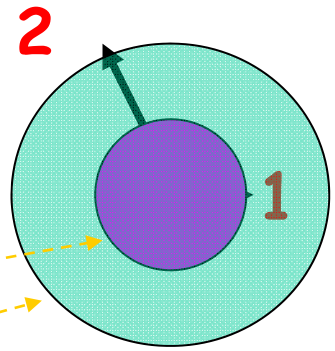
Métodos Matemáticos en Física

Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

PROBLEMA 1

Calculo de distribución de potencial electroestático
Anillo: con potencial exterior/interior conocido

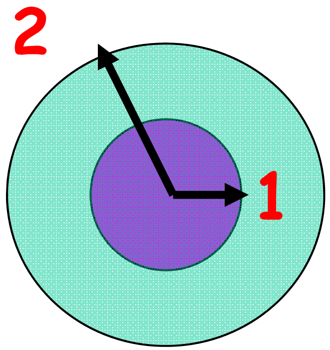
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \\ u(1, \varphi) = 0, \\ u(2, \varphi) = \cos\varphi, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$



ANTES: vamos a discutir primero solución general de Ec. Laplace en coordinadas cilíndricas (2D)

Métodos Matemáticos en Física
Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

Formulación MATEMATICA



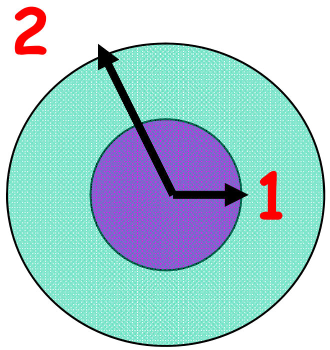
$$\triangle\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \cancel{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}$$

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & R_1 < \rho < R_2, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), & \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Solucionamos usando separacion variables (SV)

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$



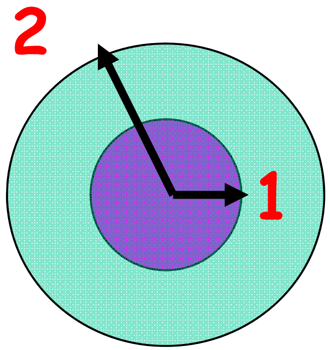
$$\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\varphi) \qquad \lambda = n^2 \qquad n \geqslant 0$$

Ec. Para parte radial es

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0 \qquad \boxed{*}$$

Como vimos antes, si $\boxed{n \neq 0}$

$$R(\rho) = \rho^{\mu}$$

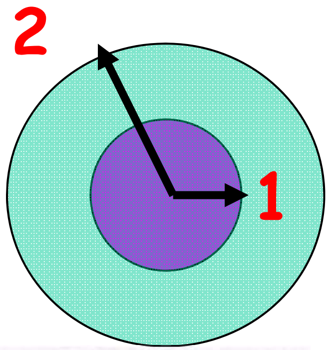


Sustituyendo solucion en Ec * encontramos

$$\mu^2 = n^2, \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \pm n \quad (n > 0)$$

Ya vimos (L7A-WEB) que:
para n=0 la Ec. (*) tiene soluciones tipo (1) y log(ρ)

Los "ladrillos" de la solución de Ec. Laplace en sistema circular 2D son:

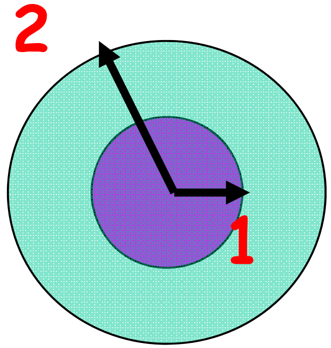


$$1, \quad \ln \rho, \quad \rho^n \cos(n\varphi), \quad \rho^n \sin(n\varphi), \quad \rho^{-n} \cos(n\varphi), \quad \rho^{-n} \sin(n\varphi)$$

Solucion general de Ec. Laplace en coord.cilíndricas 2D:

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi) \right].$$

Usando ortogonalidad de autofunciones angulares ("ladrillos" de solución), obtenemos ecuaciones para coeficientes [n=0⇔Const(φ)]

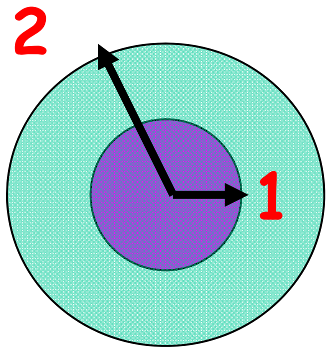


$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\,ds, \\[2ex] a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\,ds \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Se resuelven coeficientes a_0, b_0

Métodos Matemáticos en Física
Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

Usando ortoganalidad de autofunciones ("ladrillos" de solución), obtenemos ecuaciones para coeficientes [n≠0⇔≠Const(φ)]



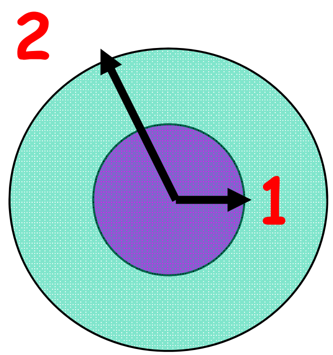
$$
\begin{cases}
a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s) \cos(ns)\, ds, \\
a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s) \cos(ns)\, ds
\end{cases}
$$

2

Se soluciona respecto de coeficientes a_n, b_n

Métodos Matemáticos en Física
Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

Usando ortoganalidad de auto funciones ("ladrillos" de solución), obtenemos ecuaciones para coeficientes [n≠0⇔≠Const(φ)]

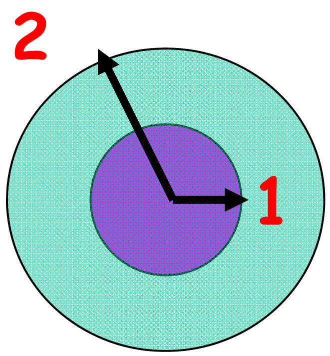


$$
\begin{cases}
c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\sin(ns)\,ds \\[2ex]
c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\sin(ns)\,ds
\end{cases}
$$

3

Se soluciona en respecto de coeficientes c_n, d_n

PROBLEMA 2 ←→ complicamos mas CC



$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos\varphi, & \\ u(2, \varphi) = \sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Solución general: Ver inicio de esta lección y Cap 7 APL:

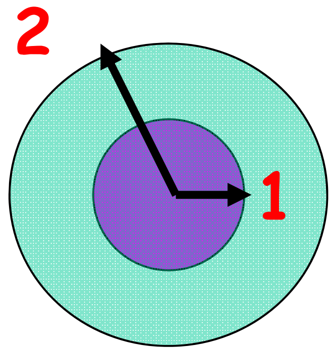
$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi)]$$

Usando CC

Todos coeficientes <u>excepto</u> a_1, b_1, c_1, d_1, son iguales a cero

Sustituyendo valores ρ de CC en Solución general , Como es valido para todos φ ➔

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0, \\ 2c_1 + \dfrac{d_1}{2} = 1 \end{cases}$$



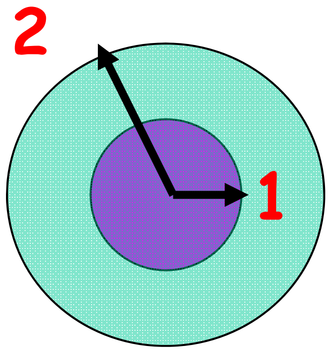
$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -\frac{2}{3}$$

Solución final:

u(ρ,φ)=(-ρ/3+4/3ρ)cosφ+2/3[ρ-1/ρ)senφ

Volvemos a PROBLEMA 1

Calculo de distribución de potencial electroestático
Anillo: con potencial exterior/interior conocido



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \\ u(1,\varphi) = 0, \\ u(2,\varphi) = \cos\varphi, \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

Métodos Matemáticos en Física

Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

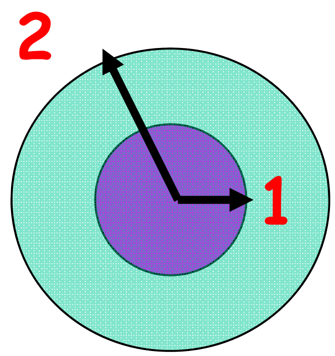
Usando CC Para a_0, b_0

$$a_0 + b_0 \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 0$$

$$b_0 \ln(2) = Cos(\varphi)$$

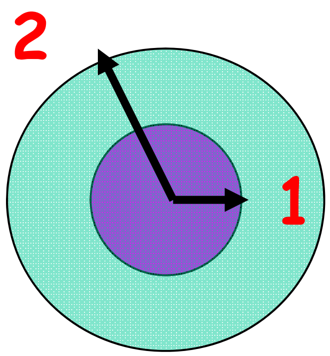
$$\Rightarrow b_0 = 0$$



Usamos CC para hallar a_n, b_n, ($n \neq 0$)

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\cos(ns)\, ds, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\cos(ns)\, ds \end{cases}$$

Usamos CC para a_n, b_n.



$$a_n \times 1 + b_n \times 1 = 0$$

$$a_n \times 2^n + b_n \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Cos(\varphi)Cos(n\varphi)\,d\varphi$$

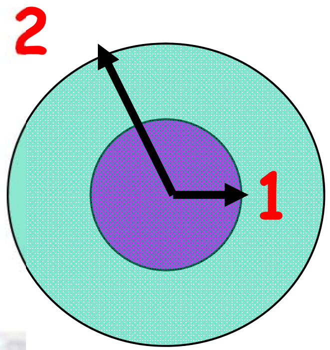
=> *Sol* NO trivial solo para n=1

$$a_1 \times 1 + b_1 \times 1 = 0$$

$$a_1 \times 2^1 + b_1 \times \frac{1}{2^1} = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{2} = 1$$

Usando CC

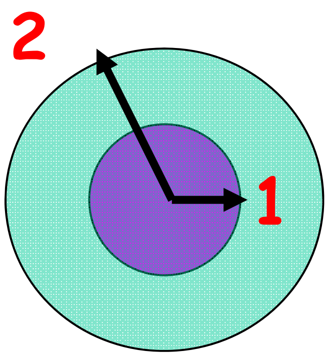
$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 1 \end{cases}$$



$$a_1 = 2/3, \; b_1 = -2/3$$

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s) \sin(ns)\, ds \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s) \sin(ns)\, ds \end{cases}$$

$$\boxed{c_n = d_n = 0}$$



Solución:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2}{3}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi.$$

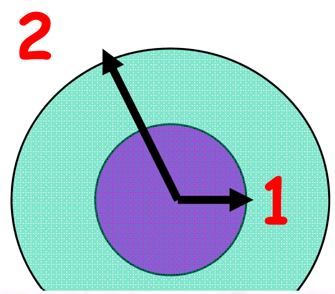
Aunque fuimos por vía formal (formulas 1-3), también se podria intuir que la función que satisface CC y es combinación lineal de Soluciones de Ec. es

$$u(\rho, \varphi) = a_1 \rho \cos\varphi + b_1 \rho^{-1} \cos\varphi$$

Micro-evaluacion de Jueves 20
Tipos de problemas (solo discos, sectores – 2D)

<u>Ec de onda</u>
Ec de Difusion
<u>Ec. Laplace</u>
Ec. Poisson

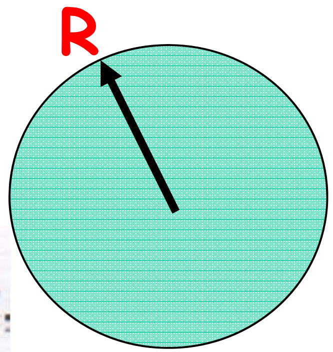
Métodos Matemáticos en Física
Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule



RECORDAMOS
Solución general Ec. Laplace en disco:

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi)]$$

Convertimos anillo en un disco
Consideramos solución general del problema:

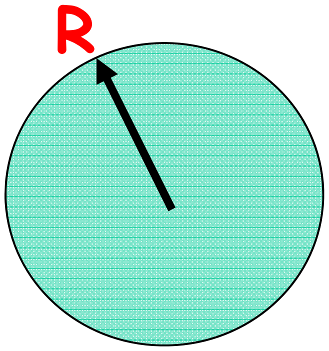


$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leqslant \rho < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

Hay que "eliminar" soluciones que tienen anomalías para r=0 de solución general, en particular:

$$\ln \rho, \quad \rho^{-n} \cos(n\varphi), \quad \rho^{-n} \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nos queda solución general:



$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)]$$

Con coeficientes calculados usando CC:

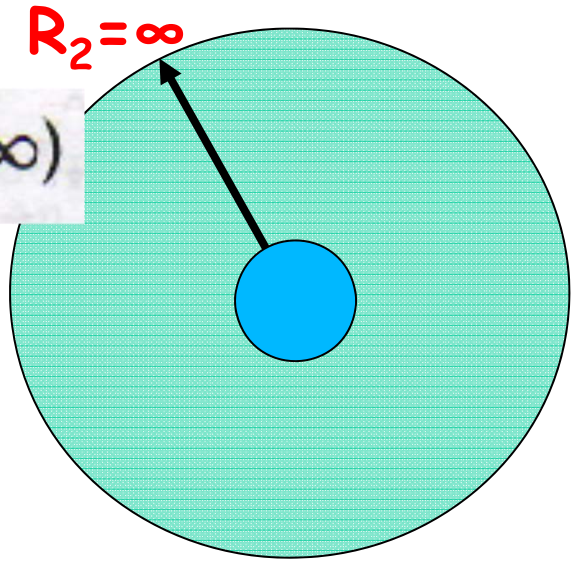
$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi \qquad (n>0)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi.$$

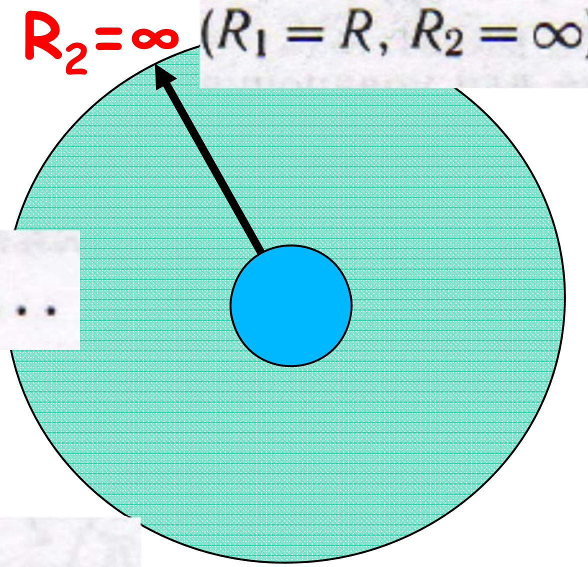
Convertimos anillo en hueco
Consideramos solución general de problema EXTERNO:

$$(R_1 = R,\ R_2 = \infty)$$



Formulación matemática:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, & R < \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \\ u(R,\varphi) = f(\varphi), & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$



$(R_1 = R,\ R_2 = \infty)$

Hay que "**eliminar**" soluciones que tienen anomalías para $\rho=\infty$, en particular:

$$\ln \rho, \qquad \rho^n \cos(n\varphi), \qquad \rho^n \sin(n\varphi), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Solución general será:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

Con coeficientes calculados usando CC:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi \qquad (n > 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi.$$

Analógicamente a anterior, desarrollamos la solución de Ec. Laplace para circulo ($0<\rho<R$) con condición de contorno de segunda especie: [Ej. Difusion en CELULA en 2D]

En el contorno:

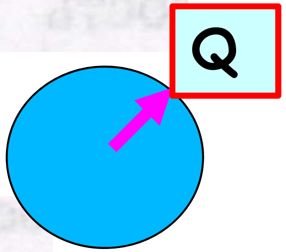
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}$$

Solución general

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

Con CC:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = f(\varphi)$$



coeficientes

$$a_n = \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi,$$

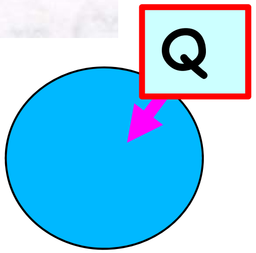
$$b_n = \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Analógicamente a anterior, desarrollamos la solución de Ec. Laplace para **problema exterior** al circulo (ρ>R) con condición de contorno de segunda especie: [Ej. Flujos de Calor en la lamina con hueco]

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

En el contorno (problema exterior):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = -\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -f(\varphi)$$



coeficientes

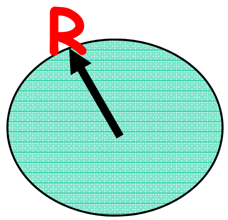
$$a_n = \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi,$$

$$b_n = \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

PROBLEMA 4
CLASE

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leqslant \rho < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ u(1,\varphi) = \cos^2\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$cos^2(A) = \frac{1}{2}\left[\cos 2A + 1\right]$$



Con coeficientes calculados usando CC:

Integrales de 0➔2π de $Cos^2(n\varphi)$ (función simétrica en respecto de $\varphi=\pi$) con $Cos(n\varphi)$ son finitos

Integrales de 0➔2π de $Sen(n\varphi)$ (función anti-simétrica en respecto de $\varphi=\pi$) con $Cos(n\varphi)$ (función simétrica) son nulos ($b_n=0$)

➔ Se quedan solo coeficientes a_0 y a_n ➔

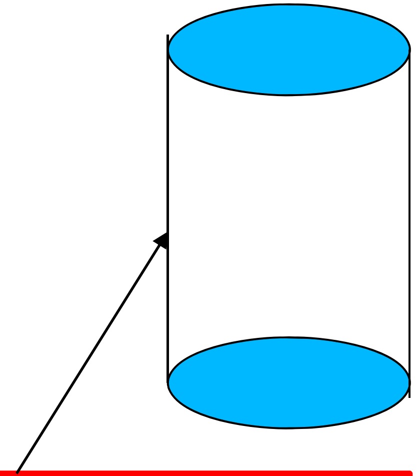
como

$$cos^2(A) = \frac{1}{2}\left[\cos 2A + 1\right]$$

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^2\cos(2\varphi)$$

Métodos Matemáticos en Física
Lección_7_PROBLEMAS_Laplace_Circule

PROBLEMA: tenemos un cilindro infinito con flujo de calor conocido sobre la superficie exterior $du/d\rho = \cos^3\varphi$
Hallar distribución de la temperatura interior de cilindro:



$du/d\rho = \cos^3\varphi$

Problema a solucionar:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = \cos^3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

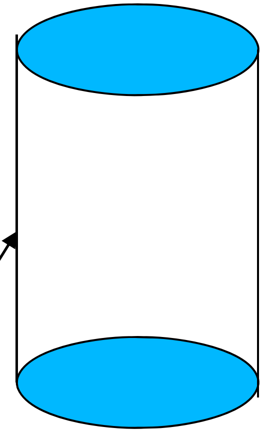
Primero tenemos que comprobar que el problema tiene solución i.e. que:
(C- circulo exterior)

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

De hecho:

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \cdot R\, d\varphi =$$

$$= \frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{R}{4}\int_0^{2\pi} [\cos(3\varphi) + \cos\varphi]\, d\varphi = 0.$$



$du/d\rho = \cos^3\varphi$

Además, como:

$$\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(3\varphi)$$

$$a_n = \frac{R}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi,$$

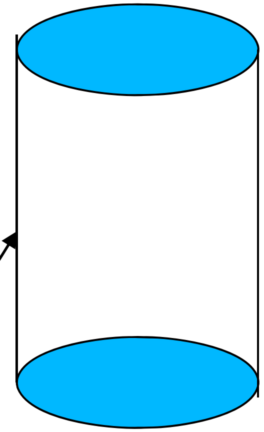
$$b_n = \frac{R}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)\, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{3}{4}R \qquad a_3 = \frac{1}{12}R$$

Los demás coeficientes
$a_n=0$ $(n\neq 1,3)$, $b_n=0$

Solución final:

$$u(\rho, \varphi) = C + \frac{3\rho}{4}\cos\varphi + \frac{\rho^3}{12R^2}\cos(3\varphi)$$



$du/d\rho = \cos^3\varphi$

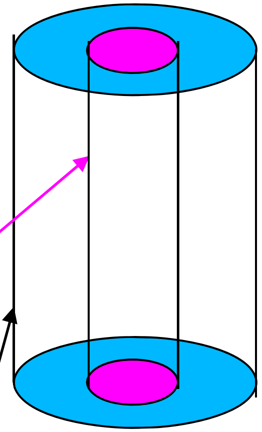
C- una constante de integración

Aparece porque solución no depende de temperatura de fondo

Nota: para poder solucionar problema similar pero para anillo (cilindro infinito con hueco central, i.e. con ($R_1<\rho<R_2$)
Debería cumplirse siguiente condición:

$$R_1 \int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\, d\varphi = R_2 \int_0^{2\pi} f_2(\varphi)\, d\varphi$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho}(R_1, \varphi) = f_1(\varphi),$$



$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(R_2, \varphi) = f_2(\varphi)$$

La solución también se obtendrá con la precisión de una constante de integración