EXAMEN LÓGICA. PARCIAL 2. GRADO MAT. 13/12/17

2º

$D = \mathbb{N}$

$C(x)$: x es compuesto
$P(x)$: x es primo
$\Big\}$ Predicados de aridad 1

u : 1

$s(x,y) : x+y$
$m(x,y) : x \cdot y$
$\Big\}$ Funciones de aridad 2

a) $\forall x \left(C(x) \longleftrightarrow \exists y \exists z \left(x = m(y,z) \wedge \neg(y=u) \wedge \neg(z=u) \right) \right)$

b) $\forall x \left(P(x) \longleftrightarrow \neg(x=u) \wedge \neg C(x) \right)$

c) $\forall x \left(C(x) \longrightarrow \exists y \exists z \exists t \left(x = s(s(y,z),t) \right) \right)$

d) $\neg \exists x \left(P(x) \wedge C(x) \right)$

e) $\neg \forall x \left(P(x) \vee C(x) \right)$

3º

1. $\neg p \vee q$ Pr.
2. $r \vee \neg s$ Pr.
3. $p \vee s$ Pr.
4. p Pr. aux
5. q T29, 4,1
6. $q \vee r$ Iv, 5
7. $p \rightarrow q \vee r$ I→ (4–6)
8. s Pr. aux.
9. r T29, 8, 2
10. $q \vee r$ Iv, 9
11. $s \rightarrow q \vee r$ I→ (8-10)
12. $q \vee r$ Ev, 3, 7, 11

4º

1. $\forall x \forall y \left(P(x,y) \longrightarrow Q(x) \wedge R(y) \right)$ Pr.

2. $\exists x\, P(x,x)$ Pr.

$$\boxed{\begin{array}{lll} 3. & P(u,u) & \text{Pr. aux.} \\ 4. & \forall y\, P(u,y) \longrightarrow Q(u) \wedge R(y) & E\forall, 1, x=u \\ 5. & P(u,u) \longrightarrow Q(u) \wedge R(u) & E\forall, 4, y=u \\ 6. & Q(u) \wedge R(u) & E\rightarrow, 5, 3 \\ 7. & \exists x \left(Q(x) \wedge R(x) \right) & I\exists, 6 \end{array}}$$

8. $P(u,u) \longrightarrow \exists x \left(Q(x) \wedge R(x) \right)$ $I\rightarrow (3-7)$

9. $\exists x \left(Q(x) \wedge R(x) \right)$ $E\exists, 2, 8$

5º

$$\left.\begin{array}{l} D=\{a,b\} \\ P^I=\{a\} \\ Q^I=\{b\} \\ R^I=\{(a,b)\} \end{array}\right\}$$

Veamos que con esta interpretación $\varphi^I=0$, $\psi^I=1$.

$\varphi^I=0$. Veamos un contraejemplo. Tomando $x=a$, $y=a$ tenemos

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{P(a)}_{1} \vee \underbrace{Q(a)}_{0}}_{1} \longrightarrow \underbrace{R(a,a)}_{0}}_{0}$$

$\psi^I=1$. Vamos a justificarlo

Si $(x,y)=(a,b)$ entonces

$$\underbrace{\underbrace{P(a)}_{1} \wedge \underbrace{Q(b)}_{1} \longrightarrow \underbrace{R(a,b)}_{1}}_{1}.$$

Si $(x,y)\neq(a,b)$ entonces.

$$\underbrace{\underbrace{P(x)\wedge Q(y)}_{0} \longrightarrow R(x,y)}_{1}$$

Hemos cubierto todos los posibles valores de x,y. Luego $\varphi \not\equiv \psi$.

6º Empecemos definiendo para términos una función f que devuelva 0 si el término contiene variables y 1 si no las contiene.

1º Términos atómicos:

$f(c) = 1$ si c símbolo de constante
$f(x) = 0$ si ~~x~~ símbolo de variable.

2º Términos compuestos:

si h símbolo de función de aridad $n \geq 1$
$t_1, \ldots, t_n$ términos.

$$f(h(t_1, \ldots, t_n)) = \underbrace{f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot \ldots \cdot f(t_n)}$$

Este valor sólo será 1 si todos los $f(t_i) = 1$, es decir, si ninguno de los términos contiene variables.

Ahora definamos g para fórmulas como piden en el enunciado:

1º Fórmulas atómicas:

$g(\top) = g(\bot) = g(p) = 1$
donde p símbolo de prop. atómica.

$$g(P(t_1, \ldots, t_n)) = f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot \ldots \cdot f(t_n)$$

donde P predicado de aridad $n \geq 1$
y $t_1, \ldots, t_n$ términos.

$$g(t_1 = t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$$

donde t_1 y t_2 son términos.

2º φ fórmula

$$g(\neg\varphi) = g(\varphi)$$

3º φ, ψ son fórmulas, $\circ$ conectiva binaria

$$g(\varphi \circ \psi) = g(\varphi) \cdot g(\psi)$$

4º φ fórmula, x símbolo de variable, K cuantificador

$$g(Kx\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\varphi) = 1 \\ 1 & \text{si } g(\varphi) = 0 \text{ y } x \text{ es la única variable libre de } \varphi. \\ 0 & \text{si } g(\varphi) = 0 \text{ y hay alguna variable libre en } \varphi \text{ distinta de } x \end{cases}$$