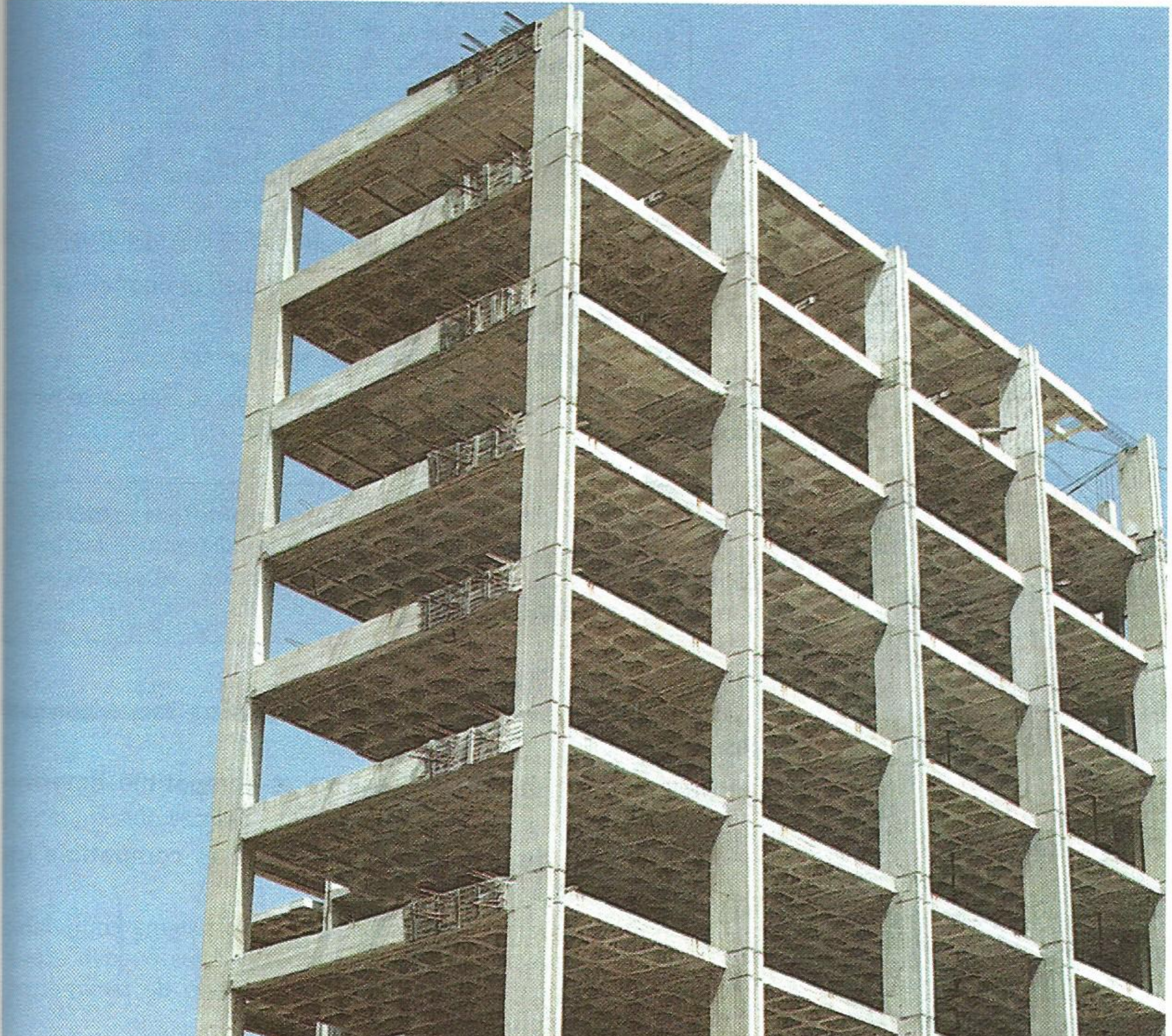
3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales



Las ecuaciones lineales se interpretan como rectas y planos. Resolver un sistema equivale a estudiar la posición relativa de estas figuras geométricas en el plano o en el espacio.

El teorema de Rouché *proporciona un método sencillo, rápido y elegante para analizar las distintas posiciones que adoptan en el plano y en el espacio las figuras lineales (rectas y planos) asociadas a las ecuaciones de un sistema.*

La presente unidad utiliza las dos herramientas matemáticas desarrolladas en unidades anteriores: las matrices *y los* determinantes.

1. Sistemas de ecuaciones lineales en general

Notación ordinaria

Un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots + a_{3n}\,x_n = b_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + \dots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

Donde

$\mathbf{a_{ij}}$ son números reales dados; se llaman coeficientes del sistema.

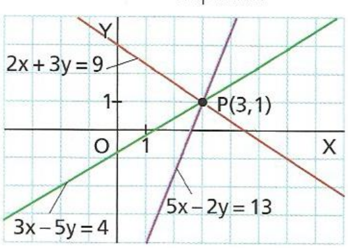
$\mathbf{b_1, b_2, b_3}, \dots, \mathbf{b_m}$ son números reales, y reciben el nombre de términos independientes.

$\mathbf{x_1, x_2, x_3}, \dots, \mathbf{x_n}$ son las incógnitas del sistema.

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama **homogéneo**.

> Una **solución** del sistema [1] es un conjunto ordenado de números reales $(\mathbf{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n})$ tales que, al sustituir las incógnitas x_1 por s_1, x_2 por s_2, x_3 por s_3, ..., x_n por s_n, se satisfacen a la vez las m ecuaciones.

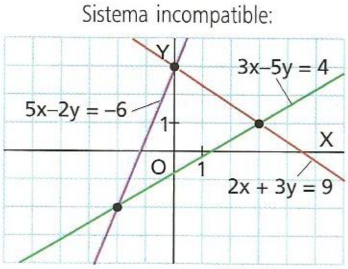
Sistema compatible:



$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

Sistema incompatible:



$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \\ 5x - 2y = -6 \end{cases}$$

Los sistemas que tienen al menos una solución se llaman **compatibles**.

— Si la solución es **única**, el sistema es **compatible determinado**.

— Si tiene **más de una** solución, el sistema es **compatible indeterminado**.

De hecho, estudiaremos después que todo sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones, y éstas pueden expresarse en función de un número determinado de parámetros, dependiendo de cada caso.

Los sistemas que **no tienen ninguna** solución se llaman **incompatibles**.

Si un sistema tiene una ecuación incompatible, el sistema completo también lo es.

Las ecuaciones

$$0\,x + 0\,y = 7 \quad \text{y} \quad 0\,x + 0\,y + 0\,z = 6$$

son incompatibles, ya que no existen números reales que las verifiquen.

Si un sistema tiene una ecuación similar a éstas, es incompatible.

Notación matricial

Puesto que luego utilizaremos la notación matricial de los sistemas, vamos a escribir el sistema [1] en esa forma.

Llamaremos **matriz del sistema** [1] a la matriz de orden m x n formada por los coeficientes del mismo:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La **matriz ampliada del sistema** [1] es de orden $m \cdot (n + 1)$ y se obtiene a partir de la matriz M, añadiéndole la columna formada por los términos independientes:

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Si designamos por **X** a la matriz columna formada por las incógnitas y por **B** a la matriz columna de los términos independientes, el sistema se escribe en forma matricial así:

$$\mathbf{M \cdot X = B}$$

Matriz de las incógnitas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz de los términos independientes:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notación por columnas

Designando por C_1, C_2, C_3, ..., C_n las columnas de la matriz M, el sistema puede escribirse también así:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{C_1} \cdot x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{C_2} \cdot x_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \dots \\ a_{m3} \end{pmatrix}}_{C_3} \cdot x_3 + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{C_n} \cdot x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\mathbf{C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + C_3 \cdot x_3 + \dots + C_n \cdot x_n = B}$$

Esta relación expresa la columna B como combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes. Si tal combinación lineal es posible, los coeficientes de las columnas son precisamente la solución del sistema [1], con lo que éste es compatible.

Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi (léase Al-juarizmi) (780-846). Matemático árabe, trabajó en la biblioteca del Califa Al-Mahmun en Bagdad. De su nombre deriva la palabra ***algoritmo****. Es autor del tratado* Al-jabr wa'l muqābala, *del que procede la palabra «álgebra». Introdujo en Occidente el sistema hindú de numeración decimal, que explicó con todo detalle en su obra* Aritmética.

2. Sistemas equivalentes

*Tartaglia fue el apodo de **Niccolo Fontana** (1500-1557), debido a su tartamudez, producida por una herida durante el asalto a la ciudad de Brescia en 1512 por las tropas francesas. Su aportación más importante al álgebra fue el hallazgo de un método para la resolución de ecuaciones cúbicas.*

El concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes y los criterios que permiten pasar de unos a otros son fundamentales para la resolución de los mismos.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo número de incógnitas, aunque no es necesario que tengan igual número de ecuaciones.

Es evidente que si se cambia el orden de las ecuaciones, el sistema resultante no sólo es equivalente al inicial, sino que en realidad es el mismo.

Criterios de equivalencia

Criterio 1. Producto por un número distinto de cero

Si se multiplican los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} k(2x + 3y) = k \cdot 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

son equivalentes, ya que toda solución del primero lo es también del segundo, y recíprocamente.

Criterio 2. Suma de ecuaciones

Si a una ecuación de un sistema se le suma otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.

Por ejemplo, los sistemas

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 3y + 5x + 6y = 4 + 7 \end{cases}$$

son equivalentes, ya que toda solución del primero lo es también del segundo, y recíprocamente.

Eliminación de ecuaciones en un sistema

Los criterios anteriores permiten eliminar ecuaciones en un sistema, de modo que el sistema resultante sea equivalente al dado.

> Si en un sistema de ecuaciones lineales una ecuación depende de otras, puede suprimirse, y el sistema resultante es equivalente al dado.

Una regla práctica:

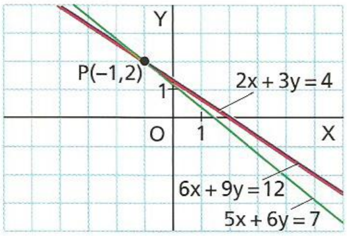
Antes de resolver un sistema conviene eliminar las ecuaciones dependientes, como:

- **Ecuaciones nulas.**
- **Ecuaciones iguales.**
- **Ecuaciones proporcionales.**

Ejercicios resueltos

1. Determinar un sistema equivalente a:

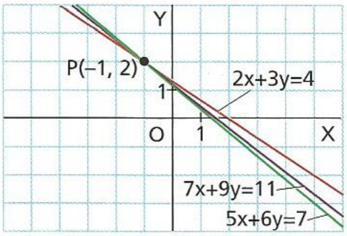
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$$



En el sistema la tercera ecuación es el triple de la primera, luego puede suprimirse y resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas equivalente al dado.

2. Determinar un sistema equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \\ 7x + 9y = 11 \end{cases}$$



En el sistema la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras, luego puede suprimirse y resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas equivalente al dado.

3. Determinar un sistema equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \\ 10x + 11y + 12z = 13 \end{cases}$$

En el sistema la tercera ecuación depende de las dos primeras, ya que se obtiene restando al doble de la segunda la primera, luego puede suprimirse y resulta un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas equivalente al dado.

3. Criterio de compatibilidad. Teorema de Rouché

Los teoremas de Rouché y de Cramer dan respuesta a las dos cuestiones que plantea la resolución de un sistema:

— ¿Es compatible el sistema? Es decir, ¿tiene soluciones?

— En caso afirmativo, ¿cuántas y cuáles son las soluciones del mismo?

En este apartado se estudia la compatibilidad de un sistema expresada por el **teorema de Rouché**.

Eugenio Rouché (1832-1910). Matemático francés, fue profesor de geometría descriptiva en el Conservatorio de Artes y Oficios en la Escuela Central.
En algunos textos, el teorema de Rouché se designa también con el nombre de Rouché-Fröbenius.

> Un **sistema** es **compatible** si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es igual al rango de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, y recíprocamente.
>
> Sistema compatible $\Leftrightarrow$ rango M = rango M*

Para demostrar este teorema escribiremos el sistema en la notación por columnas:

$$C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + C_3 \cdot x_3 + \ldots + C_n \cdot x_n = B$$

Supongamos que el sistema es compatible

En este caso existe al menos una solución $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tal que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$$

luego la columna B depende de las columnas $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Por tanto,

$$\text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, B)$$

es decir,

$$\text{rango } M = \text{rango } M^*$$

*Supongamos que rango M = rango M**

La igualdad de rangos de las matrices significa que

$$\text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, B)$$

Por tanto, la columna B depende de las restantes columnas; es decir, existen números reales $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tales que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$$

De esta relación se deduce que $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ es una solución del sistema y, por tanto, es compatible.

Georg Ferdinand Fröbenius (1849-1917). Matemático alemán. Fue nombrado profesor de la Universidad de Berlín en 1882. Trabajó en grupos abstractos y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Rango, ecuaciones y soluciones

Las siguientes observaciones son de gran utilidad para la resolución práctica de un sistema compatible.

Si el sistema es compatible, el **rango de la matriz del sistema** indica el número de **ecuaciones independientes**.

Si el número de incógnitas es igual al rango, el sistema es **compatible determinado**.

Si el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es **compatible indeterminado**.

Disposición práctica para resolver un sistema indeterminado

Para resolver un sistema con infinitas soluciones es conveniente proceder del siguiente modo:

Sea r el rango de la matriz del sistema.

Se eligen r ecuaciones independientes y se pasan al segundo miembro los términos de (n − r) incógnitas, de modo que se obtenga un sistema de r ecuaciones independientes con r incógnitas.

Las (n − r) incógnitas que se pasan al segundo miembro se suelen designar con los símbolos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$. De este modo, todas las incógnitas se pueden expresar en función de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$.

— Si la solución depende de t_1, se dice que la solución depende de un parámetro que puede tomar cualquier valor real.

— Si la solución depende de t_1 y t_2, se dice que la solución depende de dos parámetros que pueden tomar valores reales cualesquiera, etc.

UN EJEMPLO

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 6 + z \\ 2x - y = 7 - 3z \end{cases}$$

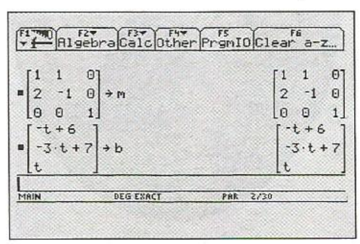
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 6 + t \\ 2x - y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

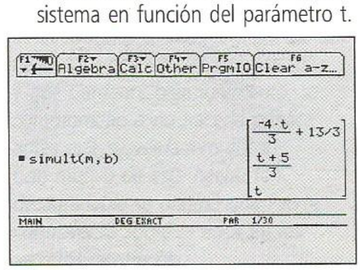
CON CALCULADORA

Con una calculadora dotada de cálculo algebraico simbólico (CAS) se resuelve un sistema con parámetros.

1. Se introducen las matrices M y B.



2. Se ejecuta el comando *simult* y se obtiene las infinitas soluciones del sistema en función del parámetro t.



Sistemas con parámetros

En algunos sistemas se sustituyen algunos de los coeficientes o términos independientes por letras, llamadas también parámetros, que pueden tomar como valor cualquier número real.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + ky - z = 1 \\ 2x + y - kz = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$$

tiene la letra k como parámetro. Por tanto, para cada valor real que toma k se obtiene un sistema distinto. Se trata de estudiar, según los valores de este parámetro, si el sistema correspondiente es compatible o no. Para ello, se estudian en cada caso los rangos de las matrices, la del sistema y la ampliada con los términos independientes.

Luca Pacioli (1445-1514). Monje italiano que trabajó en Perugia, Nápoles, Milán, Florencia, Roma y Venecia. Fue amigo de Leonardo da Vinci. Autor del primer tratado de álgebra impreso en 1494 titulado Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proporcionalita. *Publicó también un trabajo sobre la proporción áurea titulado* De divina proportioni *e ilustrado por Leonardo da Vinci.*

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Puesto que la tercera ecuación es suma de la primera y segunda, el sistema se reduce a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes, M, y la ampliada, M*, son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible según el teorema de Rouché, ya que rango M = rango M* = 2. Pasando la incógnita z al segundo miembro se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

Luego, el número de soluciones es infinito (sistema compatible indeterminado), y sus valores dependen de los valores que demos a z; es decir, hay una incógnita libre y el sistema es, por tanto, uniparamétrico.

2. Estudiar la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes, M, y la ampliada, M*, son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rango M = 2, ya que la columna C_3 es igual que C_1 y las dos primeras columnas no son proporcionales.

Rango M* = 3, pues $\det(C_1, C_2, B) \neq 0$.

El sistema es incompatible, ya que rango M $\neq$ rango M*.

3. Estudiar la compatibilidad del siguiente conjunto de sistemas dependientes del parámetro a:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

Formemos las matrices, de los coeficientes, M, y ampliada, M*:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = -a^2 + a + 2 \Rightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow a = 2,\ a = -1$$

Según los valores de a, se tienen los siguientes casos:

1.° $a \neq 2$ y $a \neq -1$:

En este caso, $\det M \neq 0$; por tanto, rango $M = 3 =$ rango M^*. Luego el sistema es compatible con solución única (compatible determinado).

2.° $a = -1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso, rango $M = 2$ y, por tanto, la columna C_3 depende de las dos primeras, con lo que el rango de M^* es el rango de las columnas C_1, C_2, B. Puesto que $\det(C_1, C_2, B) \neq 0$, rango $M^* = 3$.

El sistema es entonces incompatible, ya que rango $M \neq$ rango M^*.

3.° $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se tiene que rango $M =$ rango $M^* = 2$, pues $B = C_1$. El sistema es, por tanto, compatible y se reduce a dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones, por ser el rango común 2 menor que el número de incógnitas, 3. El sistema es uniparamétrico, ya que todas las soluciones dependen del parámetro $t = z$.

4. Estudiar la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Formemos las matrices de los coeficientes, M, y ampliada, M^*:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -a & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 7a + 56 \Rightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow a = -8$$

1.° $a \neq -8$:

En este caso, rango $M = 3$. La solución es entonces única, dada evidentemente por $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2.° $a = -8$:

Para este valor de a se tiene que rango $M = 2$; hay, por tanto, dos ecuaciones independientes, con lo que el sistema puede escribirse así:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -z \\ x + 8y = 3z \end{cases}$$

Las soluciones dependen de la incógnita z. Luego existen infinitas y el sistema es uniparamétrico.

Jerónimo Cardano (1501-1576). Médico y matemático italiano, publicó en 1545 su Ars Magna*, en la que incluyó la fórmula para la resolución de ecuaciones cúbicas, a pesar de que había sido descubierta por Tartaglia, y que Cardano, bajo juramento, se comprometió a no hacerla pública antes que su verdadero autor. Con motivo de este hecho tan desagradable se originó una fuerte controversia sobre la ética en los secretos científicos.*

4. Resolución de un sistema de dos ecuaciones por el método de Gauss

Método de reducción-sustitución

La suma de ecuaciones permite **eliminar una incógnita** en una de las ecuaciones, siempre que los coeficientes de esa incógnita sean opuestos, y obtener una ecuación de primer grado. Si no son iguales ni opuestos, hay que multiplicar cada una de las ecuaciones por números adecuados para obtener un múltiplo común de los coeficientes de esa incógnita.

Resuelta la ecuación de primer grado, se obtiene una de las incógnitas.

El valor de esta incógnita se sustituye en una de las ecuaciones dadas, obteniéndose una ecuación de primer grado, que resuelta da el valor de la otra incógnita.

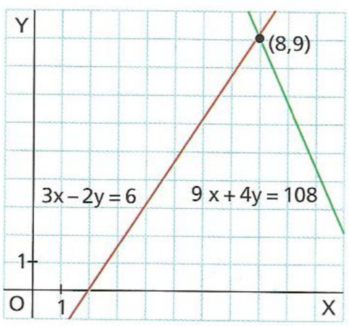
Esquema (2-1)

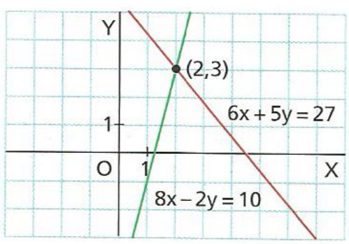
$$\begin{cases} * x + * y = * \\ * x + * y = * \end{cases} \qquad \begin{cases} * x + * y = * \\ * y = * \end{cases}$$

Los **asteriscos representan números reales** cualesquiera.

Los dos sistemas son equivalentes, pero en el segundo aparece una ecuación de primer grado que se resuelve fácilmente.

Ejercicios resueltos





1. Resolver el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = 108 \end{cases}$

Multiplicando la primera por 2: $6x - 4y = 12$

Dejando la segunda como está: $9x + 4y = 108$

Sumando las ecuaciones: $15x = 120$

Resolviendo esta ecuación: $x = 8$

Sustituyendo $x = 8$ en la segunda ecuación:

$72 + 4y = 108$ de donde $y = 9$

Solución: $x = 8$, $y = 9$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 5y = 27 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases}$

Multiplicando la primera por 2: $12x + 10y = 54$

Multiplicando la segunda por 5: $40x - 10y = 50$

Sumando las ecuaciones: $52x = 104$

Resolviendo esta ecuación: $x = 2$

Sustituyendo $x = 2$ en la primera ecuación:

$12 + 5y = 27$ de donde $y = 3$

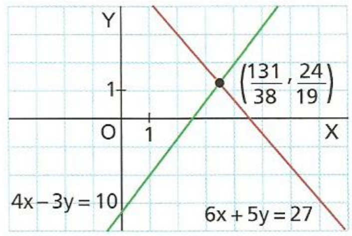
Solución: $x = 2$, $y = 3$

Método de reducción doble

Cuando al calcular una incógnita por reducción ésta resulta ser un número fraccionario o irracional, conviene calcular también la otra por reducción. La reducción en este caso es doble.

Ejercicios resueltos

1. Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 5y = 27 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$



Eliminando la x

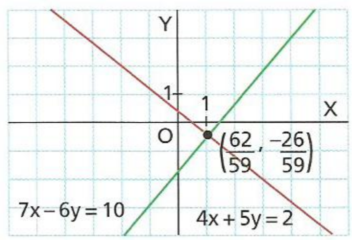
$$\begin{array}{lrcr} \text{Por } 2: & 12x + 10y & = & 54 \\ \text{Por } -3: & -12x + 9y & = & -30 \\ \hline \text{Sumando:} & 19y & = & 24 \\ \text{Resolviendo:} & y & = & \dfrac{24}{19} \end{array}$$

Eliminando la y

$$\begin{array}{lrcr} \text{Por } 3: & 18x + 15y & = & 81 \\ \text{Por } 5: & 20x - 15y & = & 50 \\ \hline & 38x & = & 131 \\ & x & = & \dfrac{131}{38} \end{array}$$

Solución: $x = \dfrac{131}{38}$, $y = \dfrac{24}{19}$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 7x - 6y = 10 \end{cases}$



Eliminando la x

$$\begin{array}{lrcr} \text{Por } 7: & 28x + 35y & = & 14 \\ \text{Por } -4: & -28x + 24y & = & -40 \\ \hline \text{Sumando:} & 59y & = & -26 \\ \text{Resolviendo:} & y & = & -\dfrac{26}{59} \end{array}$$

Eliminando la y

$$\begin{array}{lrcr} \text{Por } 6: & 24x + 30y & = & 12 \\ \text{Por } 5: & 35x - 30y & = & 50 \\ \hline & 59x & = & 62 \\ & x & = & \dfrac{62}{59} \end{array}$$

Solución: $x = \dfrac{62}{59}$, $y = -\dfrac{26}{59}$

3. Una refinería compra petróleo a dos países A y B. Comprando 500 barriles al país A y 15 000 al país B, resulta un precio medio de 19,871 dólares. Comprando 1 000 barriles al país A y 1 000 barriles al país B, el precio medio es de 18 dólares por barril. ¿Cuánto cuesta el barril de crudo de cada país?

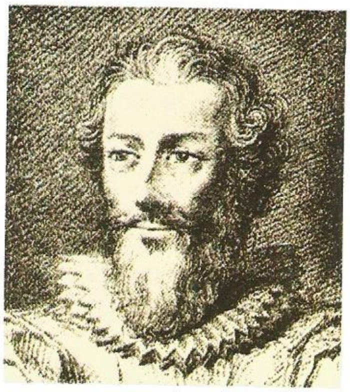
Sea **x** el precio del barril del país A e **y** el precio del barril del país B.

El sistema resultante es $\begin{cases} 500x + 15\,000y = 15\,500 \cdot 19{,}871 \\ 1\,000x + 1\,000y = 2\,000 \cdot 18 \end{cases}$

Equivalente a $\begin{cases} x + 30y = 616 \\ x + y = 36 \end{cases}$

Resolviendo el sistema, se tiene: $x = 16$, $y = 20$.

El barril cuesta 16 dólares en A y 20 en B.



François Viète (1540-1603). Matemático y jurista francés, más conocido por su nombre latino, ***Franciscus Vieta****. Fue el primero en utilizar letras para simbolizar incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas. Se le considera como el matemático más importante de la segunda mitad del siglo XVI.*

5. Resolución de un sistema de tres ecuaciones por el método de Gauss

La suma o diferencia de ecuaciones permite **eliminar una incógnita** y obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Para ello se eligen dos pares de ecuaciones de los tres posibles: 1.ª-2.ª, 1.ª-3.ª, 2.ª-3.ª

Elegidas las dos parejas de ecuaciones más adecuadas se elimina la misma incógnita en ambas. El proceso es igual que el seguido para dos ecuaciones.

El sistema parcial de dos ecuaciones con dos incógnitas que se obtiene se resuelve utilizando el método del epígrafe anterior para dos ecuaciones.

Conocidas dos incógnitas, se halla la tercera sustituyendo estos valores en una de las ecuaciones dadas.

Esquema (3-2-1): Sistema triangular equivalente

$$\left\{\begin{array}{l} * x + * y + * z = * \\ * x + * y + * z = * \\ * x + * y + * z = * \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} * x + * y + * z = * \\ * y + * z = * \\ * y + * z = * \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} * x + * y + * z = * \\ * y + * z = * \\ * z = * \end{array}\right.$$

Los **asteriscos representan números reales** cualesquiera.

Los sistemas son equivalentes, y en el proceso se obtiene un sistema con una ecuación con tres incógnitas, otra con dos y la tercera con una, que es una ecuación de primer grado que se resuelve fácilmente.

Si los coeficientes son sencillos, este proceso puede hacerse directamente, hasta obtener el sistema último, que se llama triangular, por su disposición.

Este proceso se extiende de forma análoga a sistemas de cuatro o más ecuaciones.

Ejercicios resueltos

1. Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 2z &=& 9 \\ 2x - y + 4z &=& 4 \\ 2x - y + 6z &=& -1 \end{array}\right.$$

Se elimina la incógnita y eligiendo las ecuaciones 1.ª-2.ª y 1.ª-3.ª

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 2z &=& 9 \\ 2x - y + 4z &=& 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + y - 2z &=& 9 \\ 2x - y + 6z &=& -1 \end{array}\right.$$

Sumando: $3x + 2z = 13$ $\qquad$ $3x + 4z = 8$

Sistema de dos ecuaciones: $\begin{cases} -3x - 2z = -13 \\ 3x + 4z = 8 \end{cases}$

Sumando: $2z = -5$ de donde $z = -\dfrac{5}{2}$

Sustituyendo: $3x - 10 = 8$ de donde $x = 6$

Sustituyendo: $6 + y + 5 = 9$ de donde $y = -2$

Solución: $x = 6$, $y = -2$, $z = -\dfrac{5}{2}$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

Se elimina la incógnita x eligiendo las ecuaciones 1.ª-2.ª y 1.ª-3.ª Multiplicando por números adecuados, se tiene:

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -4 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 5y - 6z = -29 \end{cases}$$

Sumando: $y + 3z = 7$ $\qquad$ $6y - 5z = -27$

Sistema de dos ecuaciones: $\begin{cases} 6y + 18z = 42 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases}$

Sumando: $23z = 69$

Se obtiene el sistema triangular: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases}$

De donde $z = 3$

Sustituyendo: $y + 9 = 7$ de donde $y = -2$

Sustituyendo: $x - 2 + 3 = 2$ de donde $x = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

3. De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198, y si se intercambian las de las unidades y las decenas, el número aumenta en 36. Encontrar el número.

Sea el número $N = 100x + 10y + z$

Suma de las cifras: $x + y + z = 13$

Intercambiando las cifras de las unidades y de las centenas:

$$100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 198$$

Intercambiando las cifras de las unidades y de las decenas:

$$100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 36$$

Simplificando se obtiene el sistema $\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x - z = 2 \\ -y + z = 4 \end{cases}$

Resolviendo por reducción el sistema, se tiene:

$$x = 7, \quad y = 1, \quad z = 5$$

El número buscado es 715.

6. Resolución de sistemas por el método de Cramer

Gabriel Cramer (1704-1752). *Matemático suizo. Profesor de matemáticas y filosofía en Ginebra, fue admitido en la Academia de Berlín y en la Royal Society. La conocida regla de Cramer, publicada en su* Introducción al análisis de las curvas algebraicas *(1750), fue descubierta por* Colin Maclaurin *(1698-1746) probablemente en 1729, cuando estaba escribiendo ya el* Tratado de Álgebra, *publicado en 1748, dos años después de su muerte.*

Sistemas de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

a) Tiene n ecuaciones y n incógnitas.

b) El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es distinto de cero.

Un sistema de Cramer es por definición compatible, ya que:

$$\text{Rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \text{Rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, B)$$

Resolución por determinantes o método de Cramer

Si designamos el determinante de la matriz del sistema por

$$\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$

el determinante de la incógnita x_1 por

$$\det(B, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$

el determinante de la incógnita x_2 por

$$\det(C_1, B, C_3, \ldots, C_n),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

y el determinante de la incógnita x_n por

$$\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, B),$$

se tiene entonces que:

$$x_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3, \ldots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)}$$

$$x_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3, \ldots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$x_n = \frac{\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, B)}{\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)}$$

El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante asociado a dicha incógnita por el determinante del sistema.

Un sistema de Cramer tiene siempre solución única.

La demostración de las fórmulas de Cramer se basa en las propiedades de los determinantes con relación a la suma y al producto por un número de filas y columnas.

Puesto que el sistema de Cramer es compatible, existe una solución $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ tal que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \dots + C_n \cdot s_n = B$$

Calculemos s_1:

$$\begin{aligned}\mathbf{det(B, C_2, C_3, \dots, C_n)} &= \det(C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + \dots + C_n \cdot s_n, C_2, C_3, \dots, C_n) = \\ &= s_1 \cdot \det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) + \\ &+ s_2 \cdot \det(C_2, C_2, C_3, \dots, C_n) + \dots + \\ &+ s_n \cdot \det(C_n, C_2, C_3, \dots, C_n) = \\ &= \mathbf{s_1 \cdot det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}\end{aligned}$$

ya que todos los demás determinantes son nulos por tener dos columnas iguales.

Por tanto,

$$x_1 = s_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3, \dots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)}$$

Análogamente se calcula el valor de las restantes incógnitas.

Ejercicio resuelto

Resolver, mediante determinantes, el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x \qquad + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de Cramer, se tiene:

$$x = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{4} = 3$$

Se puede comprobar el resultado obtenido sustituyendo en las ecuaciones del sistema.

LAS PRIMERAS MATRICES

Se tiene conocimiento de que los chinos, hacia el año 200 a.C., utilizaron por primera vez matrices para la resolución de problemas.

En cambio, en Occidente no se utilizaron hasta el siglo XIX.

Esta distancia en cuanto al tiempo entre la cultura oriental y occidental posiblemente se deba a que los chinos utilizaban tableros para contar que estaban divididos en cuadrículas.

Éste debió ser el hecho que hizo más fácil el desarrollo y el uso de las matrices.

7. Resolución de sistemas por la matriz inversa

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B \qquad [1]$$

Si la matriz **A** es regular, entonces existe la matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$. Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{A^{-1}}$ los dos miembros de la igualdad [1] se obtiene:

$$\mathbf{A^{-1}\,AX = A^{-1}\,B \Rightarrow X = A^{-1}\,B}$$

Ejercicio resuelto

Resolver el siguiente sistema mediante la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

En forma matricial será: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

CON CALCULADORA GRÁFICA

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

1.° Escribimos el sistema en notación matricial:

$$AX = B$$

2.° Editamos las matrices A y B:

```
[A]
        [[2  1   1]
         [1  0   1]
         [3  -2  1]]
```

```
[B]
            [[7]
             [4]
             [2]]
```

3.° Obtenemos la solución del sistema simplemente con escribir:

```
[A]⁻¹[B]
            [[1]
             [2]
             [3]]
```

Resolución de problemas

Para resolver un problema:

1.° No conviene dejarse llevar por la primera impresión.
2.° Hay que interpretar las soluciones obtenidas.

El problema

Para dar una clase sobre el manejo de la calculadora, un profesor de matemáticas propuso a sus alumnos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 24{,}35x + 13{,}26y = 31{,}25 \\ 65{,}38x + 35{,}6\ y = 63{,}28 \end{cases}$$

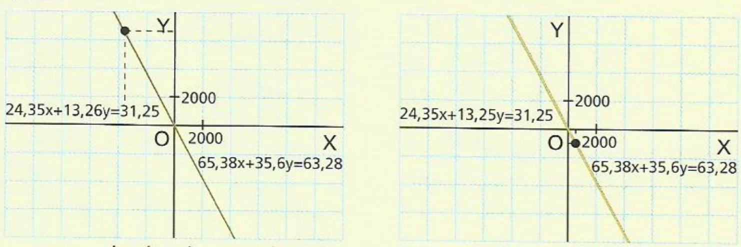
Pero al resolver el profesor el sistema, se equivocó en uno de los coeficientes y tomó 13,25 en lugar de 13,26. Las soluciones de los alumnos diferían mucho de las del profesor. ¿Qué es lo que pasó?

La solución

- Resolvamos primero el problema propuesto por el profesor:
  La solución es $x \approx -3\,469{,}63$; $y \approx 6\,373{,}82$.
- Resolvemos ahora el sistema con el coeficiente cambiado:
  La solución es $x \approx 476{,}59$; $y \approx -873{,}49$.
- Interpretación

  ¿Cómo es posible que al cambiar solamente una centésima en un coeficiente del sistema se obtengan soluciones tan dispares?

  En las figuras siguientes se han representado las soluciones gráficamente. En la práctica las rectas son casi coincidentes.



Para ver esto vamos a calcular la pendiente de cada una de las rectas.

Recuerda que si $Ax + By = C$, entonces $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ y la pendiente $m = -\dfrac{A}{B}$.

Las pendientes de las rectas dadas son: $m = -\dfrac{24{,}35}{13{,}26} = -1{,}83634...$

$$m' = -\frac{65{,}38}{35{,}6} = -1{,}83651...$$

Como vemos en la figura, dos rectas «casi paralelas» pueden cortarse en dos puntos muy alejados. Esto sucede en las rectas del sistema, las dos son casi paralelas y, sin embargo, sus intersecciones están muy alejadas.

Ejercicios

1 Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de Cramer:

1. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x + 4y = 80 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = -5 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ 8x + y = 20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x - 8y = 19 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 3y + x = 9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 20x - 5y = 29 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{4}y = 5 \end{cases}$

2 Resolver los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de Cramer:

1. $\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \\ + z = 5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

3 Aplicar el método de reducción para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

4 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$$

5 Comprobar si el siguiente sistema es o no compatible:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

6 Resolver, utilizando el método de eliminación de Gauss, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea incompatible.
b) Añadir una ecuación de modo que el sistema resultante sea compatible e indeterminado. Resolver el sistema así formado.

8 Resolver el siguiente sistema homogéneo, dejando como parámetros libres las incógnitas de mayor subíndice:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

9 Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro a, los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + 12y + 4z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a+2)\ x - 12y + 12z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a^2x + a^3y + az = 1 \\ x + a^2y + z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y - z = a-4 \\ (a-6)y + 3z = 0 \\ (a+1)x + 2y = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - ay - z = 0 \\ (2-2a)x + 5y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2y + az = a \\ (a-2)x + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1 - a \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - ay = a \\ 5x + ay = 7 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a+1)y + az = a + 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + (a^2 - a)z = 2a \end{cases}$

10 Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k, los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ kx + y + 3z = 4 \\ kx + y - 7z = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ kx - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + t = 4 \\ y + z = 1 \\ y + t = 2 \\ z + t = k \end{cases}$

11 Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x \cos a + y \operatorname{sen} a = 1 \\ x \operatorname{sen} a - y \cos a = 1 \end{cases}$$

1. Resolverlo determinando x e y en función de a.
2. Calcular a para que $x + y = 1$.

12 Dado el sistema

$$\begin{cases} m x - y = 1 \\ x - m y = 2m - 1 \end{cases}$$

Hallar m para que:

1. No tenga solución.
2. Tenga infinitas soluciones.
3. Tenga solución única.
4. Tenga una solución en la que $x = 3$.

13 Discutir y resolver, según los distintos valores de los parámetros λ y μ, los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \lambda^2 x + \mu y = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y + \lambda z = \mu \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + \lambda z = \mu \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \mu \\ 2x - 5y + \lambda z = -2 \end{cases}$

14 Discutir y resolver, según los distintos valores de los parámetros a, b, c, los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - 3y + z = a \\ x - z = b \\ x + z = c \end{cases}$
3. $\begin{cases} ax + ay = 1 \\ bx + by = 1 \\ cx + cy = 1 \end{cases}$

15 Demostrar que para cualesquiera valores, distintos dos a dos, de λ, μ y t el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \lambda x + \mu y + tz = 2 \\ \lambda^2 x + \mu^2 y + t^2 z = 3 \end{cases}$$

tiene siempre solución única.

16 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + \mu y = 1 \\ \lambda y + \mu z = r \\ \mu x + \lambda z = s \end{cases}$$

donde λ, μ, r y s son números reales arbitrarios. Estudiar dicho sistema, según los valores de dichos parámetros, sabiendo que $\lambda + \mu \neq 0$.

17 Consideremos los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y - (3 + 2\lambda)\, z = 0 \\ x - y + (3 - \lambda)\, z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (1 + \mu)\, z = 0 \\ (\mu - 1)\, x + y + \mu\, (\mu - 1)\, z = 0 \end{cases}$$

Obtener los conjuntos de soluciones de ambos sistemas y calcular los valores de λ y μ que hacen que los sistemas sean equivalentes, es decir, con las mismas soluciones.

18 Eliminar a y b en los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = 3a + 3 \\ 2x + y - z = 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z = -2a + 5b - 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 1 = 4a + b \\ y - 2 = 3a - b \\ z = -a + 2b \end{cases}$

Problemas

19 Cierto supermercado hace el mismo pedido a tres proveedores diferentes A, B y C. Dicho pedido contiene ciertas cantidades de arroz, lentejas y garbanzos (expresadas en t). Cada uno de los proveedores marca para los distintos productos los precios recogidos en la tabla siguiente (expresados en miles de euros/t):

	Arroz	Lentejas	Garbanzos
Proveedor A	1,5	3	4
Proveedor B	2	3	3,5
Proveedor C	2	3	4

El pedido que recibe del proveedor A le cuesta 1 600 euros, el que recibe del B le cuesta 500 euros más que el anterior, y el que recibe del C le cuesta 500 euros más que este último.

a) Formular el problema y determinar la composición del pedido.
b) Este sistema, ¿de qué tipo es?

20 Un individuo invirtió 60 000 euros repartidos en tres empresas y obtuvo 4 500 euros de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa A hizo el doble de inversión que en la B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron del 5 % en la empresa A, 10 % en la B y 20 % en la C.

21 Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 g de proteínas y 3 g de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5 % de proteínas y 3 % de grasas y el tipo B con el 10 % de proteínas y 1 % de grasa.

¿Cuántos gramos de cada alimento pueden utilizarse para obtener la dieta correcta de un único animal?

22 Juan y Pedro invierten 20 000 euros cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4 % de interés, una cantidad B al 5 % y el resto al 6 %. Pedro invierte la misma cantidad A al 5 %, la B al 6 % y el resto al 4 %. Determinar la cantidad B, sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 1 050 euros y Pedro de 950 euros.

23 El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 euros (sin impuestos). El valor del vino es 60 euros menos que el de los refrescos y el de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos deben pagar un IVA del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592,4 euros, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

24 Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 euros. El original costaba 12 euros, pero también ha vendido copias, presuntamente defectuosas, con descuentos del 30 % y 40 %. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de originales, calcular a cuántas copias se le aplicó el descuento del 30 %.

25 La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era el triple de la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

26 Don Sixto le dice a don Pedro: «Yo tengo el doble de la edad que usted tenía cuando yo tenía la edad que usted tiene. La suma del triple de la edad que usted tiene, con la que yo tendré cuando usted tenga la edad que yo tengo, es 280». ¿Cuáles son las edades de don Sixto y don Pedro?

27 El tío Evaristo tiene 10 litros de mezcla de agua y vino. Al probarla observa que es demasiado ligera, por lo que decide añadir una cierta cantidad de vino, y entonces la cantidad de agua es el 30 % del total. Como sigue siendo ligera, añade de nuevo la misma cantidad de vino que antes, y entonces la cantidad de agua es el 20 % del total. ¿Cuántos litros de vino se añade en cada ocasión y cuántos hay de agua?

28 Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo.

El trigo se vende cada «cahíz» por 4 denarios.

La cebada se vende cada «cahíz» por 2 denarios.

El mijo se vende cada «cahíz» por 0,5 denarios.

Si se venden 100 «cahíces» y se obtiene por la venta 100 denarios, ¿cuántos «cahíces» de cada especie se venden? Interpretar la(s) solución(es).

29 Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 euros. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?

30 Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

— El 1.° de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.
— El 2.° de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.
— El 3.° de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

Cuestiones

31 El determinante de un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas es 0. ¿Puede ser el sistema compatible? ¿E incompatible? Razonar las respuestas con un ejemplo.

32 En un sistema de ecuaciones lineales $\det(M) = 0$, ¿puede tener solución el sistema? ¿Se puede aplicar la regla de Cramer? Razonar la respuesta.

33 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada? Razonar la respuesta.

34 Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es homogéneo y el rango de la matriz de los coeficientes es 2. Si se interpretan las ecuaciones como rectas, ¿tienen algún punto en común? ¿Cuál es? Razonar las respuestas geométricamente.

35 Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razonar las respuestas, a poder ser con ejemplos concretos.

36 Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

37 ¿Qué razón desaconseja el sistema de Cramer para sistemas de muchas ecuaciones?

38 Sea un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Discutir todas las posibilidades de compatibilidad e incompatibilidad, así como el número de soluciones de éstas, si existen.

39 Sea un sistema homogéneo $AX = 0$. De las siguientes afirmaciones, justificar las que sean ciertas, o poner algún contraejemplo de las que sean falsas.

a) Un sistema homogéneo siempre es compatible determinado.
b) Si x_1 y x_2 son soluciones de $AX = 0$, una combinación lineal de éstas también es solución del sistema.

40 El siguiente sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible determinado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Si se prescinde en S de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?
b) ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la (0, 0, 0)?
c) Si se añade una nueva ecuación a S, el sistema resultante puede ser:
   1. ¿Compatible y determinado?
   2. ¿Compatible indeterminado?
   3. ¿Incompatible?

Justificar la respuesta y poner un ejemplo de cada uno de ellos, si es posible.