

Primer parcial de Lógica

Grado en Matemáticas

25 de octubre de 2017

1. (2 puntos) Sean Σ una signatura y φ y ψ dos fórmulas proposicionales cuyos símbolos de proposición atómica pertenecen a Σ . Define (de manera formal y rigurosa) los siguientes conceptos:

- a) Valoración sobre Σ .
- b) Modelo de φ
- c) φ es una tautología.
- d) φ es satisfacible.
- e) ψ es consecuencia lógica de φ ($\varphi \models \psi$).
- f) φ es equivalente a ψ ($\varphi \equiv \psi$).

Nota: Puedes suponer que, dadas una valoración u y una fórmula φ , está definido $(\varphi)^u$, el valor de verdad de φ bajo la valoración u , no necesitas definir este concepto. Salvo esto, procura que tus definiciones sean autocontenidas.

2. a) (1,5 puntos) Formaliza mediante lógica proposicional el siguiente razonamiento (obteniendo una única fórmula que lo represente):

Bebo agua sólo cuando tengo sed y no tengo cerveza. No tengo sed a menos que coma demasiado. Cuando como demasiado no bebo agua. Por tanto, si no tengo cerveza, no bebo agua.

b) (1,5 puntos) Determina si el razonamiento es correcto. Nota: Construir la tabla de verdad completa (con todas sus filas) se valorará menos que una solución en la que se evite esto tratando varias de esas filas a la vez.

3. Consideramos en el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} la siguiente relación binaria R :

$$aRb \Leftrightarrow a \cdot b = 1$$

- a) (1 punto) Determina justificadamente si R cumple cada una de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva y antisimétrica.
- b) (0,75 puntos) Añade a R la menor cantidad posible de pares para obtener una relación de equivalencia S . Nota: Añade sólo pares que no estén en la relación, no hagas añadidos redundantes.
- c) (0,75 puntos) Dada la relación de equivalencia S que has obtenido en el apartado anterior, para cada $a \in \mathbb{Q}$, describe la clase de equivalencia de a respecto de la relación S . Di cuántos elementos tiene cada una de esas clases. Pista: Cuidado con las excepciones.
- d) (0,5 puntos) ¿Es R una función de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} ? En caso de que tu respuesta sea negativa, ¿es posible añadir pares a R para obtener una función biyectiva? Justifica tus respuestas.

4. (2 puntos) Sea L el conjunto de las fórmulas bien construidas de la lógica proposicional. Define por recursión una función $f : L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que, dada $\varphi \in L$, devuelva el número total de hojas del árbol estructural de φ . Nota: Se recuerda que se define *hoja* como un vértice del árbol estructural de grado 1 que no coincide con la raíz.