Métodos Matemáticos en Física III

Examen Parcial Oct.27 /2014
FORMULACION MATEMATICA

Cond. Contorno
CC1-3
;
CC para solución en infinito

$\Longrightarrow$

Ec. Diff-Deriv. Par
Ec.Ondas, Laplace, Poisson, Ec. Difusion

$\Longleftrightarrow$

PROCESOS Físicos
En 1D / 2D
Ondas en solidos, gases o liquidos, Conduccion de calor, Electroestatica

Problemas

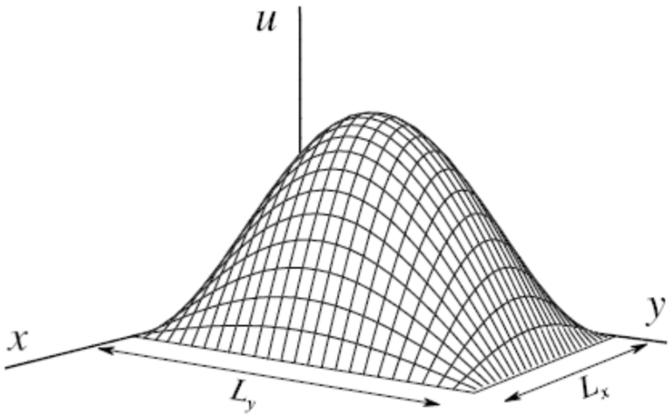
ESTACIONARIOS o
No estacionarios

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

APL: 6.1 Oscilaciones transversales de una membrana rectangular (BORDES FIJOS)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = 0 \qquad \boxed{1}$$

$$c^2 = T/\rho$$



Escojamos el sistema de coordenadas de tal manera que la membrana se encuentre en el cuadrante positivo con uno de sus vértices en el origen.

$$u(0, y, t) = 0, \qquad u(L_x, y, t) = 0,$$
$$u(x, 0, t) = 0, \qquad u(x, L_y, t) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Ondas estacionarias

Es razonable pensar que, de entre todo el conjunto de movimientos permitidos, existan algunos de ellos en los que se conserve un determinado perfil de desplazamientos

$$u(x,y,t) = v(x,y)T(t).$$

Sustituimos en Ec. 1

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{\triangle v}{v}. = -\lambda$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Tenemos que resolver 2 ecuaciones

$$\ddot{T} + c^2 \lambda T = 0. \qquad \boxed{2}$$

$$\triangle v + \lambda v = 0, \qquad \boxed{3}$$

Para que cumplan CC, necesitamos que:

$$v(0, y) = 0, \qquad v(L_x, y) = 0.$$
$$v(x, 0) = 0, \qquad v(x, L_y) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Como contorno es perpendicular, podemos buscar auto funciones como

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \qquad \boxed{4}$$

Para que cumplan CC anteriores, necesitamos que:

$$X(0) = 0, \qquad X(L_x) = 0.$$
$$Y(0) = 0, \qquad Y(L_y) = 0.$$

$$\frac{\dfrac{d^2}{dx^2}[XY]+\dfrac{d^2}{dy^2}[XY]}{XY}=-\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{Y\dfrac{d^2}{dx^2}[X]+X\dfrac{d^2}{dy^2}[Y]}{XY}=-\lambda$$

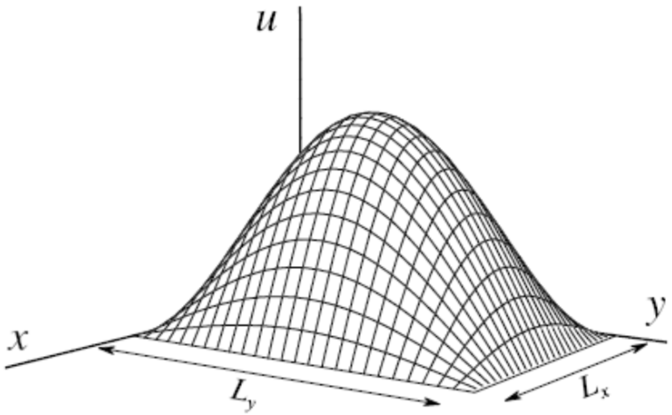
$$\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}[X]+\frac{1}{Y}\frac{d^2}{dy^2}[Y]=-\lambda \quad \Rightarrow \quad -\nu^2-\mu^2=-\lambda$$

Métodos Matemáticos en Física

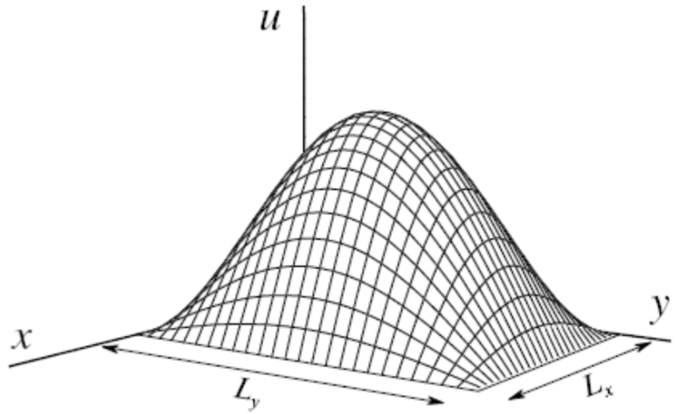
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Sustituyendo (4): v(x,y)=X*Y en Ec.3 → obtenemos:

$$X'' + \nu^2 X = 0,$$
$$Y'' + \mu^2 Y = 0,$$



donde $\lambda = \nu^2 + \mu^2$



Autofunciones y autovalores ya hemos calculado antes:

$$X_n(x) = \sqrt{2/L_x}\,\operatorname{sen}\nu_n x, \qquad \nu_n = n\pi/L_x,$$

$$Y_m(y) = \sqrt{2/L_y}\,\operatorname{sen}\mu_m y, \qquad \mu_m = m\pi/L_y$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Entonces:

$$v_{n,m}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \operatorname{sen} \nu_n x \operatorname{sen} \mu_m y,$$

con

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right)$$

NOTA: se suman de cuadrados de frecuencias
Para obtener cuadrado de frec. angular total

Ortoganalidad de autofunciones v_{nm}

Para cada λ_{nm} tenemos ecuación

$$\ddot{T} + c^2\lambda_{n,m}T = 0.$$

Con solución general (autovalores son positivos)

$$T_{n,m}(t) = A\cos\omega_{n,m}t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_{n,m}t$$

$$\omega_{n,m}^2 = c^2\lambda_{n,m}$$

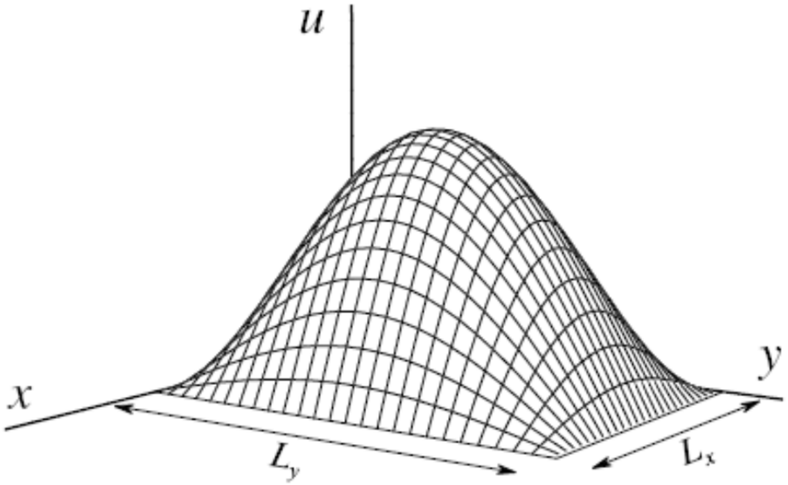
Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Frecuencia mas baja

$$\omega_{1,1}^2 = c^2\lambda_{1,1} = c^2\pi^2\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)$$

Tiene perfil

$$v_{1,1}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{L_xL_y}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L_x}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{L_y}.$$



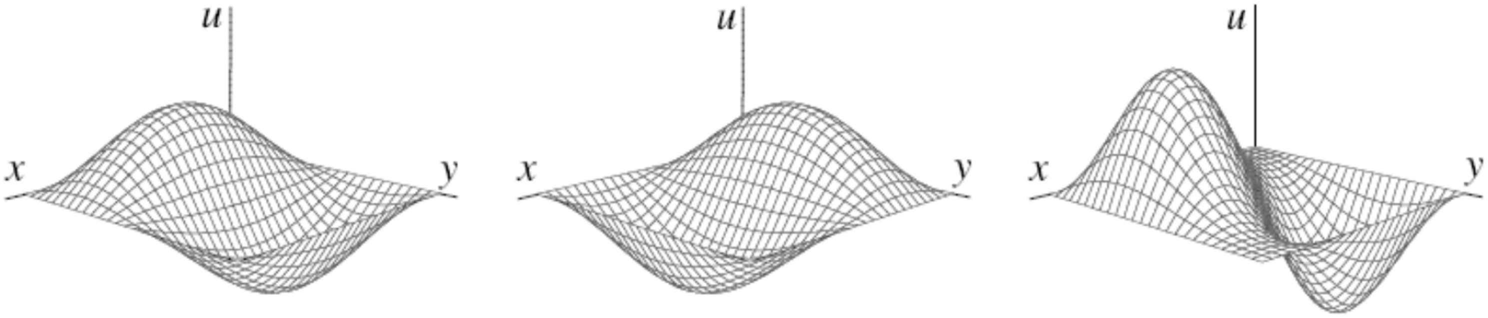
Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Autovalores degenerados: ejemplo de membrana cuadrada

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_{2,1}^2 = c^2\lambda_{1,2} = c^2\lambda_{2,1} = \frac{c^2\pi^2}{L^2}\left(1^2 + 2^2\right) = 5\frac{c^2\pi^2}{L^2}.$$

El perfil de desplazamientos asociado

$$v(x,y) = A_{1,2}\,\mathrm{sen}\,\nu_1 x\,\mathrm{sen}\,\mu_2 y + A_{2,1}\,\mathrm{sen}\,\nu_2 x\,\mathrm{sen}\,\mu_1 y$$



$A_{2,1} = 0$ $A_{1,2} = 0$ $A_{1,2} = -A_{2,1}$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Movimiento de la membrana como superposición de ondas estacionarias

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{n,m} T_{n,m}(t) v_{n,m}(x,y) \\
&= \sum_{n,m} \left(A_{n,m} \cos \omega_{n,m} t + B_{n,m} \operatorname{sen} \omega_{n,m} t\right) \operatorname{sen} \nu_n x \operatorname{sen} \mu_m y
\end{aligned}
$$

Suponemos Cond. Iniciales

$$
u(x,y,0) = \phi(x,y),
$$

$$
\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y)
$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Usando CI

$$u(x,y,0) = \phi(x,y) = \sum_{n,m} A_{n,m} \operatorname{sen} \nu_n x \operatorname{sen} \mu_m y$$

Multiplicando por $v_{n',m'}$ **Y integrando entre 0→L$_x$;L$_y$**

$$\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \phi(x,y) v_{n',m'}(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \sum_{n,m} A_{n,m} v_{n,m}(x,y) v_{n',m'}(x,y)dxdy$$

o

$$= \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \sum_{n,m} A_{n,m} v_{n,m}(x,y) v_{n',m'}(x,y)\,dxdy$$

$$= \sum_{n,m} A_{n,m}\delta_{nn'}\delta_{mm'} \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} v^2_{n',m'}(x,y)\,dxdy = A_{n',m'}.$$

Analógicamente, de segunda CI (error en el libro APL)

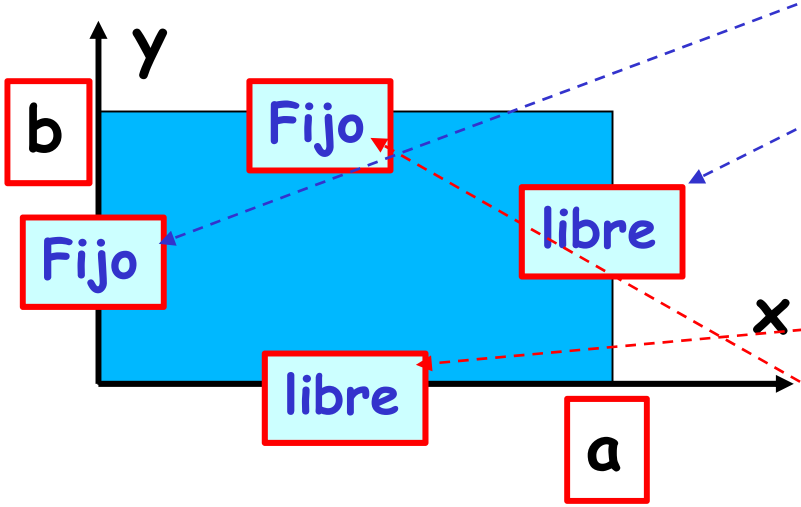
$1/\omega_{nm}$

$$B_{n,m} = \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \psi(x,y)v_{n,m}(x,y)dxdy$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

CLASE (1p):
Membrana con bordes:
2 libres + 2 fijos
Autovalores+Autofuncones
de problema SL

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$



Fijo izquierdo: u(0,y)=0

LIBRE derecho: $u_x(a,y)=0$

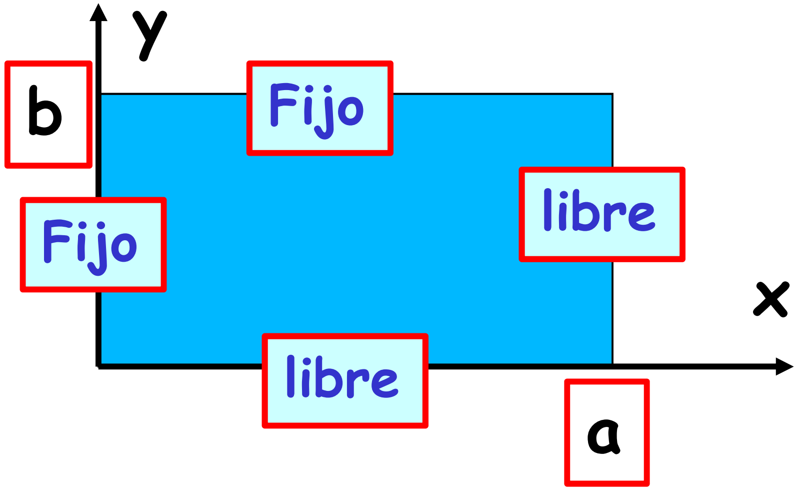
LIBRE abajo $u_y(x,0)=0$

Fijo arriba : u(x,b)=0

2 Problemas
SL con CC➔

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

CLASE:
Membrana con bordes: 2 libres + 2 fijos



Problema SL (x) →

$$u = T(t)v(x,y)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = -\lambda$$

$$v = XY$$

$$X_{xx} + \nu^2 X = 0$$

Fijo izquierdo: u(0,y)=0 => X(0)=0

LIBRE derecho: u_x(a,y)=0 => X_x(a)=0

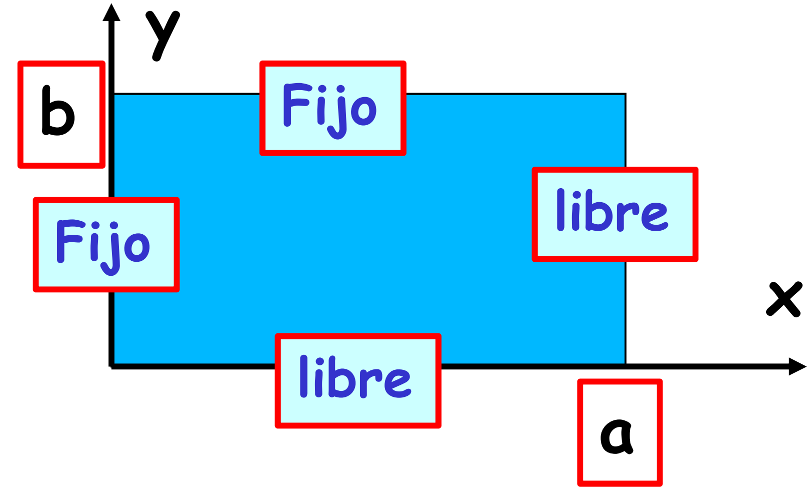
=>

$$X_n(x) = \mathrm{Sen}[\frac{\pi}{2a}(2n+1)x]$$

$$\nu^2 = [\frac{\pi}{2a}(2n+1)]^2$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

CLASE:
Membrana con bordes:
2 libres + 2 fijos



$$\frac{\Delta v}{v} = -\lambda$$

$$v = XY$$

$$\nu^2 + \mu^2 = \lambda$$

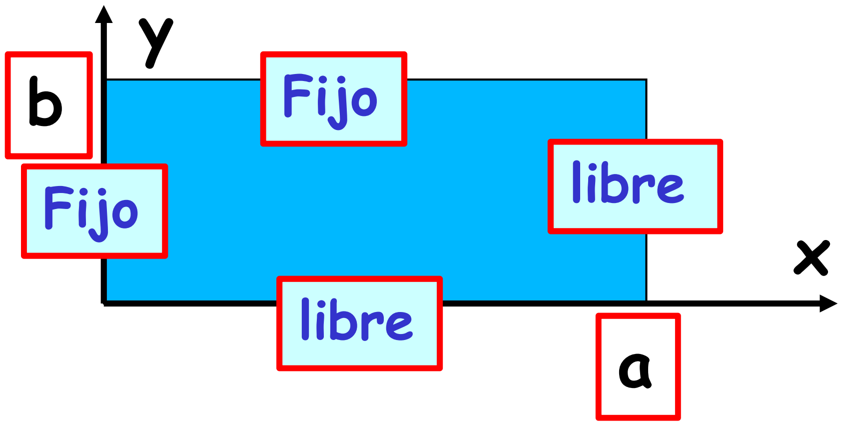
$$Y_{yy} + \mu^2 Y = 0$$

LIBRE abajo $u_y(x,0)=0 \Rightarrow Y_y(0)=0$

Fijo arriba : $u(x,b)=0 \Rightarrow Y(b)=0$

Problema SL (x) ➔

$$\Rightarrow Y_m(x)=\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{2b}(2m+1)y\right]$$



Autovalores y autofunciones de problema SL:

$$\lambda_{n,m} = [\frac{\pi}{2a}(2n+1)]^2 + [\frac{\pi}{2b}(2m+1)]^2$$

$$v_{nm}(x,y) = Sen[\frac{\pi}{2a}(2n+1)x] * \mathrm{Cos}[\frac{\pi}{2b}(2m+1)y]$$

Membrana con TODOS bordes libres

Problema SL con CC→

$$\Delta v + \lambda v = 0,$$

$$\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right|_{x=L_x} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L_y} = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

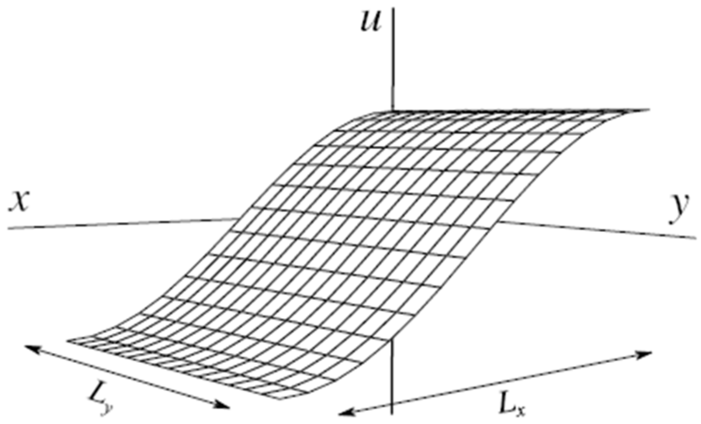
Auto función que corresponde a autovalor CERO

$$v_{0,0}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}}$$

analógicamente con procedimiento anterior Encontramos la frecuencia mas baja

$$\omega = c\pi / L_{x,y}$$

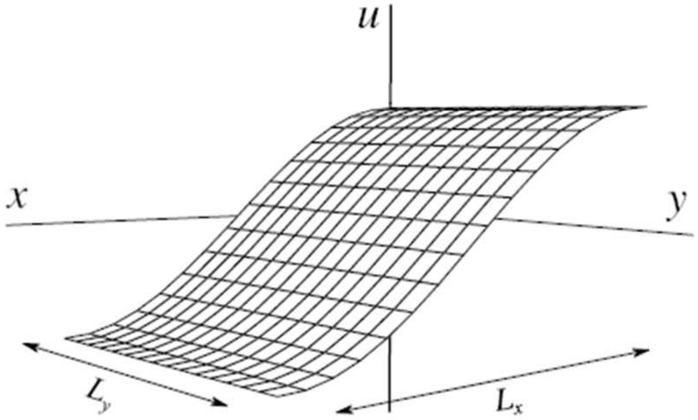
Perfil correspondiente:



$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x L_y}} \cos \frac{\pi x}{L_x}.$$

La frecuencia principal de una membrana cuadrada cuyos extremos se pueden desplazar libremente se encuentra doblemente degenerada.

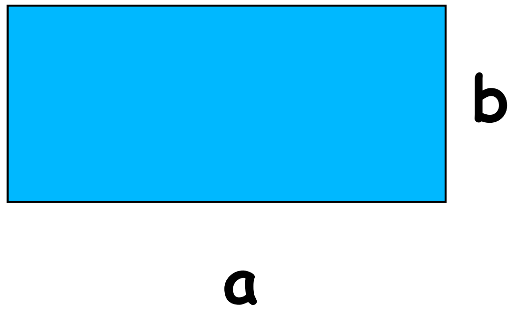
$$v(x,y) = A\cos\frac{\pi x}{L} + B\cos\frac{\pi y}{L},$$



Con A,B arbitrarias

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Metodo de Separación de Variables para resolver Ec. Fourier en 2D (Libro Asmar)



$$u_t = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy} \right), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad c > 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Aplicamos método de separación de variables

$$u(x,y,t) = \phi(x,y)T(t) \neq 0$$

$$\boxed{u_t = c^2\,(u_{xx} + u_{yy})}$$

$$(\phi_{xx} + \phi_{yy})T = \frac{1}{c^2}\phi T'$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Aplicamos método de separación de variables

$$(\phi_{xx} + \phi_{yy})\frac{1}{\phi} = \frac{T'}{c^2T} = -\lambda^2$$

$$\boxed{\begin{gathered}\phi_{xx} + \phi_{yy} = -\lambda^2\phi, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ T' + \lambda^2c^2T = 0, \quad t > 0.\end{gathered}}$$

$$\phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, b) = 0.$$

CC para variable espacial

$$\phi(0, y) = 0, \quad \phi(a, y) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

Suma de funciones de variables independientes puede ser CONST solo que cada de estas funciones es CONST

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\nu^2, \qquad (\text{i.e.,} \;\; \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2)$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Aplicamos método de separación de variables

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0.$$

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Aplicamos método de separación de variables

$$\mu_m^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

$$\nu_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

$$\phi_{mn}(x, y) = X_m(x) Y_n(y)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_n^2.$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Ec. diferencial para variable temporal

$$T'_{mn} + \lambda_{mn}^2 c^2 T_{mn} = 0.$$

$$T_{mn}(t) = \exp\left(-\lambda_{mn}^2 c^2 t\right)$$

SOLUCION GENERAL

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp\left(-\lambda_{mn}^2 c^2 t\right)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Hallamos coeficientes de CI

$$f(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Multiplicando por $\sin(p\pi x/a)$ **Y integrando de 0→a**

$$\int_0^a f(x,y)\sin\frac{p\pi x}{a}dx = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\left(\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x}{a}dx\right)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

como

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x}{a}dx = \begin{cases} a/2 & \text{if} \quad m = p \\ 0 & \text{if} \quad m \neq p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^a f(x,y)\sin\frac{p\pi x}{a}dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn}\frac{a}{2}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5B Método Fourier: membrana rectangular

Multiplicando por $\sin(q\pi y/b)$ **Y integrando de 0→b**

$$\int_0^b \left(\int_0^a f(x,y)\sin\frac{p\pi x}{a}dx\right)\sin\frac{q\pi y}{b}dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn}\frac{a}{2}\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi y}{b}dy;$$

$$\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b}dxdy = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}a_{pq}$$

Entonces

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy.$$