L,t) + T\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0,$$



T,β>0, du/dx<0,u>0

Esta condición de contorno no incluye masa (m)

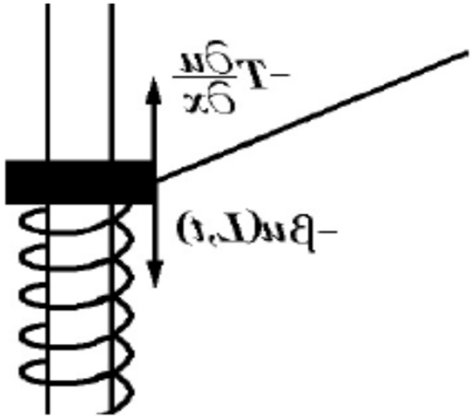
En el caso β➔0 se convierte en caso de extremo libre

Cambiamos ahora el extremo ➔?

Métodos Matemáticos en Física

L4D CONDICIONES de CONTORNO+Fuerzas Externas (según Cap. 3, libro APL)

Para oto extremo (x=0) la anterior condición de contorno cambian



$$T\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} - \beta u(0,t) = 0$$

T,β>0, du/dx>0,u>0

En todos los casos anteriores: extremos fijo, libre o unido a un muelle; tenemos condiciones de contorno homogéneas

De primera [u(x,L)=0]

Segunda y

Tercera

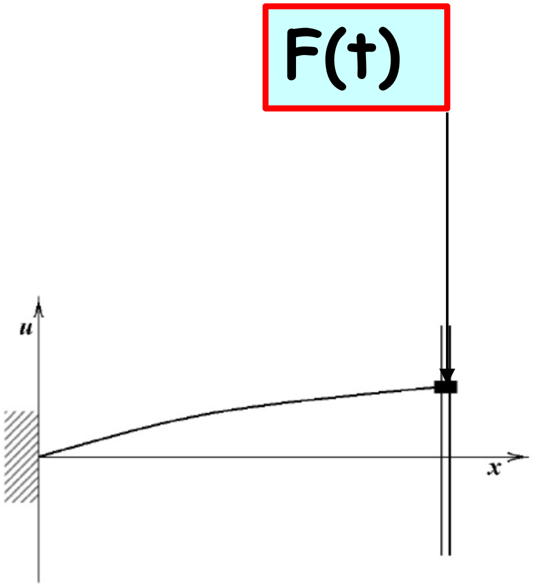
especie respectivamente

condiciones de contorno NO-homogéneas de primera especie

$$u(L,t) = \mu(t)$$

condiciones de contorno NO-homogéneas de segunda especie

$$F(t) - T\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0.$$

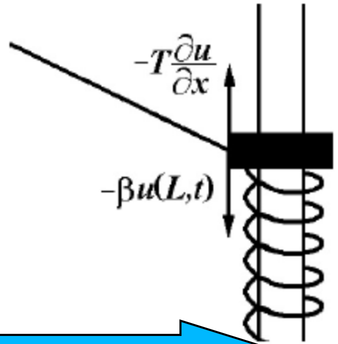


Sobre el extremo de la cuerda, en principio libre, se aplica una determinada fuerza F que, en general, puede depender del tiempo

condiciones de contorno NO-homogéneas de tercera especie

$$\beta\left[u(L,t)-\mu(t)\right]+T\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0.$$

otro extremo del muelle se mueve como



$$u(L,t)=\mu(t)$$

$$F_{\rm elast}=-\beta\left[u(L,t)-\mu(t)\right]$$

por su relativa simplicidad, a estas (3 tipos) de condiciones de contorno se les suele dedicar una atención especial

Métodos Matemáticos en Física

L4D CONDICIONES de CONTORNO+Fuerzas Externas (Cap. 3, APL)

Una cuerda con extremos fijos en equilibrio mecánico sometida a la acción de fuerzas externas

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{T}$$

$$u(0) = 0, \qquad\qquad u(L) = 0.$$

Si f(x) es campo gravitatorio

$$f(x) = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \qquad \boxed{1}$$

Solución general

$$u(x) = \frac{\rho g}{2T} x^2 + Ax + B$$

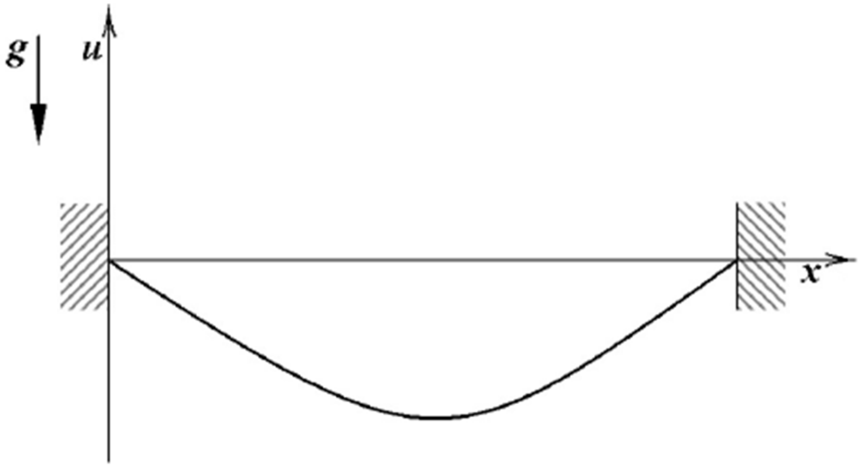
Usando condiciones de contorno

$$u(0) = B = 0,$$

$$u(L) = \frac{\rho g}{2T} L^2 + AL = 0 \implies A = -\frac{\rho g}{2T} L.$$

Desplazamiento transversal

$$u(x) = \frac{\rho g}{2T}x^2 - \frac{\rho g}{2T}Lx = \frac{\rho g}{2T}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 - \frac{\rho g}{8T}L^2$$



Consideramos otro extremo: Acción de una **fuerza puntual**

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{T}$$

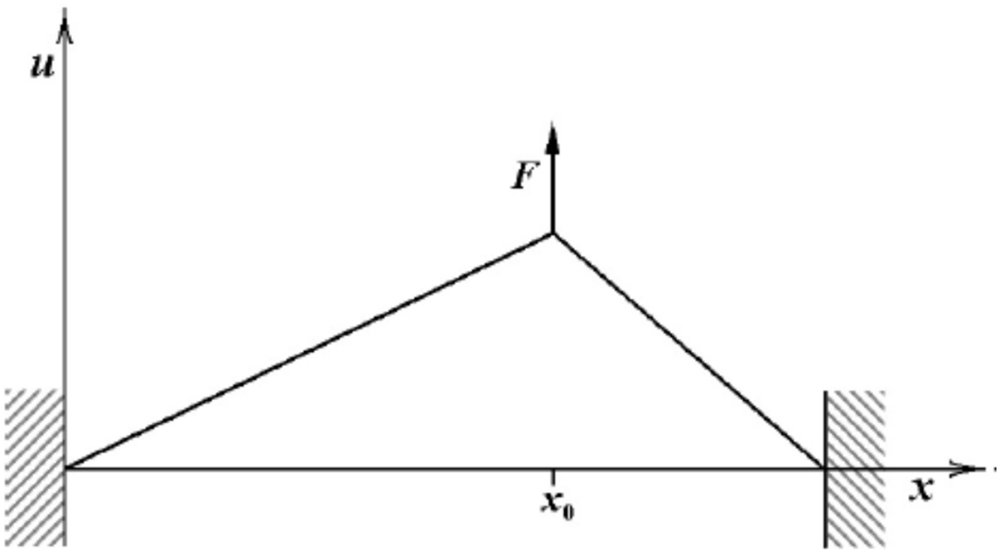
Densidad de fuerzas

$$f(x) = F\delta(x - x_0)$$

Consideramos otro extremo: Acción de una fuerza puntual

Solución general

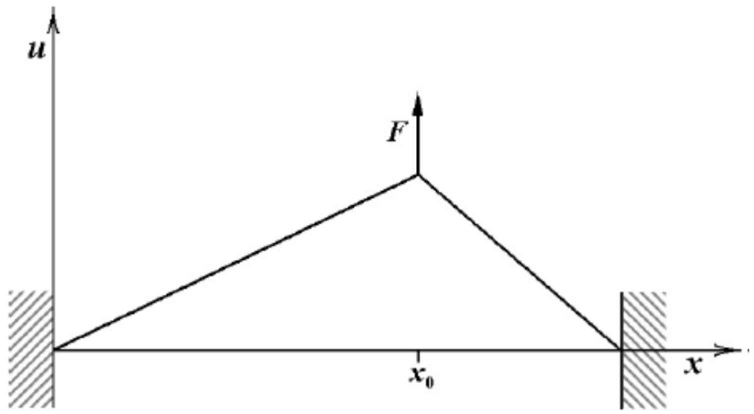
$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = A_1 x + B_1 & (x < x_0) \\ u_2(x) = A_2 x + B_2 & (x > x_0) \end{cases}$$



Consideramos condiciones de contiunidad de funciones

1ra condición de continuidad

$$u_1(x \to x_0) = u_2(x \to x_0)$$



Segunda condicion de continuidad obtenemos Integrando Ec. 1 con ($\varepsilon \rightarrow 0$)

NOTA: aquí NO hay campo gravitatorio

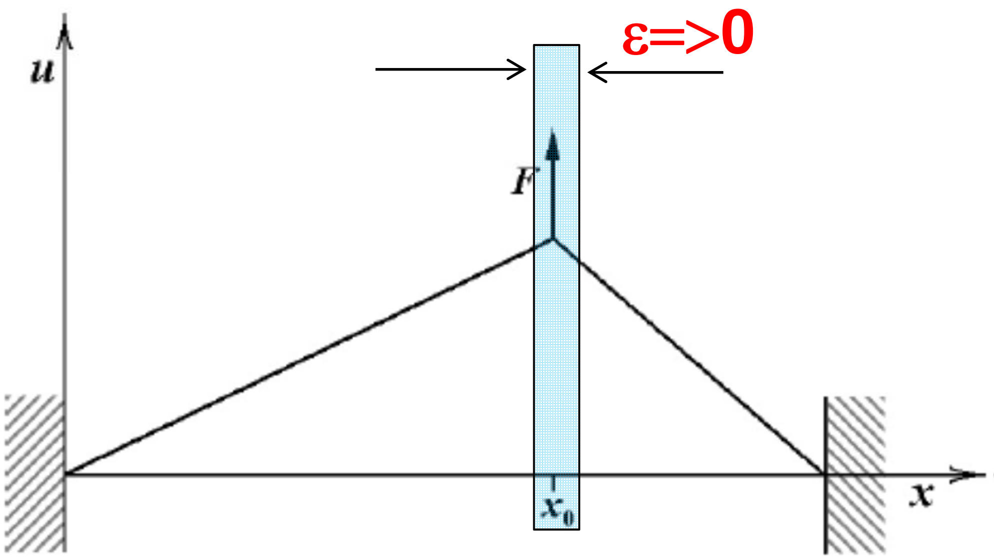
$$\boxed{\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{T}} \qquad \boxed{1}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2u(x)}{dx^2} dx = -\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{f(x)}{T} dx.$$

como $f(x) = F\delta(x - x_0)$ $\Longrightarrow$ $\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} = -\frac{F}{T}$

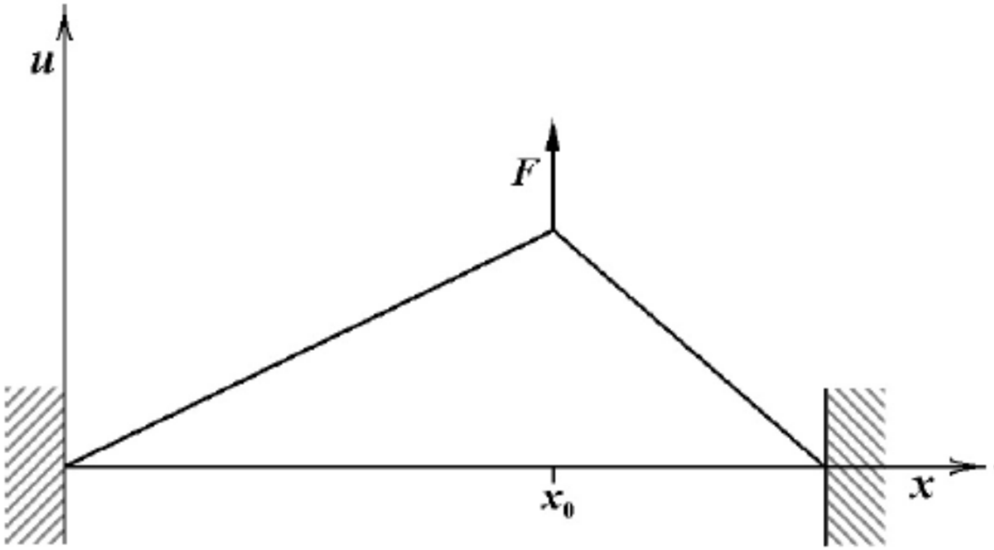
En el limite ε→0

$$T \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left.\frac{du_2(x)}{dx}\right|_{x_0+\varepsilon} - \left.\frac{du_1(x)}{dx}\right|_{x_0-\varepsilon} \right) + F = 0.$$



Solución:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{F}{T}\dfrac{L-x_0}{L}x, & \text{si } x \le x_0; \\ \dfrac{F}{T}\dfrac{L-x}{L}x_0, & \text{si } x \ge x_0. \end{cases}$$



Función de Green

Antes hemos introducido "Función Green" para halla respuesta de oscilador a fuerza general f(t)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f.$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t')G(t,t')dt'.}$$

$$G(t,t') = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}[\omega_0(t-t')], & \mathrm{si}\ t' < t. \\ 0, & \mathrm{si}\ t' > t. \end{cases}$$

Función de Green

Veamos como podemos usar resultado de respuesta a fueza puntual para describir situaciones mas complicadas.

Reescribimos resultado como

$$u(x) = \frac{F}{T} G(x, x_0);$$

con

$$G(x, x_0) \equiv \begin{cases} \frac{L - x_0}{L} x, & x \leq x_0; \\ \frac{L - x}{L} x_0, & x \geq x_0. \end{cases}$$

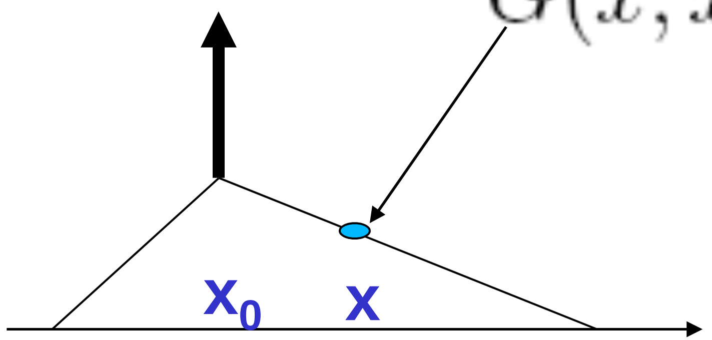
Es otro ejemplo de llamada "funcion Green"

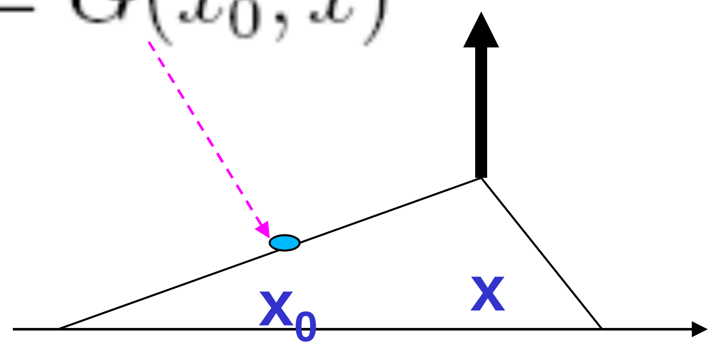
se ve claramente que el desplazamiento del punto x al aplicar una fuerza puntual en x_0 resulta el mismo que el que se obtiene en x_0 aplicando la fuerza en el punto x.

➔

Es decir que la función de Green posee la simetría:

$$G(x, x_0) = G(x_0, x)$$





Esta propiedad se conoce propiedad de Reciprocidad

DOS fuerzas puntuales

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{1}{T}[f_1(x) + f_2(x)]$$

Como condiciones del contorno homogéneas, se busca solución

$$u = u_1 + u_2$$

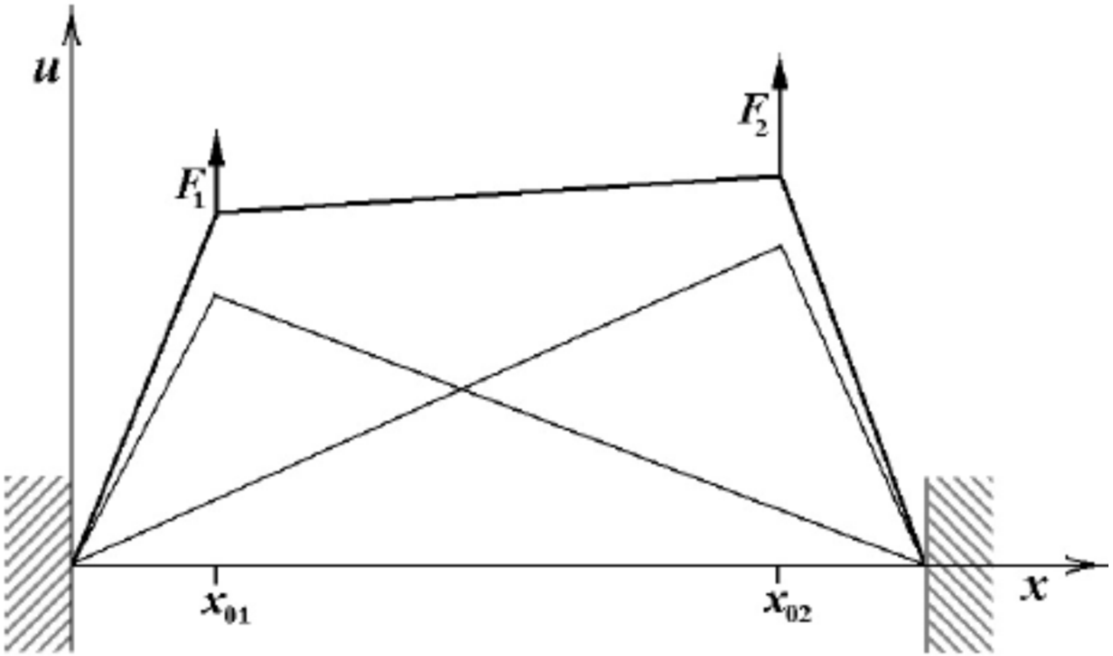
Resolvemos dos ecuaciones

$$\frac{d^2u_i(x)}{dx^2} = -\frac{f_i(x)}{T} \qquad (i = 1, 2)$$

Desplazamiento de cuerda:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u(x) = \frac{1}{T}[F_1 G(x, x_{01}) + F_2 G(x, x_{02})]$$



N fuerzas puntuales

$$u(x) = \frac{1}{T}\sum_{i}^{N} F_i G(x, x_{0i}).$$

En el limite cuando fuerza actúa sobre cada segmento infinitesimal

$$u(x) = \frac{1}{T}\int_0^L f(x')G(x,x')dx'.$$

NOTA
ES SOLO la solución de Ec. en Condiciones de Contorno

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{f(x)}{T}$$

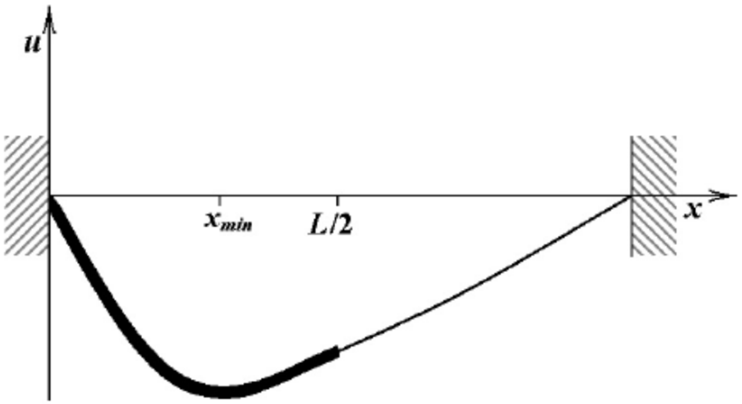
$$\boxed{u(0) = 0, \qquad u(L) = 0.}$$

USAREMOS este resultado para considerar Una cuerda no homogénea

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{g}{T}\rho(x)$$

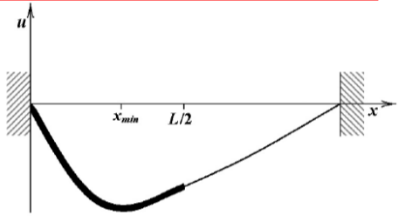
$$u(x) = -\frac{g}{T}\int_0^L G(x,x')\rho(x')dx'$$

Supongamos



$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & \text{si } 0 < x < L/2, \\ \rho_2 & \text{si } L/2 < x < L, \end{cases}$$

Una cuerda no homogénea (Calculo para x<L/2)



$$u(x) = -\frac{g}{T}\left[\rho_1 \int_0^{L/2} G(x,x')dx' + \rho_2 \int_{L/2}^{L} G(x,x')dx'\right]$$

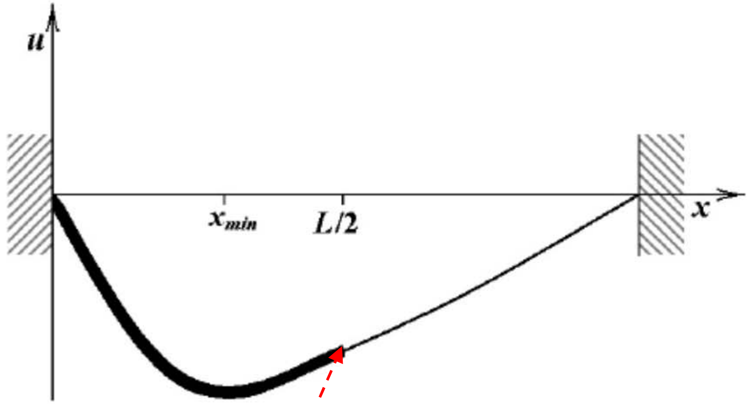
$$u(x<L/2) = -\frac{g}{T}\left\{\rho_1\left[\int_0^x G(x,x')dx' + \int_x^{L/2} G(x,x')dx'\right] + \rho_2 \int_{L/2}^{L} G(x,x')dx'\right\}$$

$$= -\frac{g}{T}\left\{\rho_1\left[\int_0^x \frac{L-x}{L}x'dx' + \int_x^{L/2} \frac{L-x'}{L}xdx'\right] + \rho_2 \int_{L/2}^{L} \frac{L-x'}{L}xdx'\right\}$$

Para puntos x<L/2
Funcion parabolica:

$$= \frac{g}{2T}\left[\rho_1(x-L)x + \frac{\rho_1-\rho_2}{4}Lx\right]$$

Una cuerda no homogénea
(Calculo para x>L/2)



$$u(x > L/2) = -\frac{g}{T}\left\{\rho_1 \int_0^{L/2} G(x,x')dx' + \rho_2\left[\int_{L/2}^{x} G(x,x')dx' + \int_x^L G(x,x')dx'\right]\right\}$$

$$= -\frac{g}{T}\left\{\rho_1 \int_0^{L/2} \frac{L-x}{L}x'dx' + \rho_2\left[\int_{L/2}^{x} \frac{L-x}{L}x'dx' + \int_x^L \frac{L-x'}{L}xdx'\right]\right\}$$

Para puntos x>L/2

$$=\frac{g}{2T}\left[\rho_2 x^2 + \frac{\rho_1 - 5\rho_2}{4}Lx - \frac{\rho_1-\rho_2}{4}L^2\right]$$

Q=Hay Cambio de derivadas?

Una cuerda con los extremos a distintas alturas ?

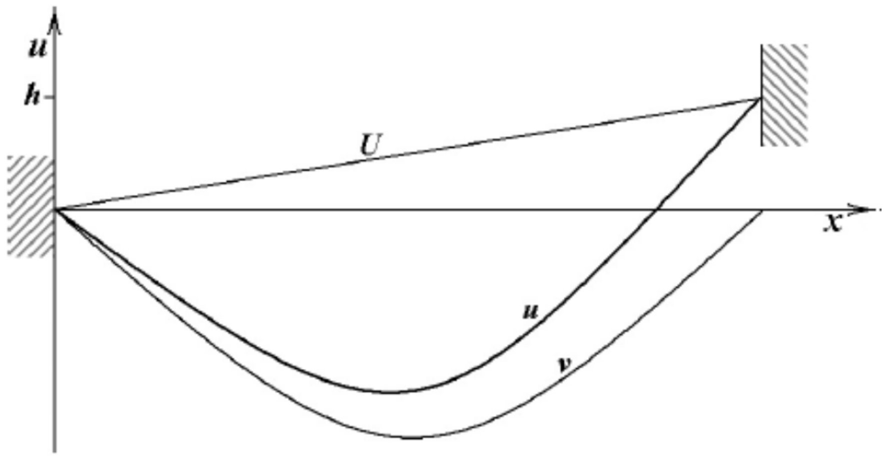
$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{g}{T}\rho(x)$$

$$u(0) = 0, \qquad u(L) = h.$$

Una cuerda con los extremos a distintas alturas

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{g}{T}\rho(x)$$

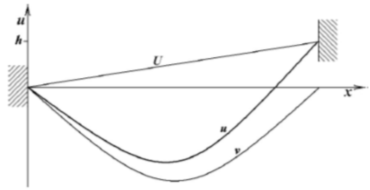
$$u(0) = 0, \qquad u(L) = h.$$



Para poder usar Función Green desarrollada, modificamos planteamiento así:

$$u(x) = v(x) + U(x)$$

Tendremos ecuación para v(x)



$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{g}{T}\rho(x) - \frac{d^2U(x)}{dx^2}$$

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0$$

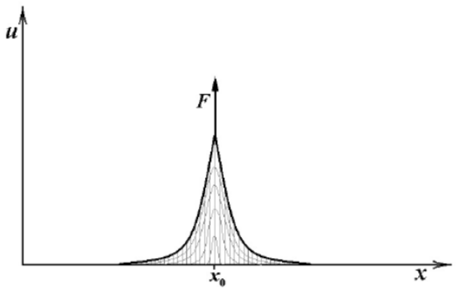
La función mas natural U(x) es

$$U(x) = \frac{h}{L}x.$$

Una cuerda infinita pegada a un plano
La expresión para la función de Green que hemos manejado hasta el momento carece entonces de sentido.

Para cada elemento de cuerda (dx)

$$dF_{\text{elast}}(x) = -\beta u(x) dx,$$



$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - a^2u(x) = -\frac{f(x)}{T}$$

2

$$a^2 = \beta/T$$

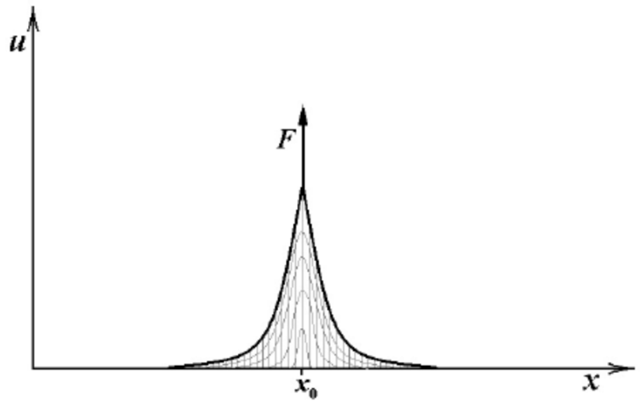
con

$$f(x) = F\delta(x - x_0)$$

Aplicamos fuerza puntual a punto x_0

CL: FORMA de SOLICION general?

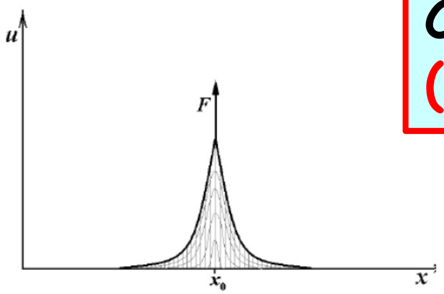
Como salvo x_0 la densidad de fuerzas externas es nula:



$$u(x) = \begin{cases} A_1 e^{-ax} + B_1 e^{ax}, & \text{si } x < x_0. \\ A_2 e^{-ax} + B_2 e^{ax}, & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Coeficientes determinaremos de condiciones de continuidad y de equilibrio. En segundo caso integramos (2) cerca x_0 teniendo en cuenta:

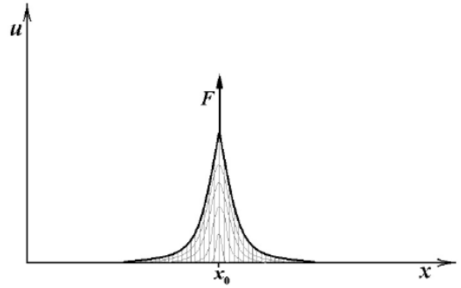
$$-\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \beta u(x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{=} 0.$$



ADEMAS,
Coeficientes A_1 y B_2 deben ser CERO
(Q: PORQUE?)

$$u(x) = \begin{cases} A_1 e^{-ax} + B_1 e^{ax}, & \text{si } x < x_0. \\ A_2 e^{-ax} + B_2 e^{ax}, & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Para que la funcion u(x) ➔0 a x=±∞:)

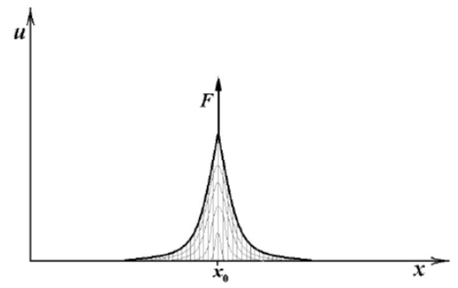


Ecuaciones a resolver para B1, A2 ➔

$$B_1 e^{a x_0} - A_2 e^{-a x_0} = 0,$$
$$B_1 e^{a x_0} + A_2 e^{-a x_0} = F/(aT)$$

Porque ?

De aquí obtenemos coeficientes:



$$B_1 = \frac{F}{2aT} e^{-ax_0}, \qquad A_2 = \frac{F}{2aT} e^{ax_0}$$

De aquí obtenemos coeficientes:

Solución expresada en términos **función Green** (que satisface condiciones en x=±∞):

$$u(x) = \frac{F}{T} G(x, x_0)$$

$$G(x, x_0) \equiv \frac{1}{2a} e^{-a|x-x_0|}$$