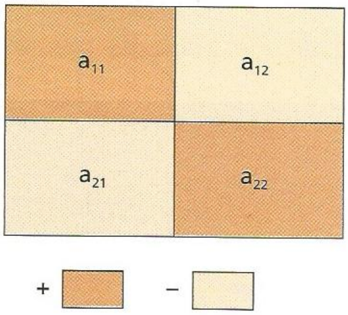
2. Determinantes

En multitud de procesos de fabricación de circuitos eléctricos y de análisis de fuerzas interviene un gran número de datos para la toma de decisiones.

Los determinantes permiten expresar de forma directa y elegante las complejidades de estos procesos, convirtiéndose en poderosas herramientas para la investigación y posterior desarrollo.

1. Determinantes de segundo orden



Dada la matriz cuadrada de segundo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama **determinante** de A al número real

$$\mathbf{det(A)} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

El determinante de una matriz cuadrada de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

— Si designamos por F_1, F_2 las filas de la matriz A, el determinante también se puede expresar por:

$$\mathbf{det(A) = det(F_1,\ F_2)}$$

— Análogamente, si C_1 y C_2 son las columnas de A, se tiene:

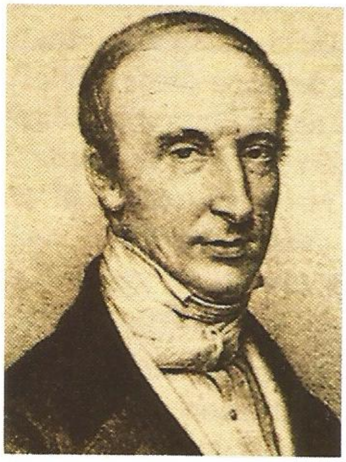
$$\mathbf{det(A) = det(C_1,\ C_2)}$$

Aplicando la definición de determinante resulta que:

— el determinante de la **matriz nula** es 0.

— el determinante de la **matriz unidad** I_2 es 1.

— el determinante de la **matriz diagonal** o **triangular** es el producto de los elementos de la diagonal principal.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). En una memoria de 1812 desarrolló la teoría de determinantes en la forma que actualmente conocemos y utilizó por primera vez la palabra determinante.

Ejercicios resueltos

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

6. $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -18$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 44$

8. $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 21 & -8 \end{vmatrix} = -56$

2. Determinantes de tercer orden

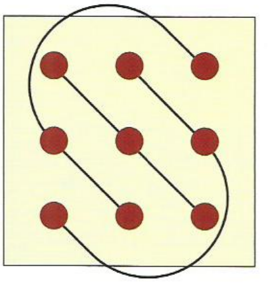
Dada la matriz cuadrada de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

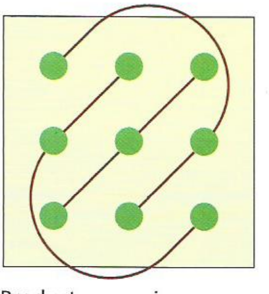
se llama **determinante** de esta matriz al número real

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$



Productos con signo +



Productos con signo –

Es fácil recordar el desarrollo del determinante de tercer orden mediante el procedimiento conocido como **regla de Sarrus**:

— Los productos **con signo más** (+) están formados por los elementos de la diagonal principal, y los de las dos diagonales paralelas, con su correspondiente vértice opuesto.

— Análogamente se forman los productos **con signo menos** (−), pero tomando ahora como referencia la diagonal secundaria.

— Si designamos por F_1, F_2, F_3 las filas de la matriz A, el determinante se puede indicar también por la expresión

$$\det(A) = \det(F_1, F_2, F_3)$$

— Análogamente, si C_1, C_2 y C_3 son las columnas de la matriz A, se tiene:

$$\det(A) = \det(C_1, C_2, C_3)$$

Pierre Sarrus (1798-1861). *Matemático francés, fue profesor de la Universidad de Estrasburgo (1826-1856). Escribió numerosas obras sobre resolución de ecuaciones numéricas (1832), integrales múltiples y determinación de órbitas de los cometas.*

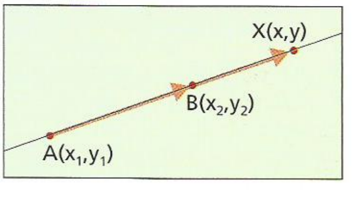
Ejercicios resueltos

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 0 - 5 - 8 - 0 + 30 = -19$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 0 - 0 + 8 - 6 = 10$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 24$

Ejemplo de aplicación de los determinantes:



La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Determinantes: definición por recurrencia

El determinante de orden 3 que se ha definido en el epígrafe anterior se puede expresar en función de determinantes de orden 2. Procediendo de modo similar se puede definir el determinante de orden 4 en función de los determinantes de orden 3, los de orden 5 en función de los de orden 4, y así sucesivamente. Se trata de una definición por recurrencia. Este proceso tiene la ventaja de dar una definición sencilla de determinante de orden 4 o superior y una regla para calcularlo.

El determinante de orden 3 en función de los de orden 2

Observar el siguiente proceso:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = agp + bhm + cfn - cgm - bfp - ahn =$$

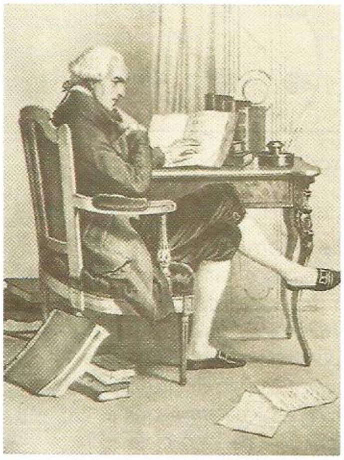
$$= a\,(gp - hn) - b\,(fp - hm) + c\,(fn - gm) =$$

$$= a \begin{vmatrix} g & h \\ n & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} f & h \\ m & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} f & g \\ m & n \end{vmatrix}$$

— Los determinantes de segundo orden, asociados a los elementos a, b y c, se obtienen suprimiendo la fila y la columna a las que pertenece el elemento.

— El signo que lo precede es + o −, según que la suma de los subíndices sea par o impar, respectivamente.

— Un determinante de tercer orden puede expresarse como suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por determinantes de segundo orden.



Pierre Simon Laplace (1749-1827). Astrónomo, físico y matemático francés. Laplace descendía de una familia pobre, pero unos vecinos acomodados ayudaron a este joven prometedor a que recibiera educación apropiada.
Estudió con D'Alembert y colaboró con Lavoisier en trabajos de química. Laplace redondeó la labor astronómica de Newton concerniente a los planetas cuyos estudios aparecieron en la monumental obra de cinco volúmenes Mecánica Celeste.
Fue autor de la Teoría analítica de probabilidades *y enunció la primera definición de probabilidad: «Casos favorables partido por casos posibles».*
El desarrollo de un determinante por una fila o columna o por varias filas o columnas se conoce con el nombre de ***regla de Laplace***.

Matriz complementaria de un elemento

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Si en A se suprime la fila i y la columna j, se obtiene una submatriz M_{ij} que recibe el nombre de **matriz complementaria del elemento a_{ij}**.

Ejemplo: La matriz complementaria del elemento de la primera fila y tercera columna de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

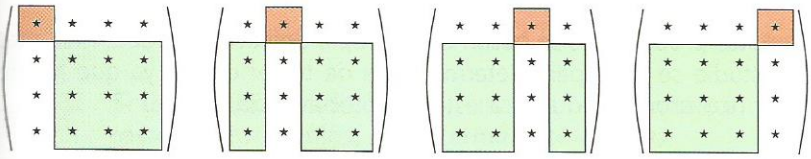
Matriz complementaria M_{11} de a_{11} en una matriz A de cuarto orden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

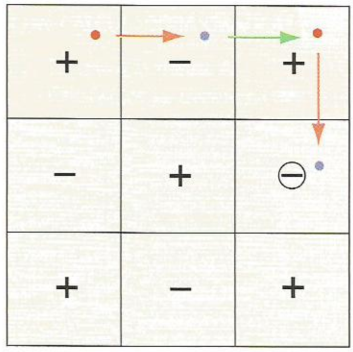
Adjunto de un elemento

Se llama **adjunto del elemento a_{ij}**, y se designa por A_{ij}, al determinante de la matriz complementaria del elemento precedido del signo + o −, según que la suma i + j de los subíndices sea par o impar.

Los adjuntos de la primera fila de la matriz A y su signo son, esquemáticamente, los siguientes:



A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
+	−	+	−



Signos de los adjuntos.

Definición de determinante por recurrencia

El determinante de la matriz A es por definición el siguiente:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

> El **determinante de una matriz cuadrada** es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados por sus adjuntos correspondientes.
>
> El valor del determinante es independiente de la fila o columna elegida para su desarrollo.
>
> El proceso de recurrencia se termina cuando se llega a los determinantes de orden 3, que se calculan directamente por la regla de Sarrus.

— De los 24 términos que se obtienen al desarrollar el determinante de la matriz A, se agrupan seis en cada uno de los cuatro sumandos anteriores.

— Esta definición rebaja una unidad el orden del determinante que se pretende calcular.

— Para evitar el cálculo de muchos adjuntos conviene que haya el mayor número de ceros posibles en la fila o columna elegida.

— En el siguiente epígrafe se estudian las reglas que permiten transformar un determinante en otro equivalente, de modo que en una fila o columna aparezcan todos ceros, salvo uno.

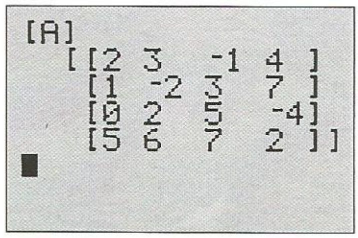
El determinante es entonces igual al producto de un elemento por su adjunto.

CON CALCULADORA GRÁFICA

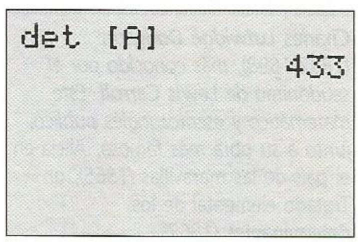
Hallar el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Editamos la matriz A:



2. Hallamos el determinante de A sólo con escribir:



4. Propiedades de los determinantes

En este epígrafe se estudian las propiedades de los determinantes atendiendo a:

— las operaciones de las matrices,

— la dependencia o no entre filas o columnas.

Estas propiedades se basan en la propia definición de determinante. Su estudio se hace para determinantes de tercer orden, ya que los de orden superior se reducen a éstos por recurrencia.

Propiedades y operaciones

1. **Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.**

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Comprobar la relación desarrollando los determinantes.

2. **Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.**

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ f & g & n \\ m & n & p \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Comprobar esta relación desarrollando los determinantes.

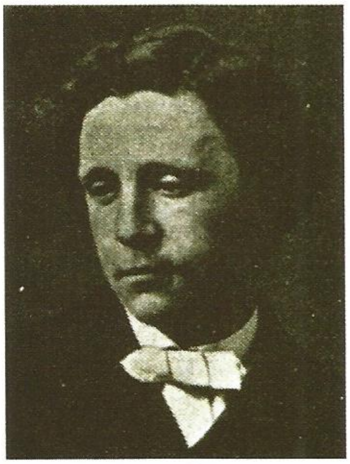
Esta propiedad permite sacar fuera del determinante los factores comunes de todos los elementos de una fila o columna.

3. **Si A y B son matrices cuadradas, entonces:**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\underset{\displaystyle 3}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \underset{\displaystyle 2}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \underset{\displaystyle 6}{\begin{vmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 13 \end{vmatrix}}$$

$$3 \cdot 2 = 6$$



Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), más conocido por el seudónimo de ***Lewis Carroll****. Este matemático y escritor inglés publicó, junto a su obra más famosa,* Alicia en el país de las maravillas *(1865), un* Tratado elemental de los determinantes *(1867).*

Propiedades y dependencia

4. Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo respecto al inicial.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & g & h \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Comprobar la relación desarrollando los dos determinantes.

5. Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna con todos los elementos nulos, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Comprobar la relación desarrollando el determinante.

6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = abp + bcm + anc - cbm - abp - acn = 0$$

7. Si dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ax & bx & cx \\ m & n & p \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

8. Si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas o columnas, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ xa + yf & xb + yg & xc + yh \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ a & b & c \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ f & g & h \end{vmatrix} = 0$$

Este resultado se obtiene aplicando las propiedades **1**, **2** y **6**.

Las propiedades **5**, **6**, **7** y **8** pueden resumirse así:

> Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente dependientes, entonces su determinante es 0.
>
> Si el determinante de una matriz cuadrada es 0, las filas y columnas son linealmente dependientes.

CON CALCULADORA GRÁFICA

1. Editamos la matriz A.
   Calculamos su determinante.

```
[A]
     [[-2  -6  9 ]
      [-8  -4  3 ]
      [9    4  -7]]
det [A]
                178
```

2. Editamos la matriz traspuesta.
   Calculamos su determinante.

```
[A]T
     [[-2  -8  9 ]
      [-6  -4  4 ]
      [9    3  -7]]
det [A]T
                178
```

Se comprueba así, con la calculadora gráfica, que A y ^tA tienen el mismo determinante. También puede hacerse directamente.

NOTA HISTÓRICA
SOBRE LOS DETERMINANTES

La primera vez que se empleó una notación parecida a la de determinante fue en una carta que Leibniz envió al marqués de L'Hôpital el 28 de abril de 1693.

Posteriormente, en 1750, el matemático suizo **Gabriel Cramer** (1704-1752) los utilizó al estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.

En Japón, el matemático **Seki Kowa** ya los conocía desde 1683.

La notación moderna se debe a **Cauchy** (1789-1857), quien en 1812 introdujo la palabra determinante, y a **Cayley** en 1846.

Transformaciones para simplificar el cálculo de determinantes

9. Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m+a & n+b & p+c \end{vmatrix}$$

En este proceso se utilizan las propiedades **6** y **1**.

10. Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m+xa & n+xb & p+xc \end{vmatrix}$$

En este proceso se utilizan las propiedades **7** y **1**.

Ejercicios resueltos

1. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila a las otras dos, resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila a las otras tres, resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

5. Cálculo de un determinante por un elemento y su adjunto

Utilizando conjuntamente las propiedades **4**, **9** y **10** del epígrafe anterior, dado un determinante se puede hallar otro que valga lo mismo y tal que todos los elementos de una fila o columna determinada sean ceros excepto uno de ellos.

El cálculo del determinante se realiza entonces aplicando la definición por recurrencia.

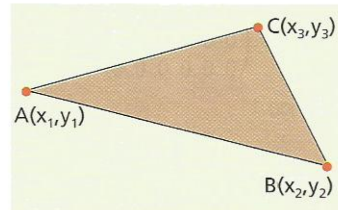
Esquema:

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ 0 & m & n & p \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Por tanto:

> El determinante es igual al producto de un elemento por su adjunto (siempre que los restantes elementos de la fila o columna a la que pertenece sean nulos).

Área del triángulo:



El área de un triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ es igual al valor absoluto de S:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

CON CALCULADORA GRÁFICA

Editamos la matriz A.
Calculamos el valor absoluto del determinante dividido por 2.

```
[A]
      [[2 -1  1]
       [5  7  1]
       [2  8  1]]
abs (det [A]/2)
             13.5
```

El área de un triángulo de vértices A(2, −1), B(5, 7) y C(2, 8) es 13,5.

Ejercicios resueltos

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 11$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

6. Rango de matrices por determinantes

IDEAS CLARAS

▶ Rango 0

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = 0$$

▶ Rango 1

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1&2&1&3&4\\ 2&4&2&6&8\\ 3&6&3&9&12 \end{pmatrix} = 1$$

ya que $F_2 = 2F_1$
$F_3 = 3F_1$

▶ Rango 2

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1&2&1&3&4\\ 2&4&-3&1&2\\ 3&6&-2&4&6 \end{pmatrix} = 2$$

ya que $F_3 = F_1 + F_2$
y las filas F_1 y F_2 no son proporcionales.

▶ Rango 3

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1&2&1&3&4\\ 2&4&-3&1&2\\ 1&0&0&3&5 \end{pmatrix} = 3$$

ya que

$$\begin{vmatrix} 1&2&1\\ 2&4&-3\\ 1&0&0 \end{vmatrix} \neq 0$$

La dependencia de líneas se basa en dos resultados recíprocos.

- Si las filas o columnas de una matriz cuadrada son linealmente dependientes, su determinante es 0.
- Si el determinante de una matriz cuadrada es 0, las filas o las columnas son linealmente dependientes.

Vamos a calcular el rango de una matriz cuyo número de filas o columnas abarca todos los casos elementales. El proceso es progresivo, y para evitar cálculos conviene suprimir las columnas dependientes.

1. **En este esquema se estudia la dependencia de 2 filas de una matriz con 2, 3, 4 ... columnas:**

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \end{array}$$

Se elige una columna no nula; por ejemplo, C_1.

A continuación se calculan sucesivamente los siguientes determinantes hasta que alguno sea distinto de 0:

$$\det(C_1, C_2), \quad \det(C_1, C_3), \quad \det(C_1, C_4), \ldots$$

— Si algún determinante es distinto de 0, el rango es 2.

— Si todos los determinantes son nulos, el rango es 1.

2. **En este segundo esquema se estudia la dependencia de 3 filas con 3, 4, 5 ... columnas:**

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \end{array}$$

Se eligen dos columnas independientes; por ejemplo, C_1 y C_2.

A continuación se calculan sucesivamente los siguientes determinantes hasta que alguno sea distinto de 0:

$$\det(C_1, C_2, C_3), \quad \det(C_1, C_2, C_4), \ldots$$

— Si algún determinante es distinto de 0, el rango es 3.

— Si todos los determinantes son nulos, el rango es 2.

3. **En este tercer esquema se estudia la dependencia de 4 filas con 4, 5 ... columnas:**

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \\ * & * & * & * & \cdots \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \end{array}$$

Se eligen tres columnas independientes; por ejemplo, C_1, C_2 y C_3.

A continuación se calculan sucesivamente los siguientes determinantes hasta que alguno sea distinto de 0:

$$\det(C_1, C_2, C_3, C_4), \quad \det(C_1, C_2, C_3, C_5), \ldots$$

— Si algún determinante es distinto de 0, el rango es 4.

— Si todos los determinantes son nulos, el rango es 3.

Ejercicios resueltos

1. Hallar el rango de la matriz de filas:
$F_1 = (1\ 3\ 0)$, $F_2 = (-1\ 2\ -4)$, $F_3 = (1\ 1\ 2)$

Las filas F_1 y F_2 son independientes, ya que no son proporcionales. Veamos si F_3 depende de F_1 y F_2.

$$\det(F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por tanto, las filas F_1, F_2 y F_3 son linealmente independientes.
Rango $(F_1, F_2, F_3) = 3$.

2. Demostrar que cualesquiera que sean los números reales a, b y c, las filas $F_1 = (1\ a\ b)$, $F_2 = (0\ 1\ c)$ y $F_3 = (0\ 0\ 1)$ son linealmente independientes.

$$\det(F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, las filas F_1, F_2 y F_3 son linealmente independientes para cualquier valor de a, b y c.
Rango $(F_1, F_2, F_3) = 3$.

3. Calcular el rango de la matriz de filas:
$F_1 = (1\ 2\ 3)$, $F_2 = (3\ 4\ 5)$, $F_3 = (5\ 6\ 7)$ y $F_4 = (7\ 8\ 9)$

Las filas F_1 y F_2 son linealmente independientes, ya que no son proporcionales. Veamos si F_3 depende de F_1 y F_2.

$$\det(F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, F_3 depende de F_1 y F_2.

Veamos si F_4 depende F_1 y F_2.

$$\det(F_1, F_2, F_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, F_4 depende de F_1 y F_2.
Rango $(F_1, F_2, F_3, F_4) = 2$.

MUY IMPORTANTE

Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

7. Cálculo de la matriz inversa por determinantes

Se estudia en este apartado un método para hallar la matriz inversa basado en los determinantes. Para matrices de orden 2 y 3 es aconsejable, pero para las de orden superior resulta engorroso y pesado por la cantidad de cálculos que hay que realizar.

Matriz adjunta

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por adj A, a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij}.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = -2$$

los adjuntos de cada elemento son

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 2 & A_{12} = -4 & A_{13} = -7 \\ A_{21} = 0 & A_{22} = -2 & A_{23} = -2 \\ A_{31} = -2 & A_{32} = 4 & A_{33} = 6 \end{array}$$

La matriz adjunta es

$$\text{adj}\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si se multiplica la matriz A por la matriz traspuesta de la adjunta, ${}^t\text{adj}\, A$, se tiene:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{{}^t\text{adj}\, A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}} = \underset{(-2) \cdot I_3}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

La matriz obtenida es una **matriz escalar** cuyos elementos no nulos tienen como valor det A. Este resultado es válido para cualquier matriz.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \cdot \underset{{}^t\text{adj}\, A}{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}} = \underset{\det A \cdot I_3}{\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}}$$

Matriz inversa

Generalizando el proceso anterior para una matriz de orden n, se tiene:

$$A \cdot {}^{t}\text{adj } A = \det A \cdot I_n$$

si $\det A \neq 0$, se tiene, $$A \cdot \frac{{}^{t}\text{adj } A}{\det A} = I_n$$

Como por definición $A\,A^{-1} = I_n$, identificando:

$$A^{-1} = \frac{{}^{t}\text{adj } A}{\det A}$$

La matriz inversa de una matriz dada es igual a la matriz traspuesta de su adjunta dividida por el determinante de la matriz dada.

Una matriz es inversible o regular si su determinante es distinto de cero. En caso contrario, se dice singular.

La matriz A del ejemplo de partida tiene inversa, ya que $\det A = -2$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}\text{adj } A$$

Conviene observar que:

— El primer paso para hallar la inversa de una matriz es calcular su determinante.

— Si el determinante es cero, se termina el proceso. La matriz no tiene inversa.

Ejercicio resuelto

Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Determinante de A: $\det A = 10 \neq 0$. Tiene inversa.

Matriz adjunta de A: $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

CON CALCULADORA GRÁFICA

Hallar la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Editamos la matriz A:

```
[A]
      [[-1  2   3]
       [4   -3  1]
       [0   1   1]]
█
```

2. Hallamos la matriz inversa de A sólo con escribir:

```
[A]-1
...-.5  .125   1.37...
...-.5  -.125  1.62...
....5   .125   -.62...
█
```

Nota: Los elementos de la matriz obtenida son números decimales y, en consecuencia, es posible cometer algunos errores. Existen modelos de calculadoras gráficas que tienen una opción Frac que permite obtener la matriz inversa de manera que los elementos sean números racionales.

```
[A]-1▸Frac
...-1/2  1/8   11/8...
...-1/2  -1/8  13/8...
...1/2   1/8   -5/8...
█
```

8. Matrices con parámetros: matriz inversa

Algunas veces en las matrices aparecen elementos con valores dados por a, b, ..., k, m, ..., llamados **parámetros**, que pueden tomar como valor cualquier número real.

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como parámetro m, ya que aparece en a_{11} y a_{22}. El valor del parámetro m puede ser cualquier número real. Para cada valor de m se obtiene una matriz distinta.

Discutir la inversión de una matriz con parámetros es hallar los valores de los mismos para los cuales la matriz es inversible o no.

Para discutir una matriz con parámetros se calcula su determinante. Obtenida la expresión del determinante, se hallan sus raíces.

— Para los valores que anulan el determinante, la matriz no tiene inversa.

— Para los restantes valores, la matriz es inversible y se puede calcular su inversa.

Conviene observar que:

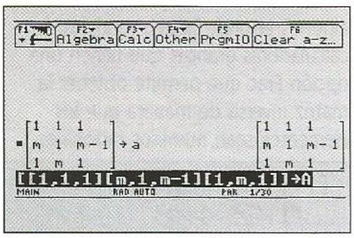
— Si la matriz es inversible, su rango coincide con su orden.

— En el siguiente ejemplo se aclara este proceso.

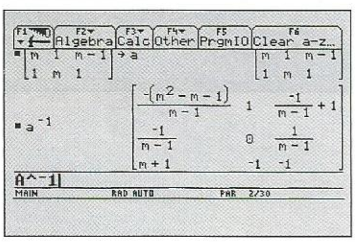
CON CALCULADORA

Si la calculadora tiene cálculo algebraico simbólico, es posible hallar la inversa de una matriz aunque algunos elementos sean parámetros.

1. Editamos la matriz A:



2. Calculamos A^{-1}:



Obsérvese que la matriz A^{-1} no existe para los valores de su parámetro que anulen el denominador:

$$m - 1 = 0$$

es decir, para $m = 1$.

Ejercicio resuelto

Hallar m para que la matriz A no tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = m - 1$

$\det A = 0$ implica $m - 1 = 0$

Soluciones: $m = 1$

La matriz no tiene inversa cuando $m = 1$.

Para los restantes valores la matriz es inversible y su inversa ha sido obtenida con calculadora en el margen.

Ejercicios

1 Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

2 Calcular los siguientes determinantes de orden 3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -11$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 36$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 42$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 32$

3 Calcular los siguientes determinantes de orden 4:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

4 Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5 Hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

obtener, si es posible, $(B \cdot A)^{-1}$.

7 Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

8 Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 10a & 10b & 10c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix}$$

9 Obtener, simplificando, el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

10 Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$$

11 Calcular por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c + a \\ 1 & a & b + c \\ 1 & c & a + b \end{vmatrix}$$

12 Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

13 Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

14 Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Sugerencia: si escribes $a = tb$, obtendrás el resultado fácilmente.

15 Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Comprobar el resultado.

16 Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

17 Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Problemas

18 Supongamos que c_1, c_2, c_3 y c_4 son las cuatro columnas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale 3. Calcular razonadamente:

1) El determinante de la inversa de A.
2) El determinante de la matriz 2A.
3) El determinante de una matriz cuyas columnas son:

$$2c_1 - c_3,\ c_4,\ 5\,c_3,\ c_2$$

19 Sabiendo que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 1$

y utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcular:

$$\det\begin{pmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det\begin{pmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{pmatrix}$$

20 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con a, b, c, d, $\in \mathbf{R}$, y supongamos que la matriz A cumple las propiedades $A \cdot A = I$ y $\det(A) = 1$, siendo I la matriz identidad. Calcular los coeficientes de la matriz A.

21 Escribir la matriz inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

y comprobar que lo es, multiplicándola por la dada.

22 Hallar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcular su inversa para $\lambda = 1$.

23 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores reales de x para los que A tiene inversa.
b) Hallar la matriz Y de orden 3×3 que es solución de la ecuación matricial

$$A \cdot Y + B = I$$

siendo A la matriz anterior para $x = 3$, I la matriz identidad y B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

24 ¿Para qué valores del parámetro λ tiene inversa la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la inversa de A para $\lambda = 1$.

25 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$

averiguar para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

26 ¿Para qué valores del parámetro k, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$$

admite inversa? Razonar la respuesta.

27 Hallar los valores de k para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

a) no tiene inversa. b) tiene rango 3.

28 Probar que la matriz A tiene inversa y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29 Hallar los valores de x para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

30 Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores de $t \in \mathbf{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de $t \in \mathbf{R}$ existe A^{-1}?

31 Analizar, en función del valor de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Para $a = 2$, ¿tiene A matriz inversa? En caso afirmativo, calcular la matriz A^{-1}.

32 Calcular el valor de los parámetros a, b para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$

tenga rango igual a 2.

33 Obtener los valores de a, b y c para que las matrices siguientes tengan, simultáneamente, rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

34 Resolver la ecuación matricial

$$A \cdot X - B + C = 0$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

35 Resolver la ecuación matricial

$$XA - 2B + 3C = D$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

36 Hallar una matriz X tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

37 Hallar una matriz X tal que

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

38 Hallar una matriz X tal que $A \cdot X + B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

39 Hallar una matriz X tal que

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

40 Hallar una matriz X tal que

$$B\,(2A + I) = A\,X\,A + B$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

41 Calcular la matriz X en la ecuación $A^3 \cdot X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a + d = 1$ y $\det(A) = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

42 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A - \lambda\, I)^2$ sea la matriz nula.

Cuestiones

43 Si todos los elementos de una fila de una matriz son ceros, sabemos que el determinante asociado es nulo. ¿Cuántos elementos nulos puede tener una matriz de tercer orden sin que su determinante valga cero? Razonar la contestación con algún ejemplo.

44 Una matriz cuadrada A verifica la relación $A^2 = A$. Demostrar que $\det(A) = 0$ o $\det(A) = 1$. Razonar la contestación indicando qué propiedad se ha aplicado.

45 En un determinante realizamos una cierta permutación de las filas. ¿Qué podemos decir del valor del nuevo determinante obtenido? Razonar la respuesta.

46 Si se multiplica una matriz A por ${}^t\mathrm{Adj}(A)$, ¿qué tipo de matriz se obtiene?, ¿cuánto valen sus elementos? Poner un ejemplo.

47 ¿Qué transformaciones se pueden hacer con las filas de un determinante sin alterar su valor? Poner ejemplos.

48 Se sabe que $\det(F_1, F_2, F_3) = 7$. ¿Cuánto vale $\det(3F_1, F_2, F_3)$? Razonar la respuesta.

49 Se sabe que $\det(F_1, F_2, F_3) = 7$. ¿Cuánto vale $\det(F_1, F_1 + F_2, F_3)$? Razonar la respuesta.

50 Se sabe que $\det(A) = 5$, y que A es una matriz de orden 2. ¿Cuánto vale $\det(3A)$? Razonar la respuesta.

51 Si A es una matriz cuadrada de orden 4, ¿qué relación existe entre $\det(A)$ y $\det(kA)$?

52 Dos matrices A y B son inversas y además todos sus elementos son números enteros. ¿Cuáles son los valores posibles de $\det(A)$ y $\det(B)$? Razonar la respuesta.

53 Dos matrices A y B son inversas. Si $\det(A) = 3$, ¿cuánto vale $\det(B)$? Razonar la respuesta.

54 ¿Qué diferencias existen entre el producto de un escalar por una matriz y el producto de un escalar por un determinante?

55 Si A es una matriz cuadrada de orden 3, ¿cuánto vale el determinante de la matriz Adj(A)? (Recordar que $\det(A) \cdot \det(\mathrm{Adj}\,(A)) = ((\det(A))^3)$.

56 Enunciar las propiedades de los determinantes que permiten comprobar sin desarrollar que el determinante de la siguiente matriz es nulo:

$$\begin{pmatrix} a & d & a + pd \\ b & e & b + pe \\ c & f & c + pf \end{pmatrix}$$

57 Sea A una matriz cuadrada de orden 3 diagonal:

1) ¿Qué condiciones deben cumplir los elementos de A para que admita inversa?
2) ¿Y cuáles para que dicha inversa coincida con A?

58 Poner un ejemplo de una matriz 4×4 que tenga rango 2.