

1. Matrices



A las 12.33 a.m. del 17 de diciembre de 1972 despegó el último de los proyectos Apolo, el Apolo 17, con el fin de explorar la superficie lunar.

La tripulación del Apolo 17, formada por Eugene A. Cernan, Ronald E. Evans y Harrison H. Schmitt, tomó esta fotografía de la superficie terrestre cuando se encontraba a 40 000 km de distancia.

Las matrices han sido y siguen siendo herramientas potentísimas para la investigación espacial. Gracias al cálculo matricial es posible organizar y manipular, con ayuda de los ordenadores, las ingentes cantidades de datos que se utilizan en la investigación espacial.

1. Concepto de matriz o tabla

Listas numéricas

Una lista numérica es un conjunto de números dispuestos uno a continuación del otro, tal como se indica en el ejemplo siguiente:

2	3	5	-5	$\frac{1}{2}$	100	-8
A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)

La **lista** se designa por **A(I)**, donde la letra **I**, llamada **índice**, identifica cada una de las posiciones. Así, A(1) indica el elemento que ocupa la primera posición, A(2) el que ocupa la segunda, etc. El índice **I** es una variable que toma como valores, en este caso, los números naturales del 1 al 7.

La lista numérica **A(I)** suele indicarse también con el símbolo **(a_i)**, donde **a_i** es un **elemento genérico** de la lista e **i** es el subíndice que indica su posición.

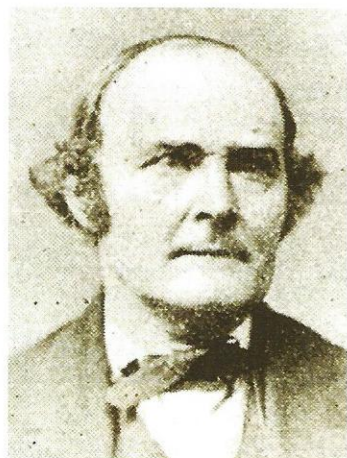
Por ejemplo, las notas de matemáticas de los 40 alumnos de una clase de 2.º de Bachillerato se pueden representar con la lista numérica M(I); I recorre, en este caso, los números naturales desde el 1 al 40.

Tablas numéricas

Consideremos las notas obtenidas por 40 alumnos de 2.º de Bachillerato en siete asignaturas. Estos resultados se pueden registrar en una tabla de 40 filas y 7 columnas como la siguiente:

		Asignaturas						
		1	2	3	4	5	6	7
Alumnos	1							
	2					9		
	3							
	40							

Tabla A(I, J)



Arthur Cayley (1821-1895). Jurista y matemático inglés, propició con sus investigaciones el origen y desarrollo posterior del cálculo matricial. Junto a su coetáneo Sir Rowan Hamilton (1805-1865) encabezaron la prestigiosa escuela de matemáticos ingleses del siglo XIX.

En esta tabla, cada fila corresponde a un alumno y en ella se registran las notas de sus siete asignaturas, mientras que cada columna determina una asignatura y, por tanto, las notas de los 40 alumnos en esta columna.

La posición de cada casilla de la tabla queda determinada por un par de números, uno que indica la fila y otro la columna.

El conjunto de las casillas o posiciones de esta tabla se designa por $A(I, J)$, donde I y J son dos índices; I recorre los números correspondientes a las **filas**, es decir, desde 1 hasta 40, y J recorre los correspondientes a las **columnas**, es decir, desde 1 hasta 7.

La tabla numérica $A(I, J)$ suele indicarse también con el símbolo (a_{ij}) , donde a_{ij} representa un **elemento genérico**, i es el subíndice fila que recorre los números naturales del 1 al 40, y j el subíndice columna que hace lo propio con los números del 1 al 7.

El número de elementos de la tabla numérica $A(I, J)$ o (a_{ij}) es, en este caso, 280.

Matrices

En matemáticas, tanto las listas como las tablas de elementos reciben el nombre genérico de **matrices**.

Si m y n son los valores mayores que toman I y J , respectivamente, es posible disponer entonces los elementos de la matriz en una tabla rectangular de m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El símbolo (a_{ij}) designa la matriz completa, mientras que a_{ij} representa un elemento cualquiera de la misma.

El número de filas y de columnas recibe el nombre de **dimensión** de la matriz, y se designa por $m \times n$.

Si $m = n$ se dice que la matriz es de **orden n** .

El número total de elementos de la matriz (a_{ij}) es $m \cdot n$.

Matrices iguales

La igualdad de matrices generaliza la igualdad de vectores de R^2 y R^3 .

Si escribimos los vectores en forma matricial, se tiene:

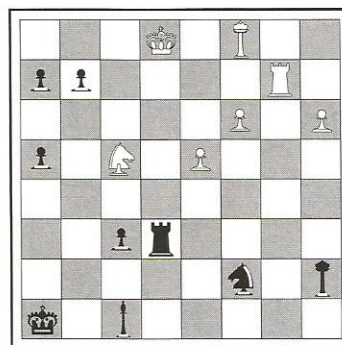
$$(x \ y \ z) = (x' \ y' \ z') \Leftrightarrow x = x', y = y', z = z'$$

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & b & c \\ a & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} d & 7 & 4 \\ 2 & e & g \end{pmatrix}$$

son iguales si $d = 3$, $b = 7$, $c = 4$, $a = 2$, $e = 1$ y $g = 8$.



Un tablero de ajedrez representa una matriz de ocho filas y ocho columnas en la que se disponen las fichas.



①	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) descubrió un cuadrado tal que todas las filas horizontales y verticales suman 260. Es todavía más curioso el hecho de que un caballo de ajedrez que comience sus movimientos en la casilla número 1 pueda recorrer el tablero entero siguiendo la numeración consecutiva del 1 al 64.

2. Algunos tipos de matrices

En este apartado vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de las que es conveniente recordar su nombre.

Atendiendo a la forma

Matriz fila es aquella que tiene sólo una fila.

Ejemplo de matriz fila: $A = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9)$.

Las matrices fila se escriben, en la práctica, de la misma forma que los pares, ternas, cuaternas, etc. Es decir, $(2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n + 1, \dots)$ son matrices fila, aunque al mismo tiempo representen también vectores.

Matriz columna es aquella que sólo tiene una columna.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada es aquella que tiene igual número de filas que de columnas; en caso contrario se llama **rectangular**.

Ejemplo de matriz cuadrada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo de matriz rectangular: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

El conjunto formado por todos los elementos de la forma a_{ii} de una matriz cuadrada se llama **diagonal principal**.

El conjunto formado por todos los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ de una matriz cuadrada de orden n recibe el nombre de **diagonal secundaria**.

Matriz traspuesta. Dada una matriz A , se llama traspuesta de A , y se representa por tA , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

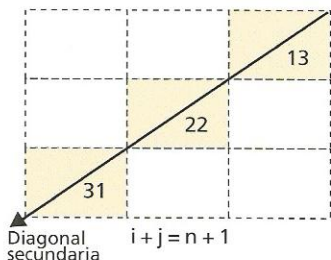
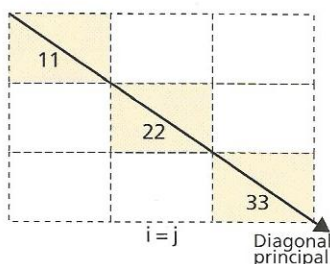
La primera fila de A es la primera columna de tA , la segunda fila de A es la segunda columna de tA , etc.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

De la definición se deduce fácilmente que, si A es de dimensión $m \times n$, entonces la matriz tA es de dimensión $n \times m$.

Matriz simétrica. Se llama así a toda matriz cuadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos de matrices simétricas: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$



Para una matriz cuadrada se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal.

Traza (A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Traza (A) = $1 + 3 + 2 = 6$

MATRIZ SIMÉTRICA

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Si una matriz coincide con su traspuesta, se llama simétrica.

Matriz antisimétrica. Se llama así a toda matriz cuadrada tal que $a_{ij} = -a_{ji}$. Como consecuencia de ello, la diagonal principal de una matriz antisimétrica es la formada por ceros.

Ejemplos de matrices antisimétricas: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices antisimétricas también se llaman **hemisimétricas**.

Atendiendo a los elementos

Matriz nula es aquella en la que todos sus elementos son 0. La matriz nula se representa por **0** y se llama también **matriz cero**.

La matriz $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

es la matriz nula de orden 3.

La matriz $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

es la matriz nula de dimensión 2×4 .

Matriz diagonal es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

son matrices diagonales.

Matriz escalar es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

son matrices escalares.

Matriz unidad, o identidad, es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

son matrices unidad, y se designan por I_2 e I_3 .

Matriz triangular es una matriz cuadrada en la que todos los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

triangular superior

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

triangular inferior

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si una matriz coincide con la opuesta de la traspuesta, se llama antisimétrica.

ALGUNOS EJEMPLOS DE MATRICES

Las tablas de sumar y multiplicar que todos hemos utilizado, la disposición de los alumnos en clase (filas $\times$ columnas), las casillas de un tablero de ajedrez, las apuestas de la lotería (los 49 números están dispuestos en un cuadrado de 7×7), la disposición de los puntos en una pantalla de ordenador (modo texto: 24 filas $\times$ 80 columnas)... son ejemplos de matrices.

MUY IMPORTANTE

Los términos matriz diagonal, escalar, unidad, triangular, simétrica y antisimétrica se refieren únicamente a matrices cuadradas.

3. Operaciones con matrices

Suma y diferencia de matrices

La suma de matrices es una generalización de la suma de vectores. En los siguientes ejemplos mostramos algunos casos particulares:

$$(1, 2) + (2, -3) = (3, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Generalizamos lo expuesto en la siguiente definición:

La suma de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $S = (s_{ij})$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma de las matrices A y B se designa por $A + B$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}		b_{11}	b_{12}	b_{13}		$a_{11} + b_{11}$	$a_{12} + b_{12}$	$a_{13} + b_{13}$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	+	b_{21}	b_{22}	b_{23}	=	$a_{21} + b_{21}$	$a_{22} + b_{22}$	$a_{23} + b_{23}$
a_{31}	a_{32}	a_{33}		b_{31}	b_{32}	b_{33}		$a_{31} + b_{31}$	$a_{32} + b_{32}$	$a_{33} + b_{33}$

La suma de matrices posee las siguientes propiedades:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa).
2. $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa).
3. $A + 0 = A$ (0 es la matriz nula).
4. La matriz $-A$, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de **matriz opuesta**, ya que

$$A + (-A) = 0$$

Dos matrices son **opuestas** si su suma es la matriz nula o matriz cero.

La diferencia de las matrices A y B se representa por $A - B$, y se define así:

$$A - B = A + (-B)$$

Si representamos por $D = (d_{ij})$ la matriz diferencia de $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se tiene la siguiente relación entre los términos genéricos de las tres matrices:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

La suma y diferencia de dos matrices no está definida si sus dimensiones son diferentes.

CON CALCULADORA GRÁFICA



a) Editamos la matriz A:

[A] $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) Editamos la matriz B:

[B] $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & -4 \\ -5 & 9 & -3 \\ -8 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

c) Calculamos la matriz $A + B$:

[A]+[B] $\begin{bmatrix} 2 & 14 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & 1 \\ -6 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

d) Calculamos la matriz $A - B$:

[A]-[B] $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 7 & -12 & 7 \\ 10 & -8 & 11 \end{bmatrix}$

Producto de matrices por un número

El producto de un número real por una matriz es una generalización del producto de vectores, de sucesiones, etc., por números reales. En los siguientes ejemplos se muestra el producto de algunas matrices por números reales:

$$4 \cdot (1, 2, 3) = (4, 8, 12)$$

$$5 \cdot (1, 3, 5, 7, 9, \dots) = (5, 15, 25, 35, 45, \dots)$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 & 24 \\ 0 & -6 & 24 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalizando estos resultados se obtiene la siguiente definición:

El **producto de una matriz** $A = (a_{ij})$ **por un número real** k es otra matriz $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión que A tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k :

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por kA o $k \cdot A$.

$$\begin{matrix} k \end{matrix} \cdot \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = \begin{matrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{matrix}$$

Al número real k se le llama también **escalar**, y a este producto, **producto de escalares por matrices**.

El producto de un número por una matriz verifica las siguientes propiedades:

1. $k(A + B) = kA + kB$ (propiedad distributiva 1.ª).
2. $(k + h)A = kA + hA$ (propiedad distributiva 2.ª).
3. $k(hA) = (kh)A$ (propiedad asociativa mixta).
4. $1 \cdot A = A$ (elemento neutro).

El número **1** es el elemento unidad de los números reales; **A** y **B** matrices cualesquiera del mismo orden, y **h** y **k** números reales.

Propiedades simplificativas

1. $A + C = B + C$ es equivalente a $A = B$.
2. $kA = kB$ es equivalente a $A = B$ si k es distinto de 0.
3. $kA = hA$ es equivalente a $h = k$ si A es distinta de 0.

CON CALCULADORA GRÁFICA



a) Editamos la matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 9 \\ -8 & -4 & 3 \\ 9 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} * (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = \\ &= (A+B)A + (A+B)B = \\ &= AA + BA + AB + BB = \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned}$$

?

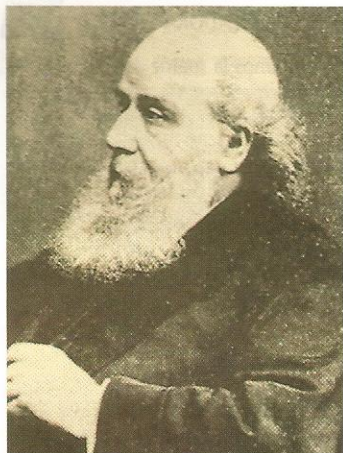
$$\begin{aligned} * (A+I)^2 &= (A+I)(A+I) = \\ &= A^2 + AI + IA + I^2 = \\ &= A^2 + 2A + I \quad \text{ya que } I = 1 \end{aligned}$$

?

MATRICES PARA LA COMUNICACIÓN

Años	Medallas		
	Oro	Plata	Bronce
1976	0	5	6
1980	80	69	46
1984	83	61	30
1988	12	10	11
1992	13	7	2
1996	44	32	25
2000	16	25	17

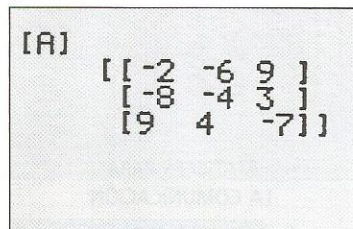
Medallas del país organizador de la olimpiada.



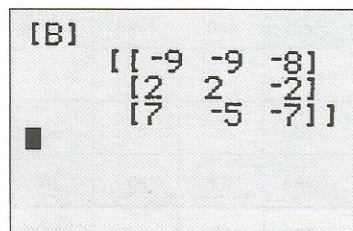
James Joseph Sylvester (1814-1897). Matemático inglés. Su estrecha amistad con Cayley cristalizó en la creación de la teoría de los invariantes algebraicos y de las matrices. Hostigado por su condición de judío, marchó en 1876 como catedrático a la prestigiosa universidad John Hopelins de Baltimore (EE. UU.). Su agitada vida puede resumirse en sus propias palabras: «Amo realmente mi ocupación».

CON CALCULADORA GRÁFICA

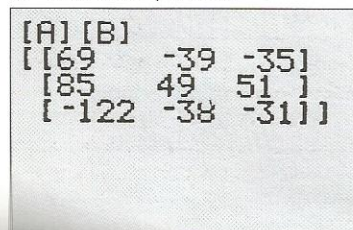
a) Editamos la matriz A:



b) Editamos la matriz B:



c) Hallamos el producto:



4. Producto de matrices. Matrices inversibles

Producto de una matriz fila por una matriz columna

En cursos anteriores se ha estudiado el producto escalar de dos vectores.

Si (x, y) y (x', y') son dos vectores de $\mathbb{R}^2$, el **producto escalar** se define del siguiente modo:

$$(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$$

Además de la interpretación geométrica del producto escalar, se pueden dar otras. Por ejemplo, si compramos 3 kilos de lentejas a 1,20 euro/kg, 2 de garbanzos a 2,50 euro/kg y 7 de alubias a 1,50 euro/kg, podemos considerar $(3, 2, 7)$ como la matriz compra y $(1,20; 2,50; 1,50)$ como la matriz precio; el coste total del pedido será entonces:

$$(3, 2, 7) \cdot (1,20; 2,50; 1,50) = 3 \cdot 1,20 + 2 \cdot 2,50 + 7 \cdot 1,50 = 19,10 \text{ €}$$

Para poder definir el producto escalar, las matrices fila deben tener el mismo número de columnas.

Análogamente, puede definirse el producto de una matriz fila por una matriz columna mediante la siguiente expresión:

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

Producto de dos matrices cualesquiera

La operación que caracteriza y hace original el cálculo matricial es el producto de matrices. La multiplicación de dos matrices cualesquiera no tiene por qué estar definida, e incluso aunque lo esté, no tiene por qué ser conmutativa. Estas indicaciones revelan la necesidad de precisar el orden de los dos factores de un producto de matrices al referirse a ellos.

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz; dicho de otro modo: si A tiene dimensión $m \times n$ y B $p \times q$, para realizar el producto $A \cdot B$ es necesario que $n = p$.

El producto de la matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ por la matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times q$, es otra matriz $P = (p_{ij})$ de dimensión $m \times q$, tal que cada elemento p_{ij} se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.

El producto de las matrices A y B se designa por $A \cdot B$ o AB .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 15 & 29 \\ -1 & -7 & 11 & 10 \\ 8 & 7 & 8 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(-1)(-1) + 5 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 11$$

•

=

Fila 2 • Columna 3 = Elemento a_{23}

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa).
2. El producto de matrices en general no es conmutativo; es decir, $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}$$

3. Si A es una matriz cuadrada de orden n , se tiene:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

siendo I_n la matriz unidad de orden n .

4. Dada una matriz A de orden n , no siempre existe otra B tal que

$$AB = BA = I_n$$

Si existe la matriz B , se dice que es la matriz **inversa** de A , y se designa por A^{-1} .

Dos matrices de orden n son **inversas** si su producto es la matriz unidad de orden n .

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es **inversible** o **regular**; en caso contrario recibe el nombre de **singular**.

5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Para no equivocarse:

$AB = 0$	no implica necesariamente que	$A = 0$ o $B = 0$
$AB = AC$	no implica necesariamente que	$B = C$
$(A + B)^2$	no es necesariamente igual a	$A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2$	no es necesariamente igual a	$A^2 - 2AB + B^2$
$(A + B)(A - B)$	no es necesariamente igual a	$A^2 - B^2$



Felix Klein (1849-1925).

El estudio de las transformaciones geométricas y su relación con las matrices se debe principalmente a este matemático, que lo desarrolló en su famoso programa Erlangen (1872).

CONVIENE TENER EN CUENTA QUE...

Como consecuencia de la definición de producto de matrices se tiene:

- El producto de matrices es una operación interna en el conjunto de las matrices de orden n con coeficientes reales.
- El producto de matrices no es una operación interna en el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes reales.



a) Editamos la matriz A:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Editamos la matriz B:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Calculamos $3A + 2B$:

$$3[A] + 2[B] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 & 15 \\ 4 & -1 & 6 & -1 \\ 15 & 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios resueltos

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar $3A + 2B$.

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 21 \\ 4 & -1 & 16 & -1 \\ 15 & 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \\ 3 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 2 \quad \quad \quad 3 \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ 3 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 4 \quad \quad \quad 3 \times 4 \end{aligned}$$

4. Calcular las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & [1] \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & [2] \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 se tiene:

$$-4A - 2B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad [3]$$

Sumando las ecuaciones [1] y [3] resulta:

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo este valor de la matriz A en la ecuación [2], y despejando la matriz B, resulta:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -18 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Matriz inversa a partir de la definición

En el epígrafe anterior hemos visto que:

Dos matrices de orden n son **inversas** si su producto es la matriz unidad de orden n .

Utilizando esta definición vamos a calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Debemos encontrar una matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices, e igualando término a término, se obtienen los sistemas

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

LA TEORÍA DE JUEGOS



Una aplicación importante del cálculo matricial es la *teoría de juegos*.

La *teoría de juegos* creada por el matemático húngaro John Von Neumann (1903-1960) y el economista austriaco Oskar Morgenstern (1902) estudia el comportamiento óptimo a seguir ante diversas estrategias posibles, basado en la consideración y habilidad de los demás participantes o jugadores.

La *teoría de juegos* sirve, por ejemplo, para resolver una negociación Gobierno-Sindicatos, para estudiar la competencia de los mercados, para ver las alternativas de los dos bandos de una guerra.

Los antecedentes a la *teoría de juegos* se remontan al «Tratado del triángulo» de Pascal en 1650, pero hasta 1944 no se formuló esta teoría en términos de una metodología científica, con la publicación de la obra de Neumann y Morgenstern titulada *Theory of Games and Economic Behavior*.

Nota: En el tema sobre determinantes se verá cómo se calcula directamente la matriz inversa sin resolver sistemas. Es el método que debe utilizarse.

Ejercicios resueltos

1. Hallar, si es posible, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

La matriz A^{-1} , si existe, será de la forma $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 6t = 1 \end{cases}$ los sistemas son incompatibles y, por tanto, la matriz A no tiene inversa.

2. Comprobar que la inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Basta multiplicar $B \cdot B^{-1}$ y ver que se obtiene la matriz unidad de orden 2.

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

6. Dependencia lineal de filas o columnas. Rango de una matriz

IDEAS CLARAS

Dos filas o dos columnas son **linealmente dependientes** si son proporcionales.

Por el contrario, son **linealmente independientes** si no son proporcionales.

Consideremos la matriz de orden 3×4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

compuesta por las filas y columnas:

$$F_1 = (1 \ 3 \ 4 \ 2) \quad F_2 = (2 \ 6 \ 8 \ 4) \quad F_3 = (5 \ 1 \ 6 \ 0)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los elementos de la fila F_2 son proporcionales a los de F_1 , y que los elementos de la columna C_3 son suma de los correspondientes de las columnas C_1 y C_2 . Se dice que F_2 depende linealmente de F_1 , y C_3 depende linealmente de C_1 y C_2 .

Una fila (o columna), I , depende linealmente de sus paralelas, $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, si existen unos números reales, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, no todos nulos, tales que:

$$I = a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 + \dots + a_n I_n$$

Si una fila (o columna) depende linealmente de otra fila (o columna), se dice que ambas filas (o columnas) son proporcionales, por serlo entonces sus elementos.

Un conjunto de filas (o columnas) de una matriz es linealmente dependiente si al menos una de ellas depende linealmente de las restantes. En caso contrario se dice que son independientes.

Se demuestra que en una matriz el número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes. A este número, común a filas y columnas, se le llama **rango** de la matriz.

Por ejemplo, en la matriz anterior,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

el número de filas linealmente independientes es 2, ya que la segunda fila depende de la primera (es proporcional a ella), mientras que la primera y la tercera son independientes, al no ser proporcionales. El rango es 2.

El **rango** o característica de una matriz es el número de filas, o columnas, linealmente independientes:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(F_1, F_2, F_3, \dots) = \text{rango}(C_1, C_2, C_3, \dots)$$

$\Rightarrow$ Si hay 3 filas y 4 columnas, como mucho habrá 3 filas independientes

Cálculo del rango por el método de Gauss

En el cálculo del rango de una matriz:

a) Se pueden suprimir sin que varíe el rango:

- Las filas o columnas nulas.
- Las filas o columnas proporcionales a otras.
- Las filas o columnas dependientes de otras.

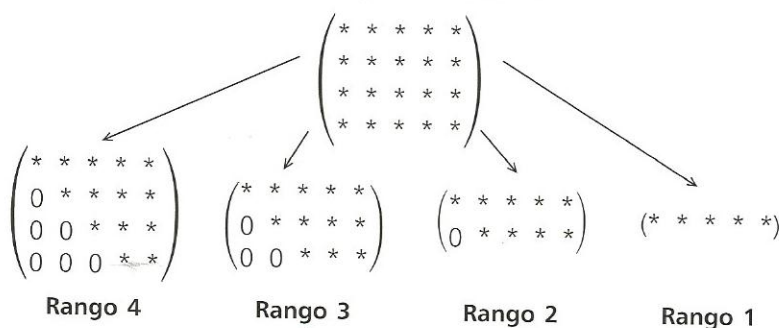
b) Se pueden realizar las siguientes operaciones sin que varíe el rango

Regla 1: Multiplicar una fila o columna por un número distinto de cero.

Regla 2: Sumar o restar una fila o columna a otra.

Aplicando estos procesos se puede llegar a una **matriz escalonada** que indica el número de filas o columnas independientes.

El siguiente esquema (los asteriscos son números cualesquiera) muestra cómo se puede pasar de una matriz a otra escalonada donde el número de filas indica el rango de la matriz.



Un esquema semejante puede hacerse para columnas.

MATRIZ ESCALONADA

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$



Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático alemán. Procedente de familia muy humilde, Gauss reveló sus aptitudes matemáticas desde la más tierna infancia. Se cuenta que a los tres años descubrió un error en las cuentas de su padre, y a los diez asombró a su maestro calculando la suma de los 100 primeros números naturales, casi instantáneamente. Estudió en Gotinga, siendo nombrado a los treinta años catedrático y director del Observatorio de esta ciudad. Aportó la representación vectorial de los números complejos, fundó la teoría de los enteros algebraicos, dio una demostración rigurosa del teorema fundamental de álgebra, expuso la teoría del error en la observación y el método de los mínimos cuadrados, desarrolló la distribución de la probabilidad normal... Junto con Arquímedes y Newton, está considerado uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos.

Ejercicios resueltos

1. Calcula el rango de: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

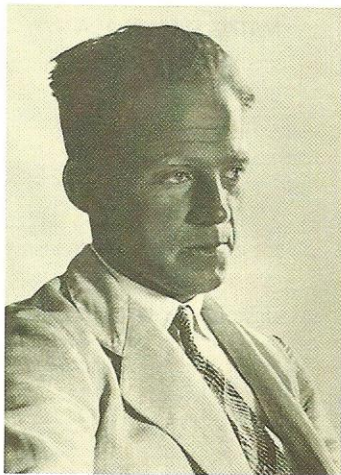
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_2]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango 2

Aquí no es necesario seguir. Las dos filas no son proporcionales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Rango 3



Werner Heisenberg (1901-1976). Físico alemán, aplicó en 1925 el cálculo matricial al estudio de la mecánica y del átomo. Fue Premio Nobel de Física en 1932.

¿PARA QUÉ SIRVEN LAS MATRICES?

Además de su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, etcétera.

La utilización de las matrices constituye actualmente una parte esencial en los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas. Más aún, los programas conocidos como Hojas de Cálculo y Bases de Datos no son más que una inmensa matriz de cientos de filas y columnas en cuyas casillas se van introduciendo datos para su procesamiento ulterior. La utilización de las Hojas o Bases de Datos implica de forma natural el empleo de operaciones con matrices, que definiremos en este capítulo.

2. Hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

La fila tercera es la suma de la primera y la segunda.

La fila cuarta es la suma de la segunda y la tercera.

Las filas primera y segunda no son proporcionales, luego $\text{rango}(A) = 2$.

3. Utilizando el método de Gauss, calcular el rango de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Intercambiar} \\ \text{la fila} \\ F_2 \text{ por la } F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - 7F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_4}{10}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Intercambiar} \\ \text{la fila} \\ F_3 \text{ por la } F_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_4 + 16F_3}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } B = 4$$

Obsérvese que el proceso seguido en todos los ejemplos consiste en reducir, mediante transformaciones elementales, la matriz inicial a otra más sencilla, cuyo rango sea más fácil de calcular.

7. Ecuaciones matriciales

La resolución de la ecuación matricial $A X = B$, siendo A inversible, permite resolver otras ecuaciones con matrices que se reducen a ella.

Puesto que el producto de matrices no es conmutativo, a la hora de multiplicar una matriz por otra conviene observar si ha de hacerse por la derecha o por la izquierda.

Antes de empezar a operar con las matrices dadas conviene despejar la matriz incógnita.

Suponiendo que las matrices que se utilizan como inversibles lo son realmente, veamos cómo se despeja la matriz incógnita X en algunas ecuaciones.

Si las matrices A , B y C son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

expresar el valor de la matriz X en función de A , B y C y sus inversas.

1. Ecuación $X A = B + I_2$

Multiplicando por la derecha por A^{-1} : $X = (B + I_2) A^{-1}$

2. Ecuación $A X + B = C$

Pasando B al segundo miembro: $A X = C - B$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} : $X = A^{-1} (C - B)$

3. Ecuación $X A + B = 2C$

Pasando B al segundo miembro: $X A = 2C - B$

Multiplicando por la derecha por A^{-1} : $X = (2C - B)A^{-1}$

4. Ecuación $A X + B X = C$

Sacando factor común X : $(A + B) X = C$

Multiplicando por la izquierda por $(A + B)^{-1}$: $X = (A + B)^{-1} C$

5. Ecuación $X A B - X C = 2C$

Sacando factor común X : $X(AB - C) = 2C$

Multiplicando por la derecha por $(AB - C)^{-1}$: $X = 2C(AB - C)^{-1}$

CON CALCULADORA GRÁFICA



Soluciones:

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

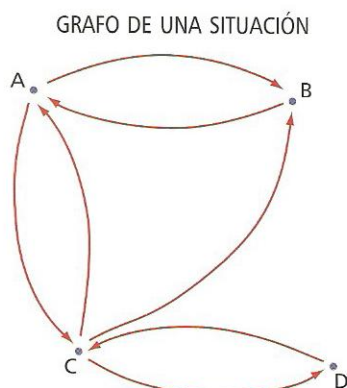
$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{8} & 0 \\ -\frac{9}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$$

8. Matrices asociadas a un grafo



Los puntos A, B, C y D del gráfico del margen representan a cuatro equipos de rescate de una región de montaña. Las flechas indican las direcciones posibles de comunicación por radio. Por ejemplo, el equipo de rescate D puede comunicar directamente con C pero no con A. El equipo D puede comunicar con A pero a través de C.

Éste es un ejemplo sencillo de **grafo**. La información dada por el grafo la podemos expresar en forma de matriz del siguiente modo:

$$\text{Del equipo } \begin{matrix} \text{al equipo} \\ \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \right. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \end{matrix} = M$$

expresamos con:
 $\begin{cases} 1 = \text{comunicar directamente} \\ 0 = \text{no comunicar directamente} \end{cases}$

M es la **matriz asociada al grafo** dado.

Si hallamos la matriz $M^2 = M \cdot M$, obtenemos:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los equipos a través de otro.

Por ejemplo, vemos que:

- $a_{11} = 2$ significa que A puede comunicarse con A de dos formas distintas a través de otro equipo:
 $A \rightarrow B \rightarrow A$ y $A \rightarrow C \rightarrow A$.
- $a_{12} = 1$ significa que A puede comunicarse con B de una sola forma a través de otro equipo: $A \rightarrow C \rightarrow B$.
- $a_{13} = 0$ significa que A no puede comunicarse con C a través de otro equipo.

Análogamente para los demás elementos de la matriz A.

La matriz

$$T = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da las formas que tienen de comunicarse por radio los cuatro equipos, bien directamente, bien a través de otro equipo.

Por ejemplo, $t_{24} = 0$ significa que el equipo B no puede comunicarse con el equipo D ni directamente ni a través de un equipo.

9. Matrices y movimientos en el plano

Expresión matricial de los movimientos en el plano

En 1.º de Bachillerato vimos una aplicación de los números complejos para el estudio de los movimientos en el plano, llegando a obtener las ecuaciones analíticas de cada movimiento.

Ahora vamos a expresar las ecuaciones de forma matricial.

Si es $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano y $P'(x', y')$ su transformado, en el siguiente cuadro se expresa la ecuación matricial para cada movimiento:

Movimiento	Representación gráfica	Ecuaciones analíticas	Forma matricial
Traslación de vector guía $\vec{v} = (a, b)$		$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) + (a, b)$
Simetría respecto del eje OX		$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Simetría respecto del eje OY		$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simetría respecto del origen		$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Giro de centro el origen y amplitud α		$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$
Homotecia de centro el origen y razón $k \neq 0$		$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

se llaman **matrices asociadas** a los movimientos respectivos y es fácil comprobar que son inversibles, es decir, tienen matriz inversa.

Movimientos sucesivos. Producto de movimientos

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano que mediante un giro de centro el origen y amplitud α se transforma en el punto $P'(x', y')$. A continuación P' se transforma mediante una simetría respecto del eje X en el punto $P''(x'', y'')$. Hemos realizado dos movimientos sucesivos en el plano o un **producto de movimientos**. ¿Cómo obtendremos la ecuación en forma matricial del movimiento que transforma P en P'' ?

$$P(x, y) \xrightarrow{g} P'(x', y') \Leftrightarrow (x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$P'(x', y') \xrightarrow{s} P''(x'', y'') \Leftrightarrow (x'', y'') = (x', y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2] resulta:

$$(x'', y'') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Análogamente se haría el caso de movimiento (no traslación) por traslación.

- Si M_1 y M_2 son las matrices asociadas a dos movimientos, no traslaciones:

$$\left. \begin{aligned} (x', y') &= (x, y) \cdot M_1 \\ (x'', y'') &= (x', y') \cdot M_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x'', y'') = (x, y) \cdot M_1 \cdot M_2$$

- Si (a, b) es el vector de una traslación y M la matriz asociada a un movimiento, no traslación:

$$\left. \begin{aligned} (x', y') &= (x, y) + (a, b) \\ (x'', y'') &= (x', y') \cdot M \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x'', y'') = [(x, y) + (a, b)] \cdot M$$

Movimientos inversos. Matrices inversas u opuestas

Sea el movimiento de ecuación:

$$(x', y') = (x, y) \cdot M$$

Multiplicando por la derecha por la matriz inversa M^{-1} , queda:

$$(x', y') \cdot M^{-1} = (x, y) \cdot M \cdot M^{-1} \Leftrightarrow (x', y') \cdot M^{-1} = (x, y)$$

En el caso de la traslación:

$$(x', y') = (x, y) + (a, b)$$

Sumando a los dos miembros la matriz opuesta de (a, b) :

$$\begin{aligned} (x', y') + (-a, -b) &= (x, y) + (a, b) + (-a, -b) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x', y') + (-a, -b) &= (x, y) \end{aligned}$$

MUY IMPORTANTE

Como el producto de matrices no es conmutativo, entonces el producto de movimientos no es conmutativo.

UN CASO ESPECIAL

Producto de dos traslaciones de vectores guías (a, b) y (c, d) :

$$\begin{aligned} (x', y') &= (x, y) + (a, b) \\ (x'', y'') &= (x', y') + (c, d) \end{aligned}$$

Sustituyendo, resulta:

$$\begin{aligned} (x'', y'') &= (x, y) + (a, b) + (c, d) = \\ &= (x, y) + (a + c, b + d) \end{aligned}$$

El producto de traslaciones sí es conmutativo, ya que:

$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

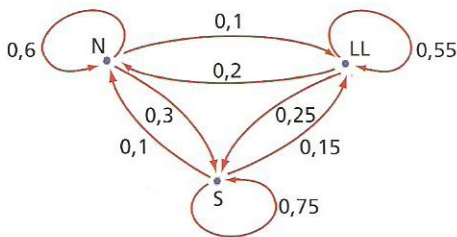
- Si M es la matriz asociada a un movimiento que transforma P en P' , el movimiento que transforma P' en P tiene por matriz asociada M^{-1} .
- Si (a, b) es el vector guía de una traslación que transforma P en P' , la traslación que transforma P' en P tiene por vector guía el opuesto $(-a, -b)$.

10. Cadenas de Markov

Consideremos el siguiente ejemplo:

En una determinada ciudad un día amanece nublado; la probabilidad de que al día siguiente esté también nublado es 0,6, la probabilidad de que esté lluvioso es 0,1 y la probabilidad de que esté soleado es 0,3. Si amanece lluvioso, la probabilidad de que al día siguiente también esté lluvioso es 0,55, de que esté nublado es 0,2 y de que esté soleado es 0,25. Y si amanece soleado, la probabilidad de que al día siguiente también esté soleado es 0,75, de que esté lluvioso es 0,15 y la probabilidad de que esté nublado es 0,10. ¿Cómo cambiarán estas probabilidades al cabo de 10 días? ¿Será posible que se estabilicen? ¿Cuántos días tendrán que transcurrir?

Podemos simplificar el enunciado formando el grafo siguiente y su matriz asociada:



$$\text{de } \begin{matrix} \text{N} \\ \text{LL} \\ \text{S} \end{matrix} \begin{matrix} \text{a} \\ \text{N} & \text{LL} & \text{S} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,55 & 0,25 \\ 0,1 & 0,15 & 0,75 \end{pmatrix} = A$$

Conviene observar que los elementos de esta matriz son probabilidades y que la suma de los elementos de cada fila es igual a la unidad. Estas matrices se llaman **estocásticas**.

La matriz A^2 da las probabilidades para cada clase de tiempo dentro de 2 días:

$$\text{de } \begin{matrix} \text{N} \\ \text{LL} \\ \text{S} \end{matrix} \begin{matrix} \text{a} \\ \text{N} & \text{LL} & \text{S} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,41 & 0,16 & 0,43 \\ 0,26 & 0,36 & 0,39 \\ 0,17 & 0,21 & 0,63 \end{pmatrix} = A^2$$

Esto quiere decir que si hoy está nublado la probabilidad de que pasado mañana esté también nublado es 0,41, la probabilidad de que pasado mañana esté lluvioso es 0,16, y así sucesivamente.

En el margen hemos calculado las potencias sucesivas de la matriz A , y observamos que a partir de la matriz A^9 las potencias sucesivas de la matriz A se estabilizan; por tanto, al cabo de 9 días las probabilidades de que amanezca nublado, lluvioso o soleado se estabilizan.

Éste es un ejemplo de **cadena de Markov**. La matriz A también se llama *matriz de transición*. Si en esta matriz no hay ningún elemento nulo, las filas llegan a estabilizarse haciéndose iguales.



Andrei Andreievich Markov (1856-1922). Matemático ruso discípulo de Tchevichev. En 1906 desarrolló las llamadas cadenas de Markov, para analizar procesos en física y en meteorología. Actualmente se aplican al análisis de los movimientos de precios de los artículos de consumo, el comportamiento de animales de laboratorio, la longitud de las filas en los aeropuertos y los supermercados, etc.

$A^3 =$

$$[A]^3 = \begin{bmatrix} 0,32 & 0,19 & 0,49 \\ 0,26 & 0,28 & 0,46 \\ 0,20 & 0,22 & 0,57 \end{bmatrix}$$

$A^9 =$

$$[A]^9 = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,23 & 0,52 \\ 0,25 & 0,23 & 0,52 \\ 0,25 & 0,23 & 0,52 \end{bmatrix}$$

$A^{10} =$

$$[A]^{10} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,23 & 0,52 \\ 0,25 & 0,23 & 0,52 \\ 0,25 & 0,23 & 0,52 \end{bmatrix}$$

Resolución de problemas

El problema

Hallar la potencia n -ésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución

Para hallar la potencia n -ésima de la matriz A vamos a aplicar el método de inducción completa o de recurrencia.

1.º paso. Calculamos las primeras potencias de A :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 1 = 1$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 3 = 1 + 2$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 6 = 1 + 2 + 3$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Se observa la ley de formación de tal manera que nos permite pasar al siguiente paso.

2.º paso. Suponemos que la matriz A^{n-1} será de la forma:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & 1+2+\dots+(n-2) \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

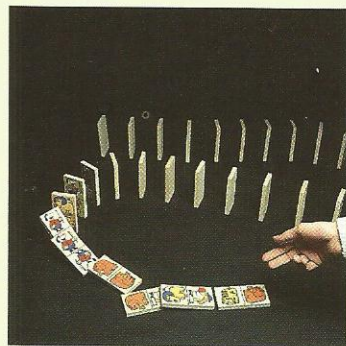
Para sumar $1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2)$ observamos que la suma de los elementos equidistantes de los extremos es constante e igual a $n-1$. ¿Cuántas de estas sumas tenemos? La mitad de los elementos, es decir, $\frac{n-2}{2}$. Por tanto, se obtiene que:

$$1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2) = (n-1) \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

3.º paso. Calculamos la potencia n -ésima:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que: $\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n-1$



Idea intuitiva del principio de recurrencia.

Ejercicios



- ✕ **1** Averiguar si son iguales las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 5^2 - 4^2 & 4 + 12 + 9 \\ -\frac{6}{3} & (2-1)(2+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (5+4)(5-4) & 5^2 \\ -2 & 2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

- 2** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular: $A + B$, $A - B$, AB , BA , AA , BB .

- ✕ **3** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular: $A + B$, $A - B$, AB , BA , AA , BB , $AAA = A^3$.

- ✕ **4** Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

calcular: $3A$, $3A + 2C$, AC , CA , AB .

- 5** Calcular $A^2 - 3A - I$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problemas



- 6** Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- 7** Demostrar que $A^2 - A - 2 \cdot I = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 8** Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 9** Se considera la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostrar que la inversa de A^n es, precisamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 10** Hallar todas las matrices A que satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ✕ **11** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la matriz $3A - {}^tA - 2I_2$.

b) Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 12** Una matriz cuadrada M es ortogonal si cumple $M' M = I$, donde I es la matriz identidad y M' es la traspuesta de M . Determinar si la matriz siguiente es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 13** Hallar las matrices simétricas de orden dos tales que $A^2 = A$.

- 14** Probar que $A^n = 2^{n-1} A$, siendo A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 15** Dada la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar X^2 y X^3 .

- 16** Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular B^3 .
b) Calcular A^3 (Sugerencia: $A = B + I$).

- 17** Calcular, por inducción sobre n :
y demostrar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

- 18** Hallar la matriz B^n , siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 19** Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

hallar A^n , para $n \in \mathbb{N}$.

- 20** Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- 21** Calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

- 22** Calcular los valores de t para los que el rango de la siguiente matriz es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

- 23** Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de t :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- 24** Hallar el rango de la siguiente matriz M , según los valores de α , β y γ :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

- 25** Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

- 26** Haciendo uso del método de Gauss, discutir el rango de la matriz B según los valores del parámetro a .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- 27** Demostrar que toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

- 28** Sea A una matriz de orden 3, demostrar que $A \cdot {}^tA$ y ${}^tA \cdot A$ son simétricas.

- 29** Estudiar las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica viendo de qué tipo son.

- 30** Demostrar que en el conjunto N de las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con x perteneciente al cuerpo de los números reales el producto es conmutativo.

- 31** Demostrar que en el conjunto T de las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \cos bx & \sin bx \\ -\sin bx & \cos bx \end{pmatrix}$$

donde b es un número real no nulo y x otro número real, el producto tiene las propiedades asociativa y conmutativa.

32 Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

- Representar la información en dos matrices.
- Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.



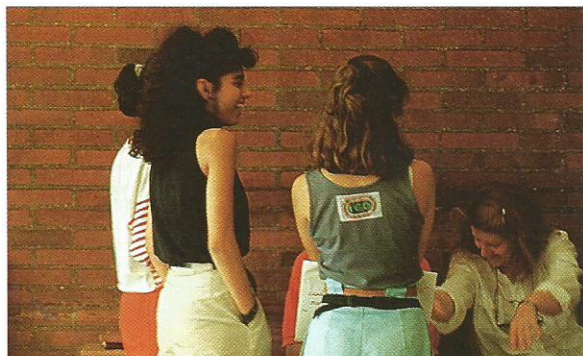
33 Un contratista puede adquirir las cantidades requeridas de madera, ladrillo, hierro, vidrio y pintura de tres proveedores. Los precios de cada proveedor para los materiales vienen dados por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

donde cada fila se refiere a un proveedor y la columna a los materiales, en el orden dado anteriormente. El contratista quiere adquirir todos los materiales de una obra al mismo proveedor. Actualmente tiene tres obras en construcción: la obra I requiere 20 unidades de madera, 4 de ladrillos, 5 de hierro, 3 de vidrio y 3 de pintura; la obra II necesita 15, 0, 8, 8 y 2, y la obra III necesita 30, 10, 20, 10 y 12 unidades respectivamente. Resumir esta información en una matriz B de orden 5×3 y formar la matriz de precios AB. Interpretar los elementos de este producto y usarlo para decir qué proveedor debe abastecer cada obra.

34 En un instituto hay alumnos y alumnas de tres pueblos, A, B y C, distribuidos por cursos según la matriz M. Una empresa de transportes elabora dos rutas a y b. Los kilómetros que recorría cada alumno o alumna se muestran en la matriz N. Si el precio por persona y kilómetro es de 12 céntimos de euro, expresar en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$M = \begin{pmatrix} P & S & T & E \\ 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \quad N = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$



35 Dado el segmento de extremos A(1, 5) y B(3, 7), hallar el segmento transformado en los siguientes movimientos:

- Una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 3)$.
- Un giro de centro el origen y amplitud 45° .
- Una homotecia de centro el origen y razón 4.
- Una simetría respecto del origen.

36 Hallar las ecuaciones de a los siguientes movimientos:

- Una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 3)$ por un giro de centro el origen y amplitud 45° .
- Un giro de centro el origen y amplitud 45° por una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 3)$.

37 Hallar las matrices asociadas a los movimientos inversos de los siguientes:

- Una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 3)$.
- Un giro de centro el origen y amplitud 45° .
- Una homotecia de centro el origen y razón 4.
- Una simetría respecto del origen.

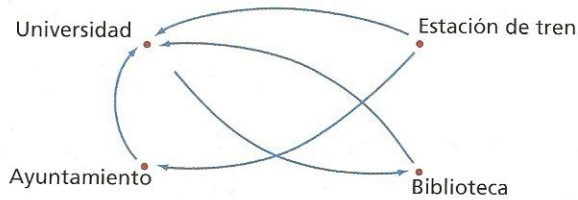
38 Se dan las transformaciones geométricas planas

$$T(x, y) = (x - y, x + y) \\ S(x, y) = (2x - y, x + y)$$

Escribir las matrices asociadas a S y a T. Escribir la matriz asociada a la transformación compuesta $S \circ T$.

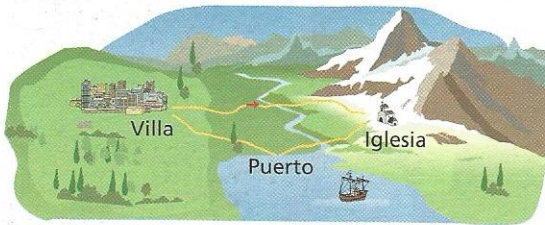


39 El grafo siguiente relaciona 4 puntos importantes de una ciudad:



Formar la matriz M asociada al grafo. ¿Qué sentido tiene la matriz M^2 ?

40 El mapa siguiente muestra la red de carreteras de una pequeña isla:



La carretera de la villa a la iglesia es tan estrecha que tiene una sola dirección.

- Formar la matriz M asociada al grafo.
- Formar la matriz M^2 e interpretar sus elementos.

41 A la salida de una gran superficie de alimentación y limpieza se ha realizado una encuesta sobre la marca de detergente que se ha adquirido.

Si han comprado el detergente A, el 60 % piensa seguir comprándolo el mes próximo, el 35 % piensa cambiar al B y el 5 % piensa cambiar al C.

Si han comprado el detergente B, el 80 % piensa seguir comprándolo el mes próximo, el 15 % piensa cambiar al A y el 5 % piensa cambiar al C.

Si han comprado el detergente C, el 90 % piensa seguir comprándolo el mes próximo; mientras que un 5 % piensa cambiar al detergente A y un 5 % al detergente B.

- Representar esta situación mediante un grafo.
- Formar la matriz asociada al grafo.
- Hallar las potencias sucesivas de la matriz asociada al grafo y ver para qué exponente se estabiliza.
- Interpretar este resultado.

Cuestiones

42 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

decir cuáles de las siguientes matrices se pueden calcular:

$$A + B, A - B, AB, BA, AA, BB$$

43 ¿Qué condición deben cumplir dos matrices cualesquiera A y B para que pueda efectuarse su suma? ¿Es ésta conmutable?

44 Producto de matrices. Condiciones para su realización. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas existan $A \cdot B$ y $B \cdot A$? Razonar la respuesta.

45 Dada una matriz A , ¿existe una matriz B tal que el producto AB o bien el BA sea una matriz de una sola fila? Aplicar la conclusión obtenida a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

46 ¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}?$$

47 Sean A , B y C matrices cuadradas de orden n . Si $AB = AC$, ¿se puede concluir que $B = C$? Poner un ejemplo sencillo que aclare la respuesta.

48 Construir matrices de dimensión 3×3 de rango 0, rango 1, rango 2, rango 3. Razonar el proceso.

49 Explicar por qué no se altera el rango de una matriz cuando a todos los elementos de una de sus filas se le suman los correspondientes de otra fila.