

Tema 5: Espacio euclídeo. Isometrías

José M. Salazar

Noviembre de 2016

Tema 5: Espacio euclídeo. Isometrías

- Lección 5. Espacio euclídeo. Isometrías.

Índice

- 1 Espacio euclídeo.
 - Definición de espacio vectorial euclídeo
 - Representación matricial de un producto escalar
 - Norma y ángulo
 - Ortogonalidad
 - Método de Gram-Schmidt
 - Subespacios ortogonales y complemento ortogonal
 - Proyección ortogonal
- 2 Isometrías.
 - Primeras definiciones y propiedades
 - Caracterización matricial en endomorfismos
- 3 Isometrías en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
 - Isometrias en $\mathbb{R}^2$
 - Isometrias en $\mathbb{R}^3$

Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo

Definición (Producto escalar)

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que verifica:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo $u, v \in V$.
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$.
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $u \neq \bar{0}$.

Diremos que la aplicación determina un **producto escalar** asociado a V . El par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio vectorial euclídeo**.

Propiedades y ejemplo

Propiedades

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Entonces:

- $\langle v, \bar{0} \rangle = 0$ para todo $v \in V$.
- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = \bar{0}$.

Ejemplo (Producto escalar usual)

Un ejemplo de espacio vectorial euclídeo es $\mathbb{R}^n$ con el **producto escalar usual** que se define del siguiente modo:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

siendo $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Matriz de Gram

Definición (Matriz de Gram)

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar asociado. Dada una base de V , $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, denotamos $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Llamamos **matriz de Gram** respecto de B a la matriz $A = (a_{ij})$.

Por la propiedad 1 del producto escalar, A es una matriz simétrica.

Representación matricial del producto escalar

Una vez conocida A , es inmediato calcular $\langle x, y \rangle$ para cualesquiera dos vectores $x, y \in V$ haciendo uso de dicha matriz. En efecto, si x e y tienen coordenadas con respecto a B

$$X_B = (x_1, \dots, x_n) \quad Y_B = (y_1, \dots, y_n),$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X^t A Y \end{aligned}$$

siendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. La *expresión matricial del producto escalar* con respecto a la base B es

$$\langle x, y \rangle = X^t A Y.$$

Representación matricial del producto escalar

Definición

Una matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que es **definida positiva** si para todo $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq \bar{0}$, se tiene $X^t A X > 0$

Proposición

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica y definida positiva, entonces

$$\langle X, Y \rangle = X^t A Y, \text{ con } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

determina un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. De hecho, todos los productos escalares definidos en $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales de tipo finito tendrán una expresión matricial de este tipo.

Representación matricial del producto escalar

Los siguientes criterios permiten decidir cuándo una matriz simétrica es definida positiva y, por tanto, determina un producto escalar.

Proposición (Criterio de Sylvester)

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y sea $\Delta_i = \text{Det}(A_i)$, donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Entonces A es definida positiva si y solo si $\Delta_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposición (Signo de los autovalores)

Una matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ es definida positiva si y solo si todos los autovalores son positivos.

Norma

Definición (Norma de un vector)

La **longitud, norma o módulo** de un vector $v \in V$ se define como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Si $\|v\| = 1$, se dice que v es **unitario**.

Propiedades de la norma

Propiedades

- $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = \vec{0}$.
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$.
- Dado $v \neq \vec{0}$, $\frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario.
- Para todo $u, v \in V$, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Esta propiedad se conoce como **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.
- Para todo $u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Esta propiedad es la **desigualdad triangular** o de Minkowski.

Ángulo

Definición (Ángulo entre dos vectores)

*Para todo par de vectores no nulos $u, v \in V$, el **ángulo** entre u y v se define como el único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$.*

Ortogonalidad

Definición (vectores ortogonales. Bases ortogonales)

- Dados $u, v \in V$ no nulos, diremos que son **ortogonales** o **perpendiculares** si $\langle u, v \rangle = 0$. Obsérvese que u, v son ortogonales si y sólo si $\cos \theta = 0$, siendo θ el ángulo entre u y v , lo que es equivalente a decir que $\theta = \pi/2$.
- Una **base** B de vectores de V es **ortogonal** si sus vectores son ortogonales entre sí. De ser también unitarios, se dice que la base es **ortonormal**.

Propiedades

Propiedades

- Si $\{u_1, \dots, u_k\}$ son vectores no nulos de V , ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.
- Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortogonal de V , entonces $B' = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\}$ es una base ortonormal de V .

Proposición

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonal de V . Entonces, dado $x \in V$,

$$x = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n,$$

esto es, $X_B = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2}$. A las coordenadas x_i se las llama **coeficientes de Fourier** de x con respecto a B .

Teorema de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Dada una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo V , existe una base ortogonal $B' = \{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $L(u_1, \dots, u_r) = L(e_1, \dots, e_r)$ para todo $r = 1, \dots, n$. Los vectores de la base B' serán:

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \\ e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 \\ &\vdots \\ e_n &= u_n - \frac{\langle u_n, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \dots - \frac{\langle u_n, e_{n-1} \rangle}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} \end{aligned}$$

Corolario

Si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V , entonces existe una extensión a una base ortogonal.

Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal

Definición (Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal)

- Sea $v \in V$ no nulo y sea W subespacio vectorial de V . Se dice que v es **ortogonal a W** , $v \perp W$, si $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$.
- Dos **subespacios vectoriales** W_1, W_2 de V se dicen **ortogonales**, $W_1 \perp W_2$, si para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ se tiene que $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$.
- Si W es un subespacio vectorial de V de dimensión $k < n$, el conjunto

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$
 se denomina **complemento ortogonal** de W

Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal

Proposición

En las condiciones de la definición anterior, se tiene:

- $v \neq \bar{0}$ cumple $v \perp W$ si y sólo si es ortogonal a los vectores de una base de W .
- $W_1 \perp W_2$ si y sólo si los vectores de una base de W_1 son ortogonales a los vectores de una base de W_2 .
- $W^\perp$ es un subespacio vectorial de V de dimensión $n - k$. De hecho, $V = W \oplus W^\perp$.

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal)

Sea W un subespacio vectorial de V . Como $V = W \oplus W^\perp$, todo $v \in V$ se escribe de modo único como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in W^\perp$. El vector w recibe el nombre de **proyección ortogonal** de v sobre W y se denota por $w = p_W(v)$, mientras que u es la proyección ortogonal de v sobre $W^\perp$ y se escribe $u = p_{W^\perp}(v)$.

Proyección ortogonal

El siguiente resultado proporciona un método rápido para calcular proyecciones ortogonales sobre un subespacio vectorial.

Proposición

Sea W un subespacio vectorial de V y sea $v \in V$. Si $B_W = \{w_1, \dots, w_r\}$ es una base ortogonal de W , entonces, la proyección ortogonal de v sobre W es

$$p_W(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_r \rangle}{\|w_r\|^2} w_r$$

Definición de isometría

En esta sección nos interesamos por el estudio de aquellas aplicaciones lineales $f : V \rightarrow V'$ definidas entre espacios vectoriales euclídeos que conservan longitudes y ángulos.

Definición (Isometría)

*Un homomorfismo $f : V \rightarrow V'$, con V y V' espacios vectoriales euclídeos, es una **isometría** o aplicación ortogonal si conserva el producto escalar, es decir, si*

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in V.$$

Entendemos que el producto escalar de cada lado de la igualdad es el del espacio euclídeo correspondiente.

Propiedades

Propiedades

- f es una isometría si y sólo si $\|x\| = \|f(x)\|$.
- Si f es una isometría, el ángulo α entre $x, y \in V$ no nulos y el ángulo β entre $f(x), f(y) \in V'$ coinciden.
- Si f es una isometría, f es inyectiva.
- Si $f : V \rightarrow V'$ es una isometría con $\dim(V) = \dim(V') = n$, entonces f es un isomorfismo y f^{-1} es una isometría.
- Si f es una isometría y $\{u_1, \dots, u_r\}$ son ortogonales (resp. ortonormales), entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_r)\}$ son también ortogonales (resp. ortonormales).
- Sea $f : V \rightarrow V'$ con $\dim(V) = \dim(V') = n$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V . Si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base ortonormal de V' entonces f es una isometría.

Caracterización matricial para endomorfismos

A partir de ahora, consideraremos las isometrías $f : V \rightarrow V$, con V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita.

Proposición (Caracterización matricial)

Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si B es una base ortonormal de V , entonces f es una isometría si y sólo si su matriz asociada, $A = M(f, B)$, respecto de B es ortogonal, esto es, $A^t = A^{-1}$.

Definición (Transformaciones directas e inversas)

*Sea $f : V \rightarrow V$ una isometría. Si $\det(f) = 1$, esto es, el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas es 1, decimos que f es una **transformación directa**. Si $\det(f) = -1$, decimos que f es una **transformación inversa**.*

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: rotación

Aunque los próximos resultados son válidos para espacios euclídeos de dimensión 2 y 3 cualesquiera y se generalizan fácilmente a espacios de dimensión n , trabajaremos sólo con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dotados del producto escalar usual.

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^2$: rotación)

Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ una isometría. Pueden darse dos situaciones:

i) Si $\det(f) = 1$, para toda base ortonormal B

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Se dice que f es una **rotación** o **giro** de ángulo α . El valor de α no depende de la base ortonormal elegida, sino de f . Dos casos particulares son $\alpha = 0$ ($f = \text{Id}$) y $\alpha = \pi$ ($f = -\text{Id}$).

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: simetría

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^2$: simetría)

ii) Si $\det(f) = -1$, para toda base ortonormal B

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

El valor de α depende de la base elegida. De hecho, existe una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2\}$ tal que

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se dice que f es una **simetría** respecto de la recta $L(v_1)$. Se tienen dos subespacios propios: $L(v_1)$ con autovalor 1 y $L(v_2)$ con autovalor -1.

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: simetría

Los autovalores 1 y -1 y los autovectores v_1 y v_2 se calculan así:

$$p(t) = \begin{vmatrix} \cos \alpha - t & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

De modo que $t = \pm 1$. Para $t = 1$, se obtiene el subespacio propio de ecuación

$$(\cos \alpha - 1)x + (\operatorname{sen} \alpha)y = 0.$$

Con las fórmulas del ángulo doble:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2(\alpha/2) - \operatorname{sen}^2(\alpha/2) \\ \operatorname{sen} \alpha &= 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \end{aligned}$$

queda

$$-2\operatorname{sen}^2(\alpha/2)x + (2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2))y = 0$$

Isometrías en $\mathbb{R}^2$: simetría

Si $\operatorname{sen}(\alpha/2) \neq 0$, resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2)x - \cos(\alpha/2)y = 0$$

Este autoespacio asociado al autovalor 1 (recta de simetría) es la recta de vector director $v_1 = (\cos(\alpha/2), \operatorname{sen}(\alpha/2))$.

Al ser la matriz simétrica, el autoespacio asociado al autovalor -1 será perpendicular a v_1 , y tendrá como vector director a $v_2 = (-\operatorname{sen}(\alpha/2), \cos(\alpha/2))$.

Isometrías en $\mathbb{R}^3$: rotación

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^3$)

Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y una isometría $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$. Pueden darse dos situaciones:

- i) Si $\det(f) = 1$, existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Se dice que f es una **rotación** de ángulo α alrededor de la recta $L(v_1)$ engendrada por el vector v_1 (autovector con autovalor asociado 1). El plano $L(v_2, v_3)$ es invariante por f , que actúa sobre él generando una rotación de ángulo α . Si $\alpha = 0$, $f = \text{Id}$.

Isometrías en $\mathbb{R}^3$: rotación compuesta con simetría

Teorema (Isometrías de $\mathbb{R}^3$)

- ii) Si $\det(f) = -1$, existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Aquí, v_1 es autovector con autovalor asociado -1 .

- Si $\alpha = 0$, se dice que f es una **simetría en $\mathbb{R}^3$** respecto de $L(v_2, v_3)$.
- Si $\alpha \neq 0$, f es la composición de la rotación del apartado i) con la simetría mencionada arriba.