Examen final de Lógica (convocatoria diciembre). 22 de diciembre de 2016.
Parte 1

---

1. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f \subseteq A \times B$ una relación binaria.

   a) (0,5 puntos) ¿Qué tiene que cumplir f para ser una función?

   b) (0,5 puntos) Supongamos que f es una función. ¿Cuál es la definición de que f sea inyectiva? ¿Y de que f sea suprayectiva?

   c) (1 punto) Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. Define:

      1) Una relación binaria R en $A \times B$ que no sea una función y que tenga 3 elementos.
      2) Una función $f_1 : A \to B$ que sea biyectiva.
      3) Una función $f_2 : A \to B$ que no sea inyectiva ni suprayectiva.
      4) Una función $f_3 : A \to B$ que sea inyectiva pero no suprayectiva.
      5) Una función $f_4 : A \to B$ que sea suprayectiva pero no inyectiva.

   Justifica adecuadamente tus respuestas.

   d) (1 punto) Considera ahora los conjuntos $A = \mathbb{N}$, el conjunto de todos los números naturales, y B el conjunto formado por los números naturales pares. Repite el apartado *c*) usando estos conjuntos. Justifica adecuadamente tus respuestas.
   Nota: Recuerda que $\mathbb{N}$ no tiene al 0 como elemento y que los conjuntos que estás usando son infinitos.

2. (2 puntos) Considera φ_1, φ_2 y φ_3 tres fórmulas cualesquiera de la lógica de proposiciones. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica adecuadamente tus respuestas. Es importante que pongas contraejemplos cuando sea necesario:

   a) Si $\varphi_1 \models \varphi_2$ y $\varphi_1 \models \varphi_3$ entonces $\varphi_2 \models \varphi_3$.

   b) Si $\varphi_1 \models \varphi_2$ y $\varphi_2 \models \varphi_3$ entonces $\varphi_1 \models \varphi_3$.

   c) Si $\varphi_1 \models \varphi_2 \vee \varphi_3$ entonces $\varphi_1 \models \varphi_2$.

   d) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_3$ entonces $\varphi_2 \models \varphi_1$.

   (1,5 puntos) Considera ahora las fórmulas:

   a) $\varphi_1 = (p \wedge q) \vee r$

   b) $\varphi_2 = \neg p \vee \neg q \to r$

   c) $\varphi_3 = \neg r \to p \vee q$

   Determina justificadamente si $\varphi_i \models \varphi_j$ para todos las posibilidades con $i \neq j$. Puedes utilizar el método que quieras.
   Nota: Date cuenta de que hay 6 posibilidades diferentes.

3. (1,5 puntos) Demuestra la corrección del siguiente razonamiento utilizando el sistema de Gentzen. Usa sólo las reglas básicas.

$$\{u \to p,\ p \to q \wedge r\} \vdash (u \to q) \wedge (p \to r \vee u)$$

4. (2 puntos) Demuestra la corrección del siguiente razonamiento utilizando el sistema de Gentzen. Puedes usar libremente las reglas básicas, las reglas derivadas y el teorema de la deducción.

$$\{p \to q \wedge r,\ r \to t \vee \neg q,\ t \to \neg r\} \vdash \neg p$$

Examen final de Lógica (convocatoria diciembre). 22 de diciembre de 2016.
Parte 2

---

5. (3 puntos) Define por recursión una función F que, dada una fórmula cualquiera φ de la lógica de predicados, devuelva la suma de los grados de los vértices del árbol estructural de φ. Puedes apoyarte, si es necesario, en una función G que tenga como dominio el conjunto de los términos de la lógica de predicados y que también tendrás que definir por recursión.
   Nota: Recuerda que, en un grafo, los vértices son los puntos y las aristas son las líneas que unen los vértices. El grado de un vértice es el número de aristas que inciden en ese vértice.

6. (3 puntos) Considera un dominio con tres elementos $D = \{a, b, c\}$. Considera las fórmulas
   - $A = \exists x \exists y P(x, y)$
   - $B = \forall x \exists y P(x, y)$
   - $C = \exists y \forall x P(x, y)$

   Encuentra, si es posible, 3 interpretaciones I_1, I_2, I_3 bajo las cuales A sea verdadera y además

   a) $B^{I_1} = C^{I_1} = 1$
   b) $B^{I_2} = C^{I_2} = 0$
   c) $B^{I_3} = 1$ y $C^{I_3} = 0$

   Justifica tus respuestas.

7. (2 puntos) Formaliza el siguiente razonamiento en el dominio de los seres vivos. Utiliza cuatro símbolos de predicado de aridad 1 y un símbolo de constante.

   "*Todo hombre es mortal. Todo mortal es egoísta. Todo egoísta es cruel. Sócrates es hombre. Por lo tanto, todo hombre es cruel, Sócrates es egoísta y existe un hombre mortal.*"

   (2 puntos) Demuestra la validez del razonamiento anterior usando el sistema de Gentzen.