

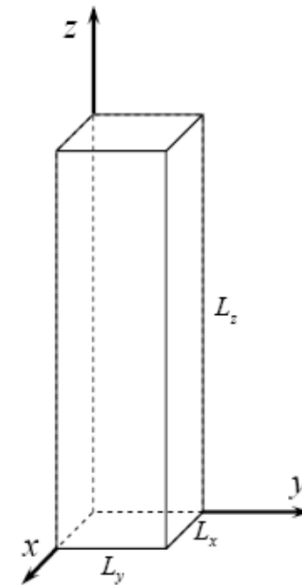
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Oscilaciones de un gas encerrado en un prisma (cap.6.2-APL)

Anteriormente vimos que el movimiento de un gas se puede caracterizar mediante diversas magnitudes, como son el cambio en densidad o el cambio en la presión.

Formularemos el problema usando el cambio de presión: CC ?



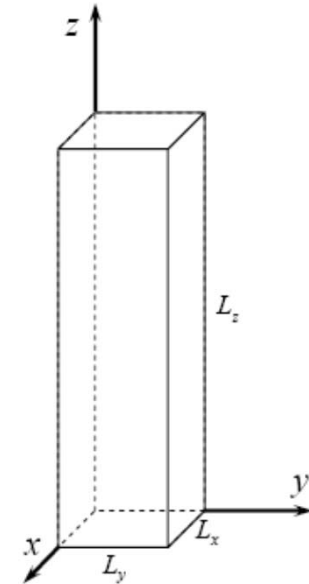
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Oscilaciones de un gas encerrado en un prisma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0,$$



1

Σ representa la superficie del prisma que tiene aristas de longitudes L_x , L_y y L_z .

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Buscamos solución separando variables

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z)T(t)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda T = 0$$

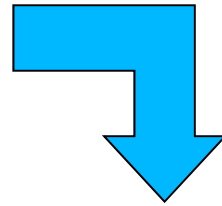
$$\Delta v + \lambda v = 0,$$
$$\left. \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Buscamos otra separación para variables $(x, y, z) \leftrightarrow SL$

$$\Delta v + \lambda v = 0,$$
$$\left. \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$



$$v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

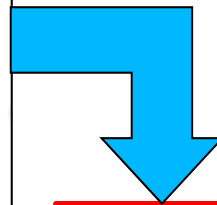
Autofunciones?

Autovalores ?

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

$$\Delta v + \lambda v = 0,$$
$$\left. \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0$$



“Ladrillos” de solución

$$v_{k,l,m}(x, y, z) = \cos \frac{k\pi x}{L_x} \cos \frac{l\pi y}{L_y} \cos \frac{m\pi z}{L_z}$$

$$\lambda_{k,l,m} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right)$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Soluciones para coeficientes temporales $T(t)$

$$T_{k,l,m}(t) = \begin{cases} A_{0,0,0} + B_{0,0,0}t, & \text{si } k, l \text{ ó } m = 0, \\ A_{k,l,m} \cos \omega_{k,l,m}t + B_{k,l,m} \text{sen } \omega_{k,l,m}t, & \text{si } k, l, m \neq 0, \end{cases}$$

$\lambda_{nmk}=0$

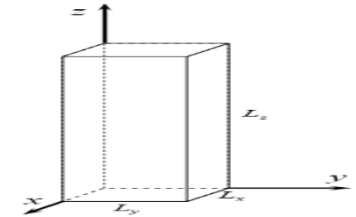
con

$$\omega_{k,l,m}^2 = c^2 \lambda_{k,l,m}.$$

Como cambio gradual de presión es imposible
(solo consideramos oscilaciones de un gas encerrado)
 A_{000} y $B_{000} = 0$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa



Si recipiente es cubo (L)

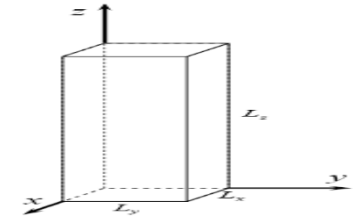
→ Modo fundamental mas bajo (degenerado)

$$\omega = \omega_{1,0,0} = \omega_{0,1,0} = \omega_{0,0,1} = c\pi/L$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución general



$$u(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m} v_{k,l,m}(x, y, z) T_{k,l,m}(t) = \sum'_{k,l,m} \cos \frac{k\pi x}{L_x} \cos \frac{l\pi y}{L_y} \cos \frac{m\pi z}{L_z} \\ \times (A_{k,l,m} \cos \omega_{k,l,m} t + B_{k,l,m} \text{sen } \omega_{k,l,m} t),$$

A partir de Condiciones iniciales se encuentra solución, usando ortogonalidad de autofunciones

Métodos Matemáticos en Física

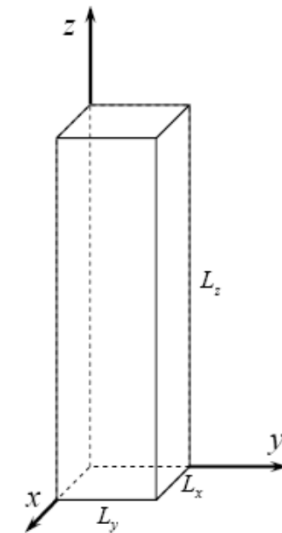
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Enfriamiento de una barra gruesa (cap.6.2-APL)

vamos a calcular la distribución de temperatura de un cuerpo indicado en el dibujo, empleando el método de Fourier.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \chi \Delta u = 0$$

1



$$u(0, y, z, t) = 0,$$
$$u(L_x, y, z, t) = 0,$$

$$u(x, 0, z, t) = 0,$$
$$u(x, L_y, z, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0, t) = 0,$$
$$u(x, y, L_z, t) = 0.$$

prisma tiene aristas de longitudes L_x , L_y y L_z . Toda superficie esta en contacto con un foco térmico a determinada temperatura (que tomamos como cero)

En instante $t=0$

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Buscamos separando variables, llegamos a problema SL

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

$$\begin{aligned} v(0, y, z) &= 0, & v(x, 0, z) &= 0, & v(x, y, 0) &= 0, \\ v(L_x, y, z) &= 0, & v(x, L_y, z) &= 0, & v(x, y, L_z) &= 0. \end{aligned}$$

Autofunciones?

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

autofunciones

$$v_{k,l,m}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L_x} \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{L_y} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L_z}.$$

autovalores

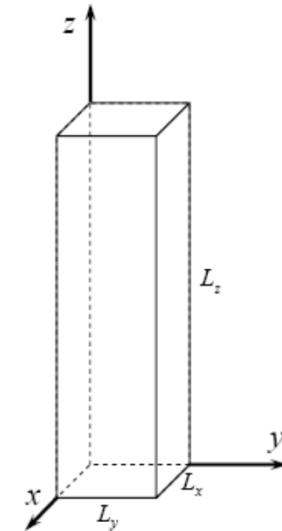
$$\lambda_{k,l,m} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right)$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución general

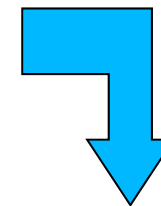
$$u(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m} v_{k,l,m}(x, y, z) T_{k,l,m}(t)$$



Sustituyendo esta función en Ec.
(1)

Y usando la ortogonalidad de v_{klm}

$$\dot{T}_{k,l,m} + \chi \lambda_{k,l,m} T_{k,l,m} = 0.$$



$$T_{k,l,m}(t) = T_{k,l,m}(0) e^{-\chi \lambda_{k,l,m} t}.$$

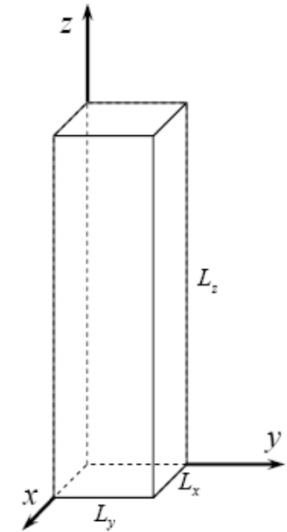
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Usando ortogonalidad de autofunciones,
Y distribución inicial de temperatura $f(x,y,z)$



Encontraremos coeficientes $T_{klm}(0)$

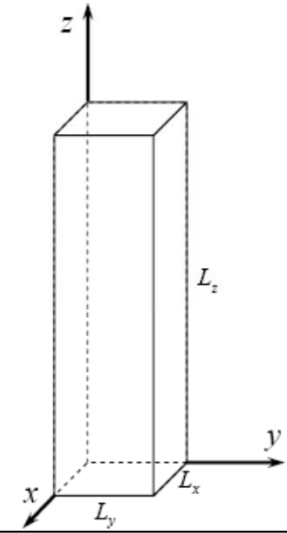


$$T_{k,l,m}(0) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} f(x, y, z) v_{k,l,m}(x, y, z) dx dy dz.$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución final



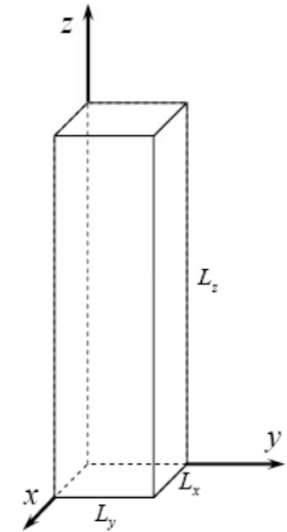
$$u(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m} v_{k,l,m}(x, y, z) T_{k,l,m}(t)$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \sum_{k,l,m} T_{k,l,m}(0) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L_x} \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{L_y} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L_z} e^{-\chi \lambda_{k,l,m} t}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Analicemos tiempos característicos

$$\tau_{k,l,m} \equiv \frac{1}{\chi \lambda_{k,l,m}} = \frac{1}{\chi \pi^2} \left(\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} + \frac{m^2}{L_z^2} \right)^{-1}$$



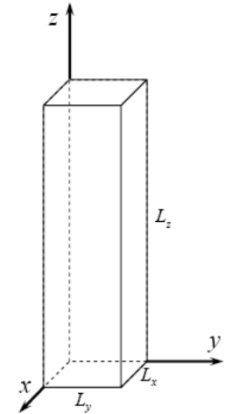
Tiempo característico mas largo se puede considerar como tiempo de enfriamiento

$$\tau_{1,1,1} = \frac{1}{\chi \lambda_{1,1,1}} = \frac{1}{\chi \pi^2} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right)^{-1}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Distribución de temperatura a tiempos muy grandes:



Error tipografico de libro APL

$$u(x, y, z, t) \simeq v_{1,1,1}(x, y, z)T_{1,1,1}(t)$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} T_{1,1,1}(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L_x} x \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L_y} y \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L_z} e^{-\chi \lambda_{1,1,1} t}$$

PERFILES senosoidales en X, Y, Z
(medios de longitud de onda)

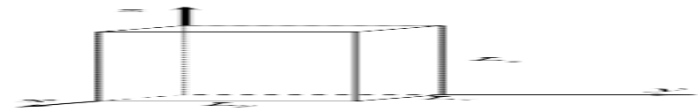
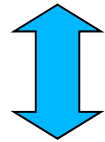
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Si

$$L_x \ll L_{y,z}$$

Es una especie de placa



$$\tau_{1,1,1} = \frac{1}{\chi \lambda_{1,1,1}} = \frac{1}{\chi \pi^2} \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right)^{-1}$$



$$\tau_{1,1,1} \simeq \frac{L_x^2}{\chi \pi^2}$$

Es decir que el tiempo característico de enfriamiento (o calentamiento) de un cuerpo es mayor cuanto mayor sea la longitud de su arista mas pequeña y menor sea su constante de difusividad térmica.

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

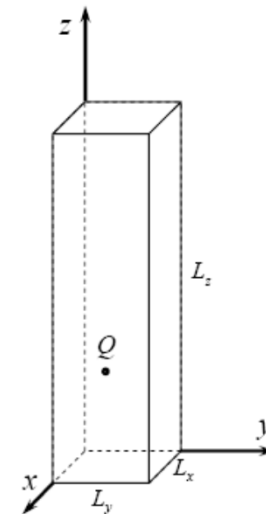
Potencial electrostático de una carga puntual dentro de una caja metálica (par. 6.4 APL)

Ec. para carga puntual Q que se encuentra dentro de una caja metálica con forma de prisma de base cuadrada

$$1 \quad \Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Como caja es metálica, tomamos potencial escalar Cero sobre la superficie

$$\phi(x, y, z)|_{\Sigma} = 0.$$



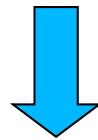
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Buscamos solución como suma por autofunciones de problema SL

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

$$\begin{aligned} v(0, y, z) = 0, & \quad v(x, 0, z) = 0, & \quad v(x, y, 0) = 0, \\ v(L_x, y, z) = 0, & \quad v(x, L_y, z) = 0, & \quad v(x, y, L_z) = 0, \end{aligned}$$



$$\phi(x, y, z) = \sum_{k,l,m} C_{k,l,m} v_{k,l,m}(x, y, z). \quad \boxed{1}$$

NOTA: Coeficientes C_{klm} NO son funciones
→ SOLO COEFICIENTES NUMERICOS

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Coeficientes C_{klm} encontramos sustituyendo esta serie (2) en (1) y aprovechando la ortogonalidad de autofunciones →

$$-\sum_{mkl} \lambda_{mkl} \phi_{mkl} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



$$C_{k,l,m} = \frac{1}{\epsilon_0 \lambda_{k,l,m}} \int_V \rho(x, y, z) v_{k,l,m}(x, y, z) dV$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 \lambda_{k,l,m}} v_{k,l,m}(x_0, y_0, z_0)$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

con

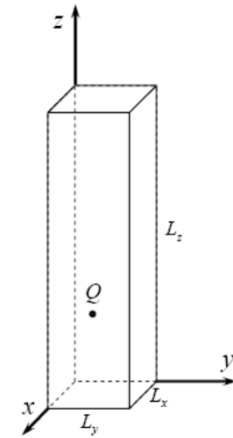
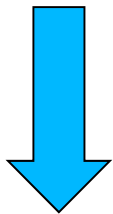
$$v_{k,l,m}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L_x} \operatorname{sen} \frac{l\pi y}{L_y} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{L_z}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Discutamos caso cuando **carga**
esta en el centro de caja

$$x_0 = L_x/2 ; y_0 = L_y/2 ; z_0 = L_z/2 \rightarrow$$



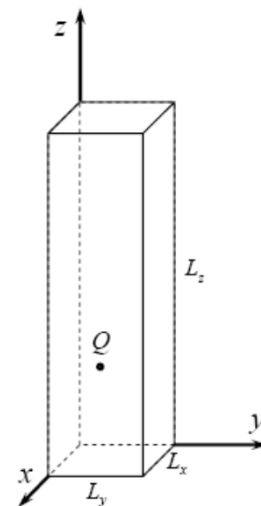
$$C_{k,l,m} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2k', l = 2l' \text{ ó } m = 2m', \\ \frac{2\sqrt{2}Q(-1)^{k'+l'+m'}}{\epsilon_0 \lambda_{k,l,m} \sqrt{V}}, & \text{si } k = 2k' + 1, l = 2l' + 1 \text{ y } m = 2m' + 1. \end{cases}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Potencial dentro de caja PARA CARGA SIMETRICA
(i.e. situada en el centro)

$$\phi(x, y, z) = \frac{8Q}{\pi^2 \epsilon_0 V} \sum_{k,l,m} \frac{(-1)^{k+l+m} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{L_x} \operatorname{sen} \frac{(2l+1)\pi y}{L_y} \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi z}{L_z}}{\frac{(2k+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2l+1)^2}{L_y^2} + \frac{(2m+1)^2}{L_z^2}}$$



Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

OTRO método : introduciendo sumatoria por solo 2 índices

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m} C_{n,m}(z) v_{n,m}(x, y).$$

Con $v(x, y) \Leftrightarrow$ solución de SL en 2D

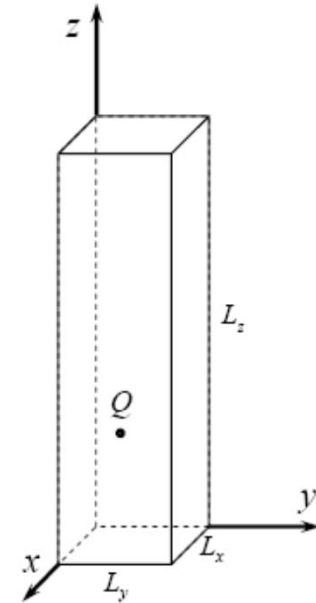
$$\Delta v + \lambda v = 0$$

$$v(0, y) = 0,$$

$$v(x, 0) = 0,$$

$$v(L_x, y) = 0,$$

$$v(x, L_y) = 0.$$



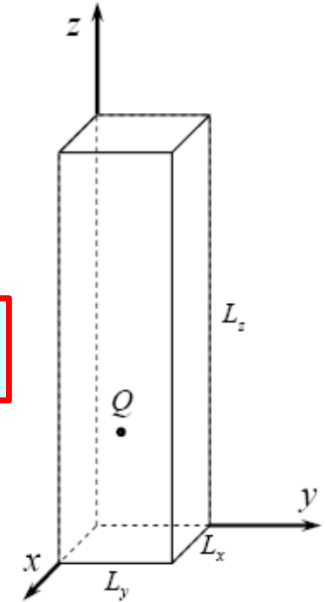
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Usando la ortogonalidad de funciones v_{nm} →
llegamos a Ec. para coeficientes C_{nm}

$$\frac{d^2 C_{n,m}}{dz^2} - \lambda_{n,m} C_{n,m} = -\frac{\rho_{n,m}}{\epsilon_0}$$

2



Donde

$$\rho_{n,m}(z) \equiv \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(x, y, z) v_{n,m}(x, y) dx dy = Q v_{n,m}(L_x/2, L_y/2) \delta(z)$$

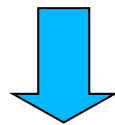
Estamos considerando caso que la carga se encuentra en el centro de la caja, tomando esta vez su coordenada z como origen del eje z .

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

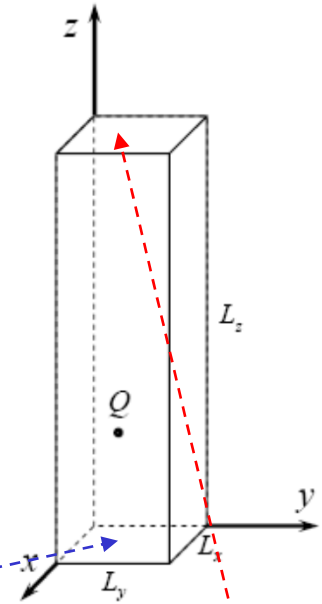
Usando ortogonalidad de funciones $v_{nm} \rightarrow$
Y hecho que $\phi(x, y, \pm L/2) = 0$, obtenemos:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m} C_{n,m}(z) v_{n,m}(x, y).$$



$$C_{n,m}(-L_z/2) = 0,$$

$$C_{n,m}(L_z/2) = 0$$

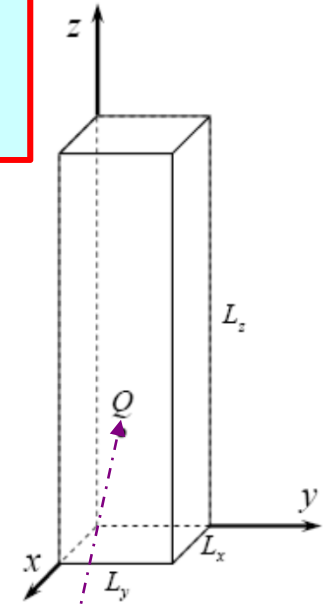


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para resolver ecuación para C_{nm} consideramos por separado intervalos $z>0$ y $z<0$

$$\frac{d^2 C_{n,m}^{\pm}}{dz^2} - \lambda_{n,m} C_{n,m}^{\pm} = 0$$



Para que potencial ($z=0$) sea continuo: →

$$C_{n,m}^{-}(0) = C_{n,m}^{+}(0)$$

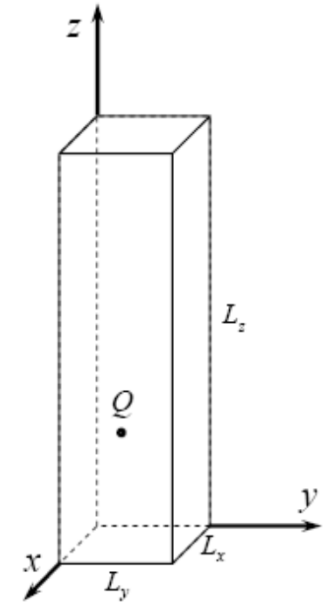
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Otra condición obtenemos **integrando** Ec. (2) entre $\pm\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{d^2 C_{n,m}}{dz^2} - \lambda_{n,m} C_{n,m} = -\frac{\rho_{n,m}}{\varepsilon_0}$$

2



$$\left. \frac{dC_{n,m}^-(z)}{dz} \right|_0 - \left. \frac{dC_{n,m}^+(z)}{dz} \right|_0 = \frac{\tilde{\rho}_{n,m}}{\varepsilon_0}$$

Donde :

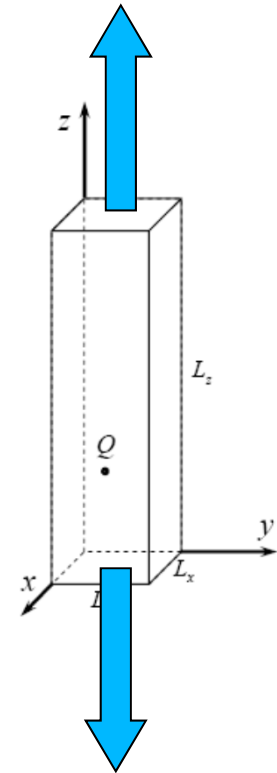
$$\tilde{\rho}_{n,m} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_{n,m} dz = Q v_{n,m}(L_x/2, L_y/2)$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

En el límite cuando la longitud de caja es infinita a lo largo del eje z , las funciones $C_{\pm n,m}$, que cumplen condiciones anteriores serán:

$$C_{n,m}^{\pm}(z) = \frac{\tilde{\rho}_{n,m}}{2\varepsilon_0 \sqrt{\lambda_{n,m}}} e^{\mp \sqrt{\lambda_{n,m}} z}$$

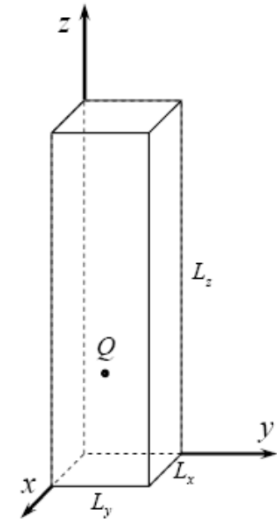


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución final
(Limite de caja infinita)
que suma solo miembros
no nulos de serie: i.e.
para que

$$v_{n,m}(L_x/2, L_y/2) \neq 0$$



$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{L_x L_y}} \sum_{n,m} \frac{\tilde{\rho}_{n,m}}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \text{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{L_x} \text{sen} \frac{(2m+1)\pi y}{L_y} e^{-\sqrt{\lambda_{n,m}}|z|}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

con

$$\tilde{\rho}_{n,m} = \frac{2Q}{\sqrt{L_x L_y}} (-1)^{k+l},$$
$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{(2k+1)^2}{L_x^2} + \frac{(2l+1)^2}{L_y^2} \right)$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

cuando

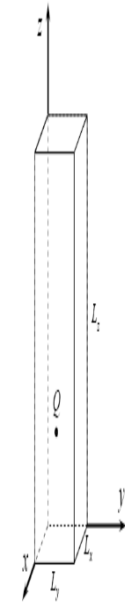
$$L_{x,y} = L \text{ y } L_z \gg L,$$

para

$$z > L/\pi$$

Solución se aproxima:

$$\phi(x, y, z) \simeq \frac{\sqrt{2}Q}{\pi\epsilon_0 L} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L} e^{-\sqrt{2}\pi|z|/L}$$

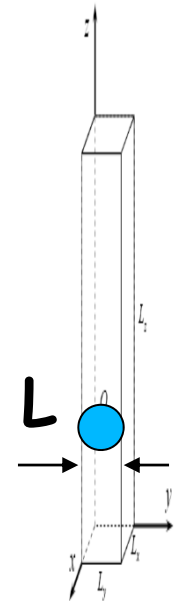


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Esta expresión indica que la Longitud característica de decremento de campo a lo largo de eje z es:

$$L / (\sqrt{2\pi})$$



Entonces, el campo eléctrico creado por una carga dentro de un tubo metálico (de sección cuadrada $L \times L$) queda comprendido, principalmente, en un entorno de volumen $\sim L^3$ alrededor de dicha carga.

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Condiciones de contorno no homogéneas (6.5-APL)

Problemas Sturm-Liouville se pueden considerar como problemas auxiliares cuyas soluciones permiten describir parte de la solución del problema físico disminuyendo con esto su dimensionalidad efectiva

Veamos otros ejemplos de como hacerlo en 3D

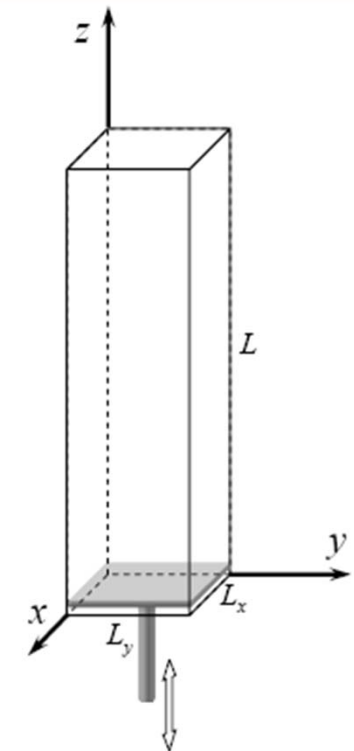
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Vibraciones acústicas excitadas por el movimiento de un pistón. Estudiaremos variación de PRESION= $u(x,y,x,t)$

A partir de tiempo suficiente cuando las vibraciones propias del gas se hayan atenuado por completo, y no existe ningún tipo de resonancia

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) \text{sen } \omega t.$$



$$P_0(x, y) \text{sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Sustituyendo en Ec de onda →

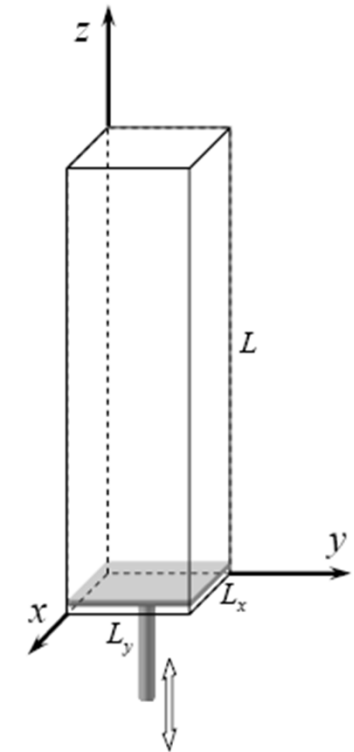
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \phi = 0$$

$$\Delta v + \frac{\omega^2}{c^2} v = 0$$

$$v(x, y, 0) = P_0(x, y),$$

$$\left. \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\Sigma'} = 0$$

Σ - es toda superficie de pistón
excepto pistón



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

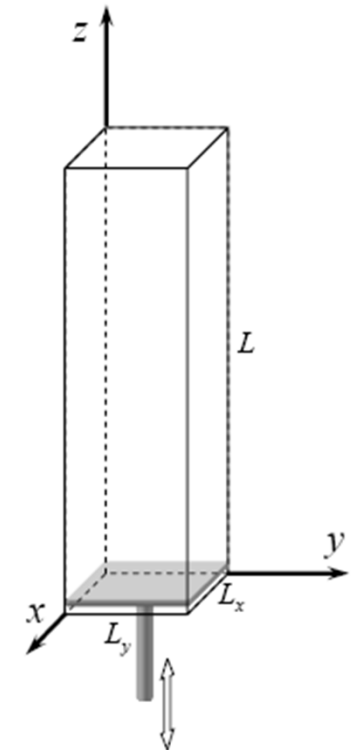
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Siguiendo método de sección anterior →

$$v(x, y, z) = \sum_{n,m} C_{n,m}(z) w_{n,m}(x, y)$$

Con w_{nm} - soluciones SL → **COMO SON?**



$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$

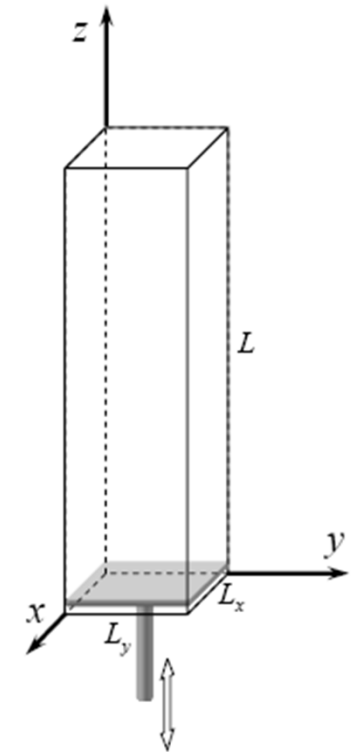
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

$$w_{n,m}(x, y) = \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} :$$

Con $n, m \geq 0$

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left[\left(\frac{n}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m}{L_y} \right)^2 \right]$$



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Ec. a solucionar para $C_{nm}(z)$

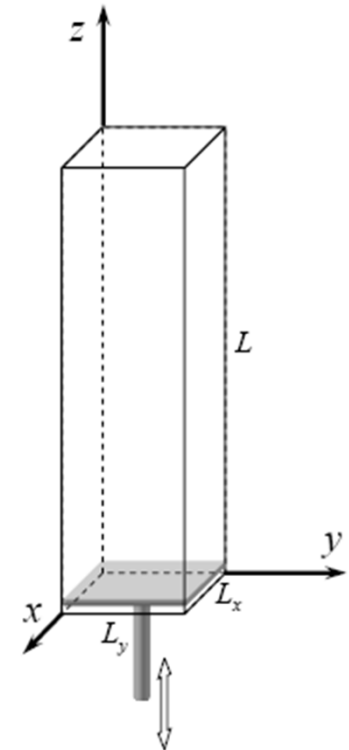
$$\frac{d^2 C_{n,m}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 - \Omega_{n,m}^2}{c^2} C_{n,m}(z) = 0,$$

$$C_{n,m}(0) = P_{n,m}, \quad \left. \frac{dC_{n,m}(z)}{dz} \right|_L = 0.$$

donde

$$\Omega_{n,m}^2 \equiv c^2 \lambda_{n,m}$$

$$P_{n,m} \equiv \frac{\int_0^l \int_0^l P_0(x,y) w_{n,m}(x,y) dx dy}{\int_0^l \int_0^l w_{n,m}^2(x,y) dx dy}$$



$$P_0(x,y) \text{ sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Presión del pistón homogénea

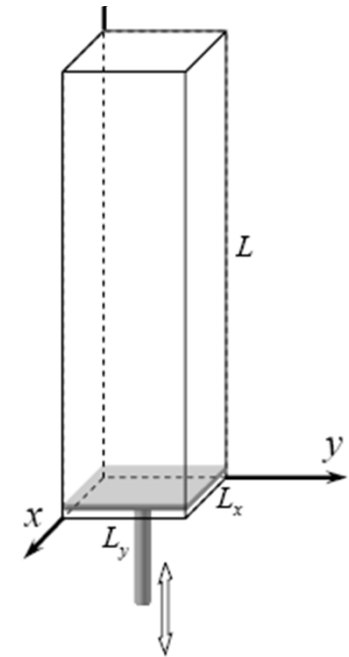
$$P_0(x, y) = P_0 = \text{cte}$$

$$C_{nm}(0) \sim \int_0^l \int_0^l P_0(x, y) w_{n,m}(x, y) dx dy$$

$$C_{n,m} = 0 \text{ si } n, m \neq 0$$

La única excepción es $C_{00} \neq 0$
La amplitud de oscilaciones es \rightarrow

$$v = C_{0,0}(z)$$



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

la presión del gas en cada una de las secciones de la caja paralelas al plano xy resulta homogénea.

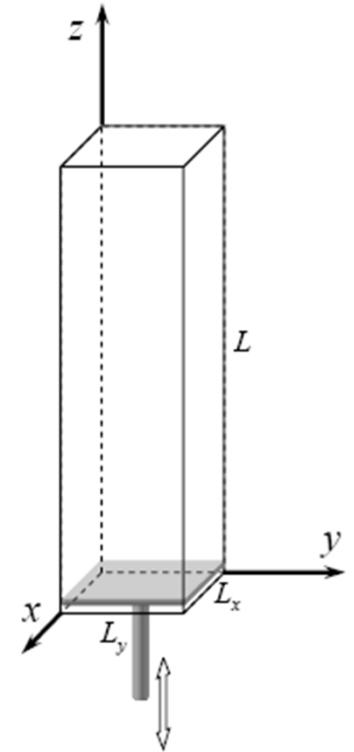
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Ecuación a solucionar

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} v(z) = 0,$$

$$v(0) = P_0, \quad \left. \frac{dv(z)}{dz} \right|_L = 0.$$

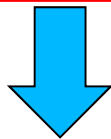


$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

SOLUCION

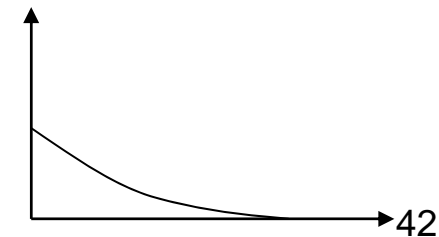


$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}v(z) = 0,$$
$$v(0) = P_0, \quad \left. \frac{dv(z)}{dz} \right|_L = 0.$$

$$v(z) = P_0 (\cos kz + \tan kL \operatorname{sen} kz)$$

$$k = \omega/c.$$

Es parte (perfil de modos) sobre problema sobre las vibraciones forzadas de una cuerda, con un extremo libre y otro obligado a desplazarse según la ley $u_0 \operatorname{sen}(\omega t)$



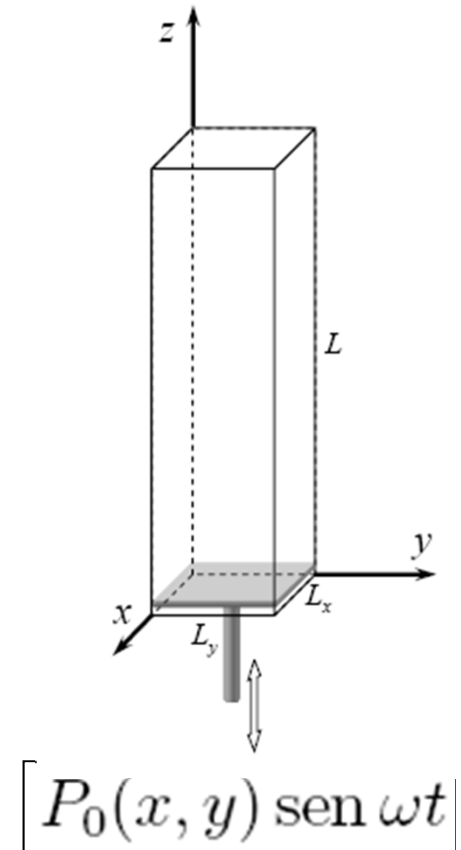
Q: Es solución de problema SL?

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Condición de resonancia
(se diverge la solución) $\tan(kL)=\infty$

$$\omega = (2n + 1)\pi c / (2L)$$



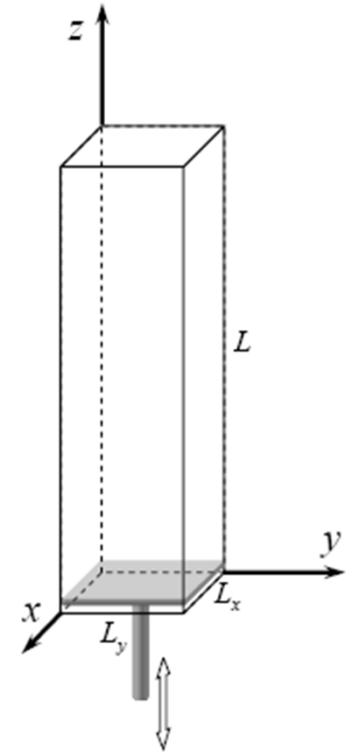
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Presión del pistón no homogénea

Supongamos que la función que describe la presión que se ejerce con el pistón coincide, es proporcional a una de las auto funciones del problema con $n, m \neq 0$

$$P_0(x, y) \propto w_{n,m}(x, y)$$



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

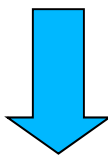
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solamente coef. C_{nm} asociado con dicha auto función será distinto de cero

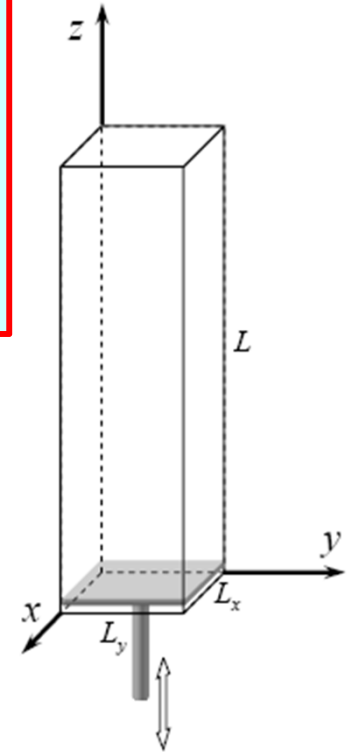
=>

la serie se reduce a un solo término.

$$v(x, y, z) = \sum_{n,m} C_{n,m}(z) w_{n,m}(x, y);$$



$$C_{n,m}(z) w_{n,m}(x, y)$$



$$[P_0(x, y) \text{ sen } \omega t]$$

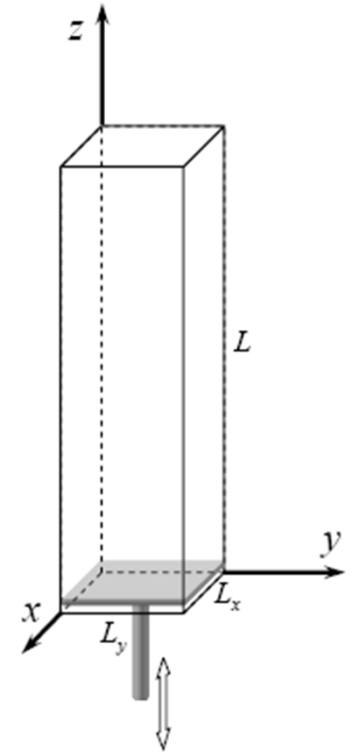
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Solución de Ec.

$$\frac{d^2 C_{n,m}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 - \Omega_{n,m}^2}{c^2} C_{n,m}(z) = 0,$$
$$C_{n,m}(0) = P_{n,m}, \quad \left. \frac{dC_{n,m}(z)}{dz} \right|_L = 0;$$

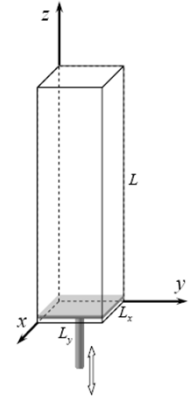
Dependerá de relación entre ω
y Ω_{nm} .



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$

Hay 3 posibilidades:

$$C_{n,m}(z) = \begin{cases} P_{n,m} (\cos k_{n,m}z + \tan k_{n,m}L \text{ sen } k_{n,m}z), & \text{si } \omega > \Omega_{n,m} \\ P_{n,m}, & \text{si } \omega = \Omega_{n,m} \\ P_{n,m} \frac{e^{-k_{n,m}z} + e^{-2k_{n,m}L} e^{k_{n,m}z}}{e^{-2k_{n,m}L} + 1}, & \text{si } \omega < \Omega_{n,m} \end{cases}$$

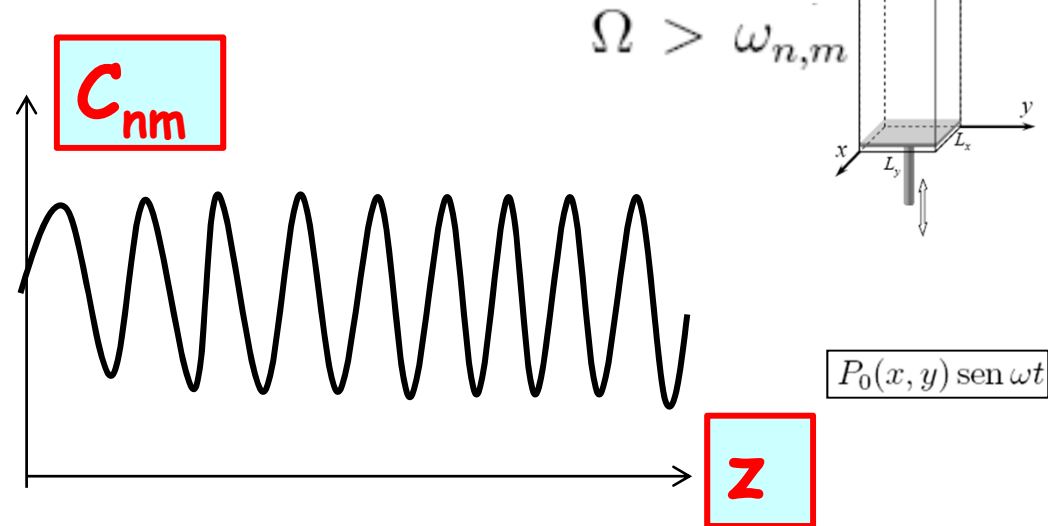
$$k_{n,m} \equiv \sqrt{|\omega^2 - \Omega_{n,m}^2|/c}$$

Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Posibilidad 1 (ERROR P141 APL) DEBE SER si $\omega > \Omega_{nm}$

la modulación de la amplitud de las oscilaciones en la dirección z



Condición de Resonancias: Cuando la frecuencia de la perturbación coincide, con ciertas frecuencias propias del gas encerrado en el mismo prisma pero sin pistón (extremo abierto).

$$k_{n,m}L = (2n' + 1)\pi/2$$

n' - 0,1,2,3...

n, m constantes del problema (describen perfil de excitación)

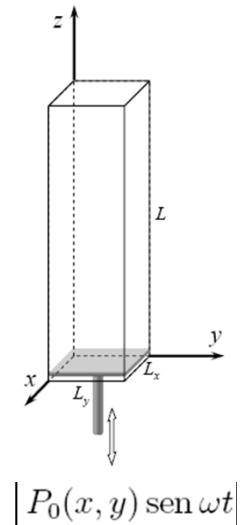
Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

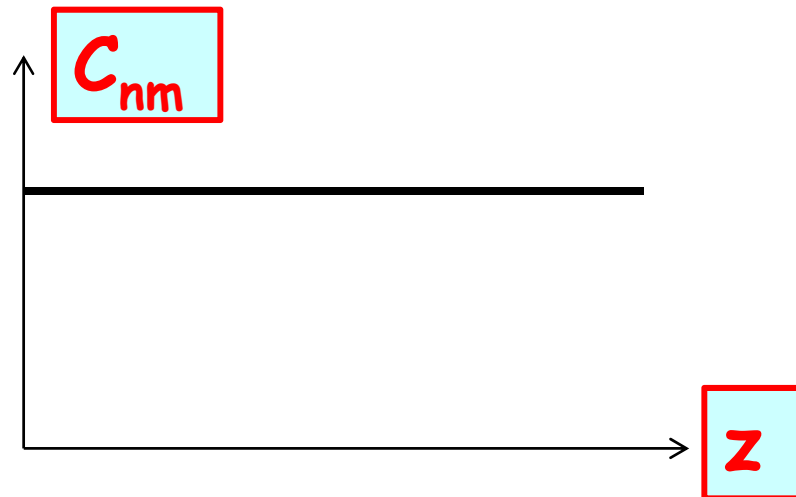
Posibilidad 2

$$\omega = \Omega_{n,m}$$

no existe modulación de la amplitud de las oscilaciones en la dirección z.



$$C_{nm}(z) = P_{nm}$$

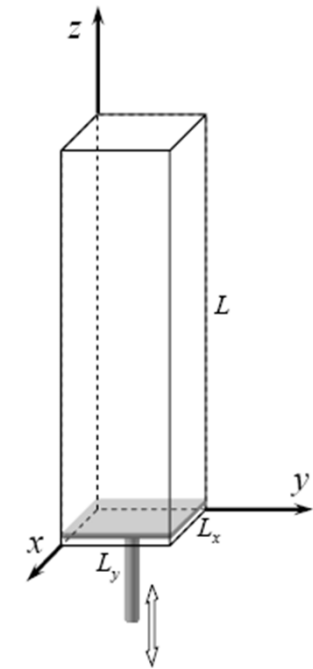
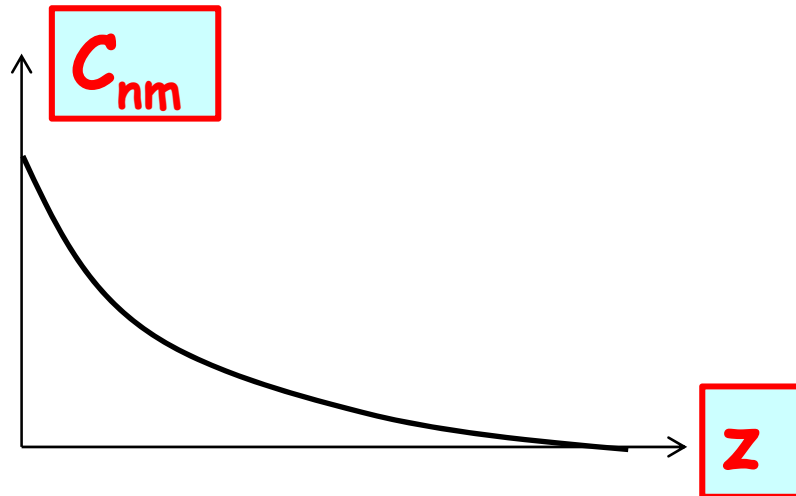


Métodos Matemáticos en Física

L6A Método Fourier: Barra gruesa

Posibilidad 3

$$\omega < \Omega_{n,m}$$



$$P_0(x, y) \sin \omega t$$

Si la longitud de la caja L mucho mas grande que las dimensiones de su sección $L_{x,y}$,



La amplitud de las oscilaciones en la dirección z decrece exponencialmente.

Métodos Matemáticos en Física

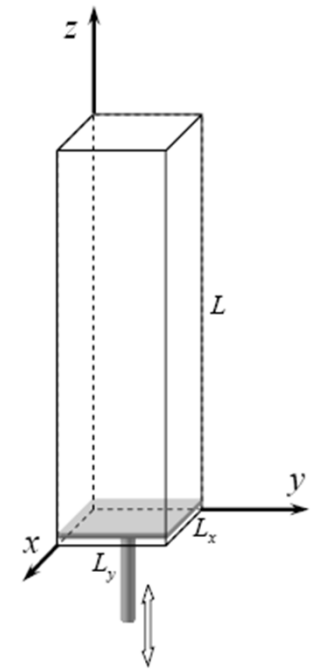
L6A Método Fourier: Barra gruesa

Para

$$\omega < \Omega_{n,m}$$

Las oscilaciones se atenúan \rightarrow desaparecen, a distancias suficientemente grandes (con longitud característica k_{nm}^{-1})

\rightarrow Para dimensiones del recipiente $L \gg L_{x,y}$, será imposible reconstruir la función que describe la presión que ejerce el pistón a partir de la amplitud de las oscilaciones del gas detectadas en el extremo opuesto



$$P_0(x, y) \text{ sen } \omega t$$