SEGUNDO PARCIAL. LÓGICA. SOLUCIÓN.

2º

$c(x)$: el cuadrado de x (función de aridad 1)

$s(x,y)$: la suma de x e y
$p(x,y)$: el producto de x e y } (funciones de aridad 2)

$M(x,y)$: $x \geq y$ (predicado de aridad 2)

$E(x)$: x es par (predicado de aridad 1).

ⓐ $\forall x \left(M(c(x),0) \wedge c(x) = p(x,x) \right)$

ⓑ $\forall x \forall y \left(E(s(x,y)) \longleftrightarrow (E(x) \wedge \neg E(y)) \vee (\neg E(x) \wedge E(y)) \right)$

ⓒ $\forall x \, \exists y \left(M(y,x) \wedge \neg (y=x) \right)$

ⓓ $\exists x \, \forall y \, M(x,y)$

ⓔ $\exists x \left(E(x) \wedge M(x,0) \wedge M(4,x) \wedge \forall y \left(E(y) \wedge M(y,0) \wedge M(4,y) \rightarrow x=y \right) \right)$

EXTRA:

$$\forall x \forall y \left(\neg (y=0) \rightarrow \exists z \exists t \left(x = s(p(y,z),t) \wedge M(t,0) \wedge M(y,t) \wedge \neg (y=t) \right) \right)$$

3º

(a) Elegimos la interpretación I tal que

$$P^I = \{a, b\},\ Q^I = \{a\},\ R^I = \{b\}.$$

Con esta interpretación:

$\varphi_1^I = 1$, porque $P(x) \to Q(x) \vee R(x)$ tanto si $x = a$ como si $x = b$. es verdadera

$\varphi_2^I = 1$, porque $P^I = D$.

luego $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^I = 1$.

$\varphi_3^I = 0$, porque $x = b$ es un contraejemplo.

luego $(\varphi_3 \wedge \varphi_4)^I = 0$

Por tanto $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \not\models \varphi_3 \wedge \varphi_4$.

(b) Elegimos la interpretación I tal que

$$P^I = Q^I = R^I = \{a\}.$$

Con esta interpretación:

$\varphi_3^I = 1$, ya que $x = a$ es un ejemplo.

$\varphi_4^I = 1$, ya que $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ es verdadera tanto si $x = a$ como si $x = b$.

$\varphi_2^I = 0$ ya que $x = b$ es un contraejemplo.

luego $(\varphi_3 \wedge \varphi_4)^I = 1$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^I = 0$

Por tanto $\varphi_3 \wedge \varphi_4 \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

4º Para términos:

1º ATÓMICOS:

Si a es constante $\Rightarrow G(a) := 0$

Si x es variable $\Rightarrow G(x) := 1$.

2º COMPUESTOS:

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f \text{ es un símbolo de} \\ \text{función de aridad } n \geq 1; \\ t_1, \_, t_n \text{ términos}\end{array}\right\} \Rightarrow G(f(t_1, \_, t_n)) := \sum_{i=1}^{n} G(t_i) + n - 1$

Para fórmulas:

1º ATÓMICAS:

$F(\top) = F(\bot) = F(p) := 0$

(donde p es símbolo de proposición atómica).

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } P \text{ es un símbolo de} \\ \text{predicado de aridad } n \geq 1; \\ t_1, \_, t_n \text{ términos}\end{array}\right\} \Rightarrow F(P(t_1, \_, t_n)) := \sum_{i=1}^{n} G(t_i)$

t_1, t_2 términos $\Rightarrow F(t_1 = t_2) := G(t_1) + G(t_2)$

COMPUESTAS:

φ, ψ fórmulas, $\circ$ conectiva binaria, Q cuantificador, x variable:

2º $F(\neg\varphi) := F(\varphi)$

3º $F(\varphi \circ \psi) := F(\varphi) + F(\psi)$

4º $F(Qx\varphi) := F(\varphi) + 1$

5º

1.	$\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x) \vee R(y))$	Pr.
2.	$\forall x (P(x,x) \to \neg R(x))$	Pr.
3.	$P(a,a)$	Pr.
4.	$\forall y (P(a,y) \to Q(a) \vee R(y))$	E∀, 1.
5.	$P(a,a) \to Q(a) \vee R(a)$	E∀, 4.
6.	$Q(a) \vee R(a)$	E→, 3, 5
7.	$P(a,a) \to \neg R(a)$	E∀, 2
8.	$\neg R(a)$	E→, 7, 3
9.	$Q(a)$	T29, 6, 8
10.	$\exists x\, Q(x)$	I∃, 9