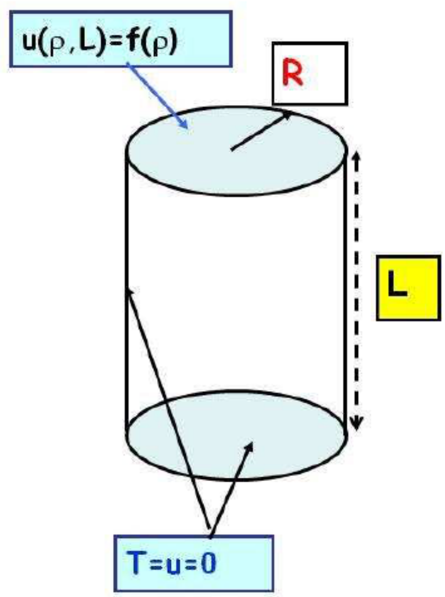
Problemas de Metodos Matematicos III.

Problema 1 Ecuacion Laplace en cilindro

Consideracion comparativa de dos problemas Laplace en un cilindro con distintas condiciones de contorno.

Problema 1

Hallar la distribución de la temperatura en un cilindro con superficie curvada y una de las bases a temperatura cero (ver. Figura 1) suponiendo que la temperatura de la parte superior plana tiene una distribución angularmente simétrica: $u(\rho, z = L, \varphi) = f(\rho)$.



Solución:

1. El problema a resolver será:

$$\Delta u(\rho, z) = 0$$
$$CC1: \ u(\rho, 0) = 0$$
$$CC2: \ u(R, z) = 0$$
$$CC3: \ u(\rho, L) = f(\rho)$$
$$CC4: \ u(\rho = 0, \varphi, z) < \infty$$

2. La solución no depende de la variable angular

   Separamos variables:

   $u = R(\rho) * Z(z)$

3. Buscamos desarrollo de la solución por autofunciones de los problemas SL auxiliares (ρ, z) para neutralizar las segundas derivadas de Lapaciano.

   En este caso las CC son homogeneas solo en la dirección radial y no-homogeneas en la dirección vertical (z)

   Estos hechos influirán a la hora de tomar la decisión respecto al signo de la constante de separación

   $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

   $u = R(\rho) * Z(z)$

   $\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}]}{R} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\lambda$

4. Con $\lambda > 0$ para auxiliar se elige el *signo negativo* antes de constante de separación para poder desarrollar la solución por autofunciones radiales ortogonales (ya que en esta dirección tenemos CC homogeneas):

   $$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda Z = 0 \\ CC1 => Z(0) = 0 \\ CC2 => Z(L) = \text{finitos} \end{pmatrix}$$

   $Z(z) = A\cosh(\sqrt{\lambda}z) + B\sinh(\sqrt{\lambda}z)$

5. Entonces, al reducir el número de derivadas parciales, el problema para R(ρ) queda así:

   $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}] + \lambda R = 0$

6. Multiplicamos la ecuación por ρ^2

   Problema radial entonces queda como:

   $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}] + \lambda\rho^2 R = 0$

7. Solución general de la ecuación radial es combinación lineal de funciones de Bessel y Neumann de orden cero:

   $R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + DN_0(\sqrt{\lambda}\rho)$

   Debido a que la solución es acotada en el punto $\rho = 0 => D = 0$

8. Cálculo de autovalores:

   Escribimos la solución general:

   u=$\sum J_0(\sqrt{\lambda}\rho)[A\cosh(\sqrt{\lambda}z) + B\sinh(\sqrt{\lambda}z)]$

   De las CC1 deducimos: $u(\rho = R, \varphi, z) = 0 => \sum R(\rho = R)\Phi(\varphi)Z(z)Q(t) = 0$

9. Como $\Phi(\varphi); Z(z)$ pueden tener cualquier valor, debe cumplirse la condición

   $R(\rho = R) = J_0(\sqrt{\lambda}R) = 0$

   Entonces la ecuación para hallar autovalores del problema radial será así:

   $J_0(\sqrt{\lambda_n}R) = 0$

10. Llamando $\mu_0^{(n)}-$ nulos de función Bessel de orden cero, entonces:

    $\sqrt{\lambda_n}R = \mu_0^{(n)}$

    $\lambda_n = [\frac{\mu_0^{(n)}}{R}]^2$

11. Para satisfacer las CC2 en z=0 A_n=0 y escribimos la solución general como

    $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\sinh(\sqrt{\lambda_n}z)$

12. Usaremos CC3: $u(\rho, L) = f(\rho)$ para hallar los coeficentes A_n

    $u(\rho, L) = f(\rho) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\sinh(\sqrt{\lambda_n}L)$

13. Usando la ortogonalidad de autofunciones radiales, obtenemos los coeficientes:

    Para hallar A_n multiplicamos ambas partes por $J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)$ e integramos entre los límites $\int\limits_0^R \rho d\rho$

Obtendremos el resultado usando relaciones:

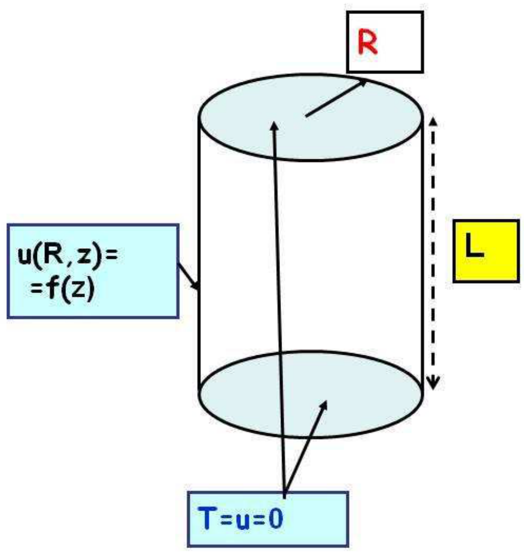
$$\left\{ \begin{array}{c} \int\limits_0^a xJ_\nu(\frac{x_{\nu k}}{a})J_\nu(\frac{x_{\nu l}}{a})dx = \frac{a^2}{2}[J'_\nu(\frac{x_{\nu k}}{a})]^2\delta_{kl} \\ J'_0(x) = -J_1(x) \end{array} \right\}$$

Obtenemos forma de coeficientes:

$$A_n = \frac{\int\limits_0^R f(\rho)J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\rho d\rho}{\left\| J_0(\frac{\mu_n}{R}\rho) \right\|^2 \sinh(\sqrt{\lambda_n}L)} = \frac{2}{R^2}\frac{\int\limits_0^R f(\rho)J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\rho d\rho}{[J_1(\mu_n)]^2 \sinh(\sqrt{\lambda_n}L)}$$

Problema 2

Hallar la distribución de temperatura en un cilindro con superficie curvada en contacto con un foco térmico $u(\rho = R, z) = f(z)$ y ambas bases planas a temperatura cero (ver. Figura 2).



Solución:

1. Formulación matemática del problema a resolver:

   $\Delta u(\rho, z) = 0$

   $CC1: \ u(\rho, 0) = 0$

   $CC2: \ u(R, z) = f(z)$

$CC3: \ u(\rho, L) = 0$

$CC4: \quad u(\rho = 0, \varphi, z) < \infty$

La solución no depende de variable angular

2. Separamos variables:

   $u = R(\rho) * Z(z)$

   Buscamos desarrollo de solución por autofunciones - soluciones de problemas auxiliares SL (ρ, z) para neutralizar las segundas derivadas del Lapaciano

3. En este caso las CC son homogeneas solo en dirección vertical (z) y inhomogeneas en dirección radial (ρ)

   Estos hechos influirán a la hora de tomar la decisión respecto a signo de constante de separación

   $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

   $u = R(\rho) * Z(z)$

   $\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}]}{R} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda$

4. Con $\lambda > 0$ en problema auxiliar *se elige el signo positivo* antes de la constante de separación para poder desarrollar la solución por autofuciones ortogonales en direccion (z) ya que en esta dirección tenemos CC homogeneas.

   $$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda Z = 0 \\ CC1 => Z(0) = 0 \\ CI2 => Z(L) = 0 \end{pmatrix}$$

   $Z(z) = A\sin(\frac{\pi n}{L}z)$

   $\lambda_n = (\frac{\pi n}{L})^2$

5. Entonces, al reducir el número de derivadas parciales del problema para R(ρ) se queda así:

   $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}] - (\frac{\pi n}{L})^2 R = 0$

   Multiplicamos la ecuación por ρ^2

Problema radial entonces queda como:

$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}] - (\frac{\pi n}{L})^2\rho^2 R = 0$

6. Solución general de función radial es combinación lineal de funciones de Bessel modificadas y funciones McDonald de orden cero:

   $R(\rho) = CI_0(\frac{\pi n}{L}\rho) + DK_0(\frac{\pi n}{L}\rho)$

   Debido a que la solución es acotada en punto $\rho = 0 => D = 0$

7. Escribimos la solución general

   u(ρ, z)=$\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\frac{\pi n}{L}\rho)\sin(\frac{\pi n}{L}z)$

8. Usaremos CC2: $u(\rho, L) = f(\rho)$ para hallar los coeficientes

   $u(R, z) = f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n I_0(\frac{\pi n}{L}R)\sin(\frac{\pi n}{L}z)$

9. Usando la ortogonalidad de autofunciones $\sin(\frac{\pi n}{L}z)$ en direccion (z) obtenemos los coeficientes:

   Para hallar A_n multiplicamos ambas partes por $\sin(\frac{\pi n}{L}z)$ e integramos entre los límites $\int\limits_0^L dz$

   Obtendremos resultado:

   $C_n I_0(\frac{\pi n}{L}R) = \frac{2}{L}\int\limits_0^R f(z)\sin(\frac{\pi n}{L}z)dz$

10. Resultado final:

    $u(\rho, z) = \frac{2}{L}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^L f(z)\sin(\frac{\pi n}{L}z)dz}{I_0(\frac{\pi n}{L}R)} * I_0(\frac{\pi n}{L}R)\sin(\frac{\pi n}{L}z)$