EXAMEN LÓGICA. JUNIO 2017. SOLUCIÓN.

1º (a) TEORÍA

(b) $A = \{a, b, c\}$

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c)\}$

Es reflexiva porque $\forall x \in A \quad (x,x) \in R_1$

No es simétrica porque $(a,c) \in R_1$, $(c,a) \notin R_1$

No es antisimétrica porque $(a,b), (b,a) \in R_1$

No es transitiva porque $(b,a), (a,c) \in R_1$, $(b,c) \notin R_1$

$R_2 = \{(a,b), (b,a)\}$

Es simétrica porque $\forall x,y \in A \quad (x,y) \in R_2 \Rightarrow (y,x) \in R_2$

No es reflexiva porque $(a,a) \notin R_2$

No es antisimétrica porque $(a,b), (b,a) \in R_2$

No es transitiva porque $(a,b), (b,a) \in R_2$, $(a,a) \notin R_2$

$R_3 = \{(a,b), (b,c)\}$

Es antisimétrica porque $\nexists x,y \in A, x \neq y$ tales que $(x,y), (y,x) \in R_3$.

No es reflexiva porque $(a,a) \notin R_3$

No es simétrica porque $(a,b) \in R_3$, $(b,a) \notin R_3$

No es transitiva porque $(a,b), (b,c) \in R_3$, $(a,c) \notin R_3$.

$R_4 = \{(a,b), (b,a), (a,a), (b,b), (c,a), (c,b)\}$

Es transitiva porque $\forall x,y,z \in R_4 \quad (x,y), (y,z) \in R_4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,z) \in R_4$.

No es reflexiva porque $(c,c) \notin R_4$

No es simétrica porque $(c,a) \in R_4$, $(a,c) \notin R_4$

No es antisimétrica porque $(a,b), (b,a) \in R_4$.

2º (a) Fórmulas atómicas:

$$f(\top) := 10$$

$$f(\bot) := 10$$

$$f(p) := 5$$

cuando p es un símbolo cualquiera de proposición atómica.

(b) Fórmulas compuestas:

Si φ, ψ son fórmulas y $\circ$ es una conectiva binaria:

$$f(\neg\varphi) := f(\varphi) + 15$$

$$f(\varphi \circ \psi) := f(\varphi) + f(\psi) + 20.$$

3º

1.	$p \to q$	Pr.
2.	$r \to s$	Pr.
3.	$q \wedge s \to t$	Pr.
4.	$\neg t$	Pr.
5.	$\neg(\neg r \vee \neg p)$	Pr. aux.
6.	$\neg\neg r \wedge \neg\neg p$	T8, 5
7.	$\neg\neg r$	E$\wedge$, 6
8	$\neg\neg p$	E$\wedge$. 6
9.	r	E$\neg$, 7
10.	s	E$\to$, 2, 9
11.	p	E$\neg$, 8
12.	q	E$\to$, 1, 11.
13.	$q \wedge s$	I$\wedge$, 12, 10
14	t	E$\to$, 13, 3
15	$t \wedge \neg t$	I$\wedge$, 4. 14

Obs: Estamos suponiendo la negación de lo que queremos demostrar.

Obs: Termino en contradicción.

16. $\neg(\neg r \vee \neg p) \longrightarrow t \wedge \neg t$ $\quad$ I→ (5–15)

17. $\neg\neg(\neg r \vee \neg p)$ $\quad$ I¬, 16

18. $\neg r \vee \neg p$ $\quad$ E¬, 17.

4º **Solución Mat / Mat + EP:**

Supongamos que una valoración v hace la conclusión falsa.

Entonces $(p \to q) \vee (p \to r) : 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \to q : 0 \\ p \to r : 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p : 1 \\ q : 0 \\ r : 0 \end{array}$$

Intentemos, manteniendo esos valores, hacer las premisas verdaderas:

Pr. 1 ~~sea~~ $s : 1 \Rightarrow p \wedge s : 1$

Pr. 2 $q \vee \underbrace{\neg r}_{1} : 1$

Pr 3 $t \to \underbrace{p}_{1} : 1$. Podemos elegir el valor que queramos para t.

Luego la valoración $p:1, q:0, r:0, s:1, t:1$ hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión. Por tanto el razonamiento no es correcto.

4º **Solución** IS, IS+Mat, IS+II

Construimos el tableau de la conjunción de las premisas y la negación de la conclusión:

- $p \wedge s$ 4 ✓
- $q \vee \neg r$ 5 ✓
- $t \to p \equiv \neg t \vee p$ 6 ✓
- $\neg\big((p \to q) \vee (p \to r)\big)$
  $\equiv \neg(p \to q) \wedge \neg(p \to r)$ 1 ✓
- (1) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ 2 ✓
- (1) $\neg(p \to r) \equiv p \wedge \neg r$ 3 ✓
- (2) p
- (2) $\neg q$
- (3) $\neg r$
- (4) s

Obs: Al simplificar 3 no hace falta añadir p, ya está.

Obs: Lo mismo para 4

Obs: No hace falta bifurcar 5, $\neg r$ ya está.

Obs: No hace falta bifurcar 6, p ya está.

Tableau completo y con rama abierta $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la negación del razonamiento es satisfacible

$\Rightarrow$ el razonamiento <u>NO</u> es correcto.

$p:1,\ q:0,\ r:0,\ s:1,\ t:0$ es un contraejemplo al razonamiento (haciendo ciertos los literales de la rama abierta)

5º

(a) $\forall x\,(P(x) \wedge \neg N(x) \to \exists y\,(D(y) \wedge M(y,x)))$

(b) $\exists x\,(P(x) \wedge B(x) \wedge \forall y\,(M(y,x) \to B(y)))$

(c) $\neg \exists x\,(P(x) \wedge M(x,x))$

(d) $\neg \exists x\,(B(x) \wedge N(x))$

(e) $\exists x\,(D(x) \wedge B(x))$

Razonamiento

$$(a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d) \longrightarrow (e)$$

6º φ_1 FALSA

$x=3$ CONTRAEJEMPLO, ya que

$$\exists y\,(\underbrace{\underbrace{Q(3)}_{1} \longrightarrow \underbrace{f(3,y)=1}_{0}}_{0})$$

para cualquier valor de y.

φ_2 VERDADERA

$x=0$ EJEMPLO.

$$\underbrace{\forall y\,(\underbrace{\underbrace{P(0)}_{1} \wedge \underbrace{f(0,y)=0}_{1}}_{1})}_{1}$$

← para cualquier valor de y.

6º

φ_3 VERDADERO:

Si x, y son pares, entonces su producto también es par.

φ_4 VERDADERA:

Tomando $\begin{cases} x \text{ cualquiera} \\ y = 2 \end{cases}$

$$\underbrace{Q(x) \vee \underbrace{P(f(x.2))}_{1}}_{1}$$

φ_5 FALSA

~~x~~ $x = 3$ vuelve a ser contraejemplo.

ya que con y cualquiera.

$$\underbrace{f(3,y) = 1}_{\text{Falso.}}$$

7º

1. $\forall x\,(P(x) \land Q(x))$ Pr.
2. $\forall y\,(P(y) \to R(y))$ Pr.
3. $P(a) \land Q(a)$ E$\forall$, 1
4. $P(a) \to R(a)$ E$\forall$, 2
5. $P(a)$ E$\land$, 3.
6. $R(a)$ E$\to$, 5, 4.
7. $Q(a)$ E$\land$, 3.
8. $Q(a) \land R(a)$ I$\land$, 7, 6.
9. $\exists z\,(Q(z) \land R(z))$ I$\exists$, 8.

8º Consideramos la interpretación I dada por

$$P^I = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(c,b)\}$$

La fórmula es cierta ya que tomando

x cualquiera

$\left.\begin{array}{l} y=a \\ z=b \\ t=c \end{array}\right\}$ es un ejemplo de la fórmula que sigue al $\forall x$, ya que

$$\underbrace{\neg(y=z)}_{1} \land \underbrace{P(x,y)}_{1} \land \underbrace{P(x,z)}_{1} \land \neg \underbrace{P(x,t)}_{1}$$