

MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

Titulación:

Grado en Ingeniería Mecánica

Tema 3 – Plasticidad

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Jose Antonio Rodriguez Martinez

Tema 3

Plasticidad

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS**
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**
- 3.4 ECUACIONES DE LA PLASTICIDAD (TEORÍA INCREMENTAL Y TOTAL)**
- 3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, dark green font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a white rectangular box.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Tema 3

Plasticidad

3.1 CUESTIONES PREVIAS

3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN

3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

3.4 ECUACIONES DE LA PLASTICIDAD (TEORÍA INCREMENTAL Y TOTAL)

3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, with a horizontal orange bar running beneath the '99'.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3.1.1. Visión macroscópica del comportamiento plástico

El análisis macroscópico del comportamiento plástico requiere :

- Definir un **CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN** formulado en **3D** con el que se establecen las **condiciones** para que comience el proceso de deformación plástica.
- Describir los procesos de **ENDURECIMIENTO** o de **ABLANDAMIENTO** por deformación, que pueden ocurrir bajo sollicitación mecánica 3D.
- Unas **RELACIONES CONSTITUTIVAS** entre *tensiones* y *deformaciones* en la zona plástica.

En régimen plástico, la **relación constitutiva** entre tensión y deformación suele ser *no lineal*.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.1.2. ¿Por qué estudiar plasticidad?

- **¡¡ La naturaleza es así !!**
- En los materiales reales, tras superar el límite elástico queda aún una **reserva de resistencia** notable:
 - que se puede aprovechar
 - de la que interesa conocer el margen de seguridad
- En régimen plástico se producen importantes **redistribuciones de tensiones**, por lo que aumenta la capacidad resistente de la estructura.
- Hay procesos industriales (extrusión, conformado, trefilado,...) en los que la **deformación plástica es imprescindible**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. Below the text is a horizontal brushstroke that transitions from light blue on the left to orange on the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

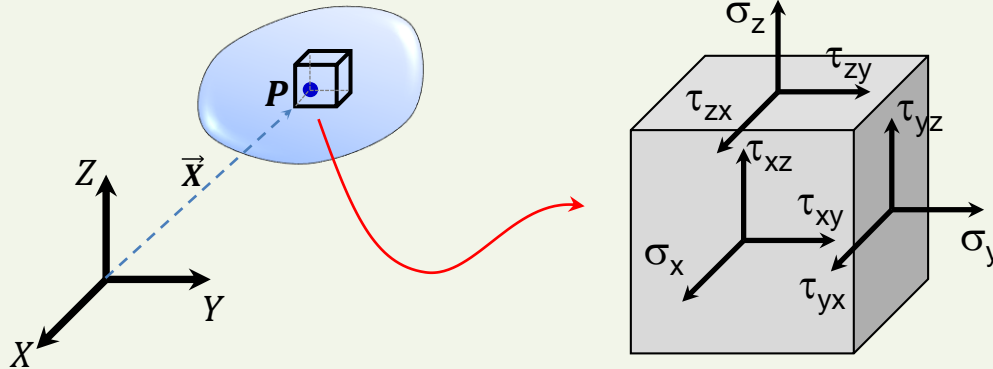
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones

Nota: hay material complementario sobre esto en el apartado 3.1 del libro [Guía de Problemas](#).

- **Tensor de tensiones en unos ejes genéricos (x,y,z):**

El tensor de tensiones es una variable de campo:

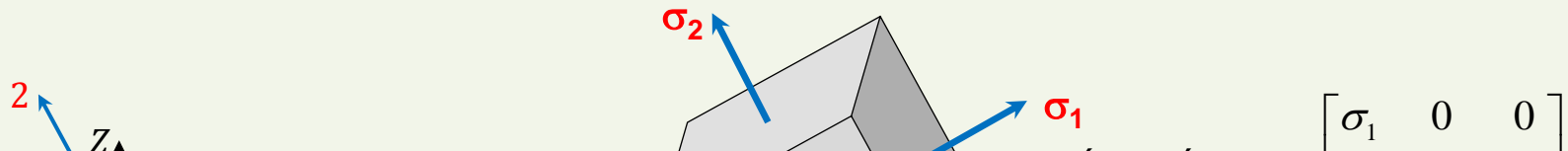
$$\sigma = \bar{\sigma}(\vec{X}, t)$$


$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

(simétrico)

- **Tensor de tensiones en los ejes principales**

(que suelen estar rotados respecto a los ejes originales x,y,z):



(simétrico)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones

- Tensor de tensiones en un sistema de referencia genérico:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Tensor de tensiones referido a las direcciones principales:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de tensiones principales (solución de la ecuación característica)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -[\sigma^3 - \tilde{I}_1 \sigma^2 + \tilde{I}_2 \sigma - \tilde{I}_3] = 0$$

Invariantes

- Invariantes del tensor de tensiones



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones

Invariantes del tensor de tensiones (Invariantes de Cauchy):

$$\begin{cases}
 \tilde{I}_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} & = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
 \tilde{I}_2 = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) & = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\
 \tilde{I}_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xz}\tau_{zx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}\tau_{yx}\sigma_{zz} - \tau_{yz}\tau_{zy}\sigma_{xx} & = \sigma_1\sigma_2\sigma_3
 \end{cases}$$

Estos Invariantes del tensor σ reciben el nombre de **“Invariantes de Cauchy”**.

- Es evidente que cualquier **combinación** de estos invariantes, será también un **invariante**.
- En Mecánica de Sólidos, son de gran utilidad unos invariantes diferentes, derivados a partir de los invariantes de Cauchy.
- Estos nuevos invariantes se denominan **“Invariantes Genéricos”** de σ , y se definen como:

$$\begin{cases}
 I_1 = \tilde{I}_1 & = tr(\sigma) & = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3
 \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$I_3 = -I_1^3 + 3I_1I_2 - I_3 = -tr(\sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qi}) = -tr(\sigma^3) = -(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)$$

3.1.3. Recordatorio sobre el tensor de tensiones

Tensión hidrostática:
$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Componentes del tensor desviador

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\bar{\sigma}$$

El tensor de tensiones tiene 2 componentes:

Una *hidrostática* y una *desviadora*.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

Tensor hidrostático σ_{ij}^h

Tensor desviador S_{ij}

Invariantes genéricos del tensor de tensiones desviadoras, S :

(en función de las tensiones desviadoras *principales*)

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \end{array} \right. \begin{array}{l} \downarrow \text{(en función de las tensiones } \mathbf{principales} \text{ del tensor de } \mathbf{tensiones totales}) \\ \downarrow \\ \downarrow \text{Esta igualdad es válida sólo para tensores desviadores} \end{array}$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

$$J_3 = s_1 s_2 s_3$$

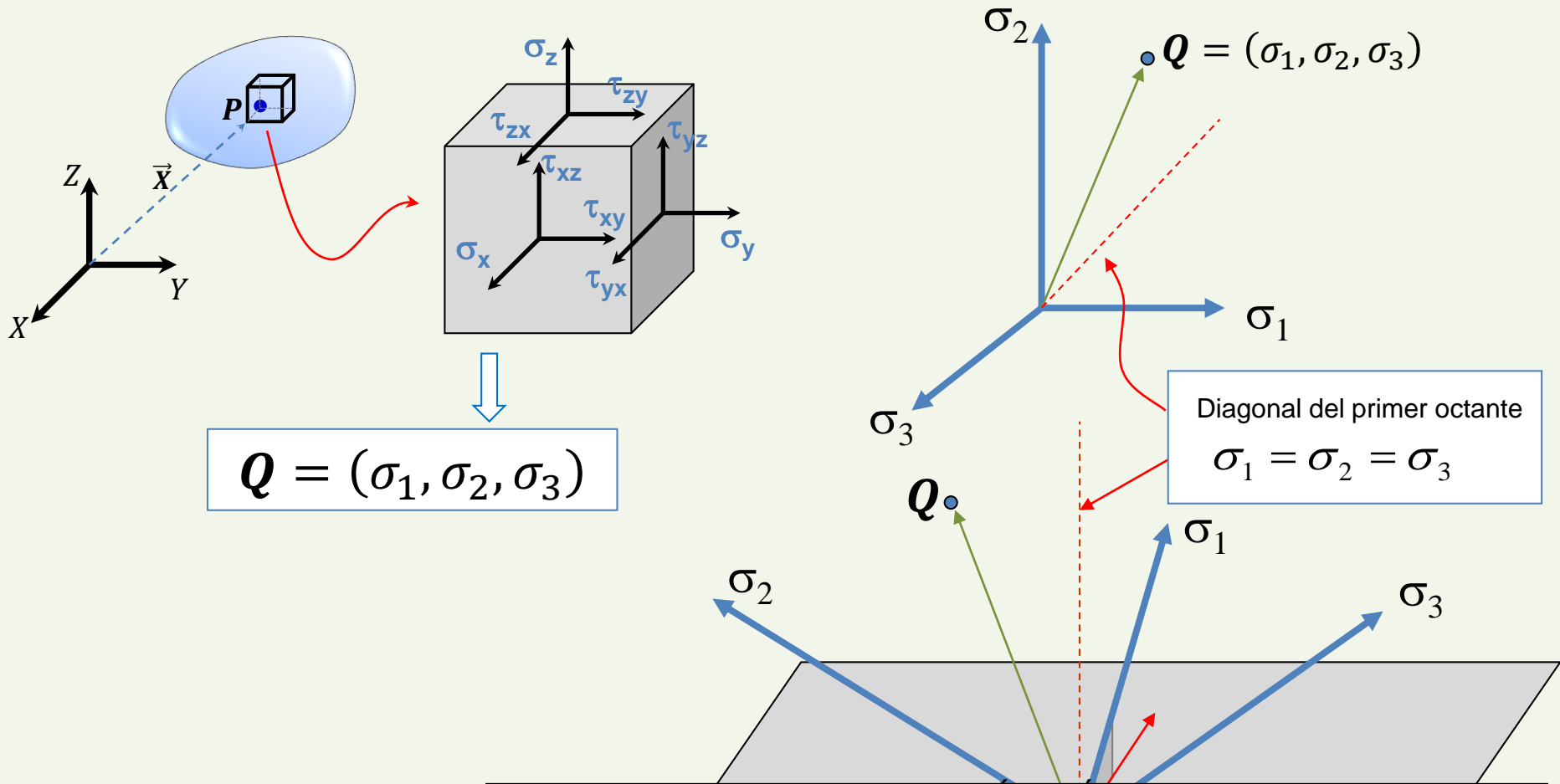


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$J_3 = I_3 - \frac{2}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3$$

3.1.4. Representación geométrica de Haig-Westergaard



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

Plano π

3.1.4. Representación geométrica de Haig-Westergaard

El estado tensional asociado a Q puede representarse a través del vector \overrightarrow{OQ} , de componentes:

$$\overrightarrow{OQ} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$$

Este vector puede descomponerse en sus componentes *normal* y *paralela* al plano π :

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

Donde \overrightarrow{OP} es de la forma:

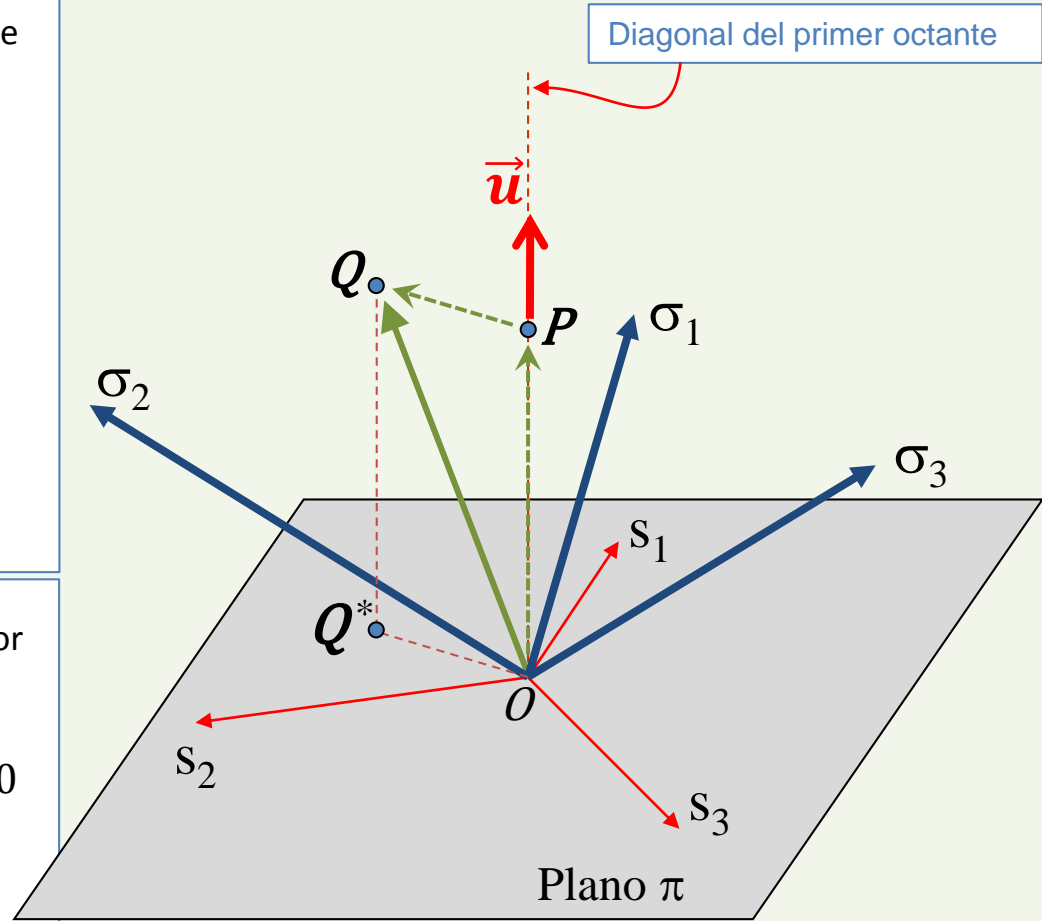
$$\overrightarrow{OP} = (\sigma_p, \sigma_p, \sigma_p)^T$$

Estableciendo la ortogonalidad entre \overrightarrow{PQ} y un vector \vec{u} , paralelo a la diagonal:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = (\sigma_1 - \sigma_p, \sigma_2 - \sigma_p, \sigma_3 - \sigma_p) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

Se obtiene:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1 = 3\bar{\sigma}$$



Cartagena99

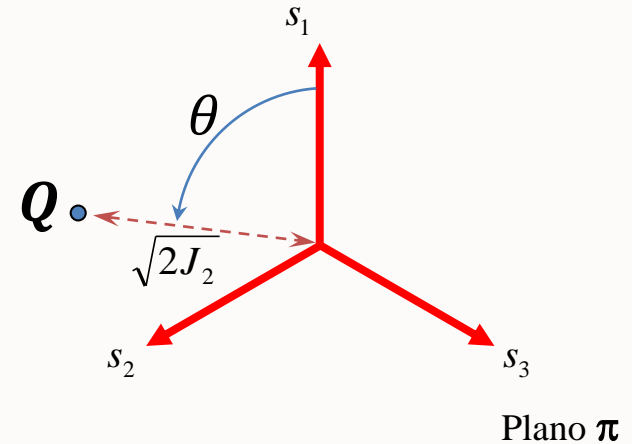
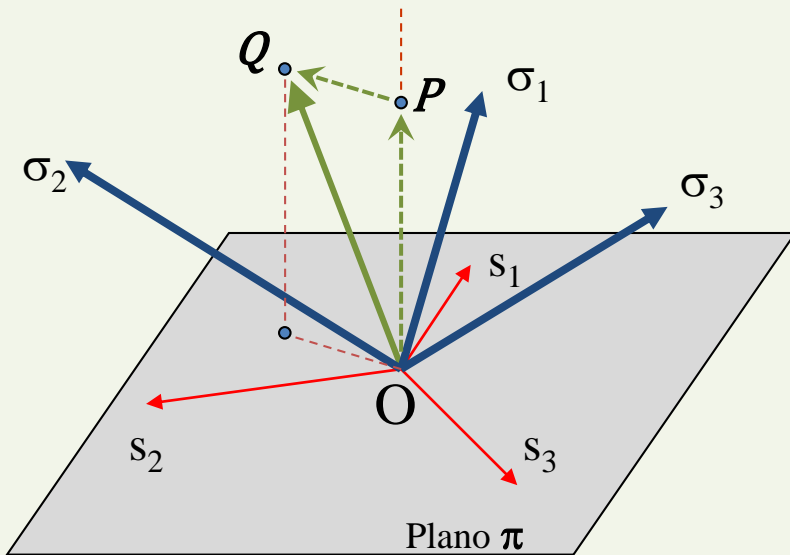
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.1.4. Representación geométrica de Haig-Westergaard

(3/3)

En ocasiones, es conveniente cambiar el **punto de vista**, para observar directamente hacia el plano π :



Ángulo de Lode θ

Se puede calcular de varias formas:

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

O bien:

Magnitudes de las componentes de \vec{OQ} :

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

\rightarrow proyección de OQ sobre el

tensor de tensiones !!!

Tema 3

Plasticidad

3.1 CUESTIONES PREVIAS

3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN

3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

3.4 ECUACIONES DE LA PLASTICIDAD (TEORÍA INCREMENTAL Y TOTAL)

3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a white rectangular box.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

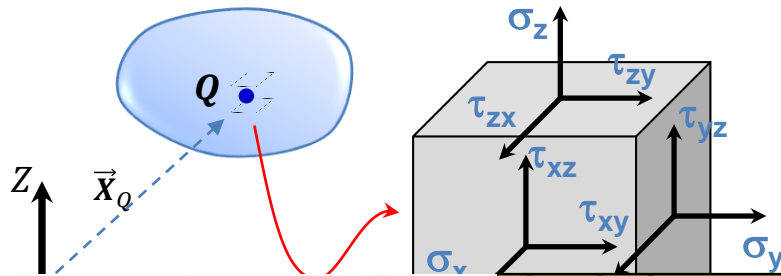
3.2.1. ¿Cómo definir el instante de inicio de la plastificación?

En un ensayo de **tracción uniaxial**, el criterio de plastificación es:

$$\sigma - \sigma_Y = 0$$

Si el estado tensional es **multiaxial**, debemos **generalizar** el concepto de **límite de elasticidad**.

Sea un sólido sometido en un punto **Q** a un estado tensional general (posiblemente multiaxial):



Función de Plastificación:

Es una función escalar que depende de las componentes del tensor de tensiones

$$f = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

Criterio de Plastificación:

- En **régimen elástico**, la función de plastificación es **estrictamente negativa**

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) < 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.2. Hipótesis básicas.-

- No se considera el efecto del *tiempo*.
- No se incluye el efecto de la *temperatura*.
- No se consideran los efectos producidos por la *falta de homogeneidad* del material a escala microscópica:

⇒ El *material real* se idealiza como un *medio continuo homogéneo*.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(1/13)

Hipótesis 1ª.- El material es isótropo

(Isotropía: ausencia de “direcciones predominantes”)

Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

(Bridgman, principios S.XX)

Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión

(No se considerará el efecto Bauschinger)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, sans-serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(2/13)

Hipótesis 1ª.- El material es isótropo

(Isotropía: ausencia de direcciones "predominantes")

Observación: en general, las 6 componentes independientes del tensor de tensiones proporcionan información sobre:

A) Tres cantidades invariantes (usualmente, los autovalores de $\boldsymbol{\sigma}$).

B) Tres vectores propios (las direcciones principales).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

En un **material arbitrario**, posiblemente **no isótropo**, un criterio de plasticificación debería depender de estos **seis elementos** contenidos en (A) y en (B), o bien, de todas las seis componentes de $\boldsymbol{\sigma}$, tal como en la expresión anterior:

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \leq 0$$

Sin embargo, en un **materia isótropo**, las propiedades mecánicas **no dependen de la dirección** en que

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

por las direcciones principales.

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(3/13)

Hipótesis 1ª.- El material es isótropo

(Isotropía: ausencia de direcciones “predominantes”)

Como consecuencia de lo anterior:

un **criterio de plastificación** para un **material isótropo** debería expresarse en función de **cantidades invariantes** asociadas al **tensor de tensiones** y **no** en función de las **componentes** del tensor en un **sistema de referencia particular**.

(**Invariantes**: son magnitudes independientes de la orientación del sistema de referencia que se escoja)



Primera alternativa: usar como “cantidades invariantes” a las **tensiones principales**.

Segunda alternativa: usar como “cantidades invariantes” a los **invariantes** del tensor de tensiones.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

Hipótesis 1ª.- El material es isótropo

(Isotropía: ausencia de direcciones “predominantes”)

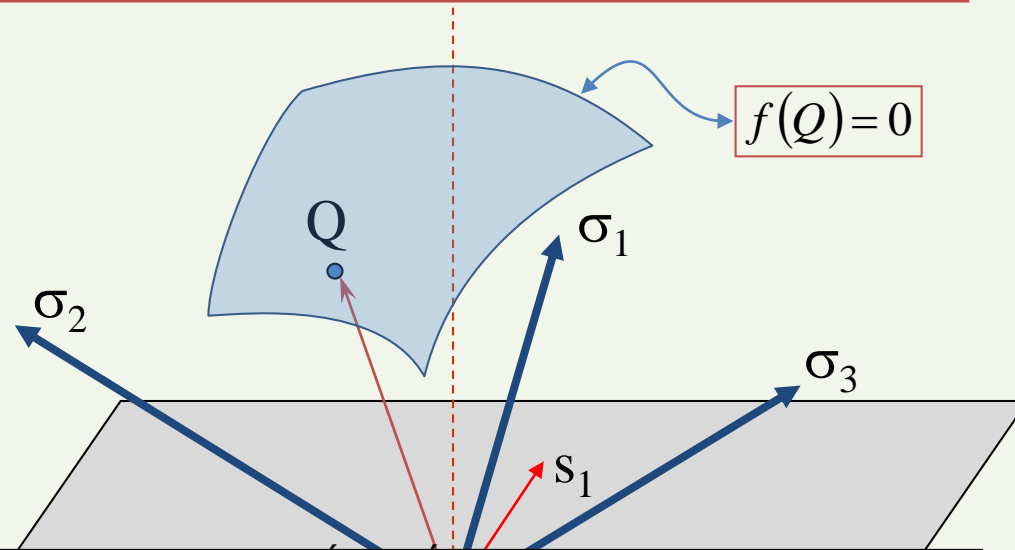
CONSECUENCIA DE LA ISOTROPÍA: Si consideramos, por ejemplo, la primera alternativa $f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces:

¿ Qué representa la ecuación $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ que define al criterio de plasticación ?

Es evidente que, si $Q = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es un punto genérico del espacio de tensiones, entonces la condición (o criterio)

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(Q) = 0$$

define una **superficie** en el **espacio de las tensiones principales**.



Superficie de plasticación:

“Es el lugar geométrico del **espacio** de las tensiones principales donde se satisface el

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Esto depende de las otras dos hipótesis adicionales

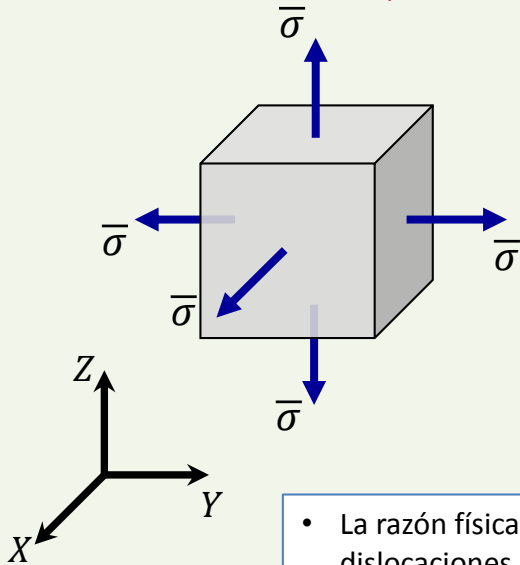
plano π

σ_3

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

(Bridgman, principios S.XX)



$$\sigma_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}}_{\sigma_{ij}^h} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \bar{\sigma} \end{bmatrix} = S_{ij}$$

NO produce plastificación, ni cambio permanente de volumen.

- La razón física que sustenta esta hipótesis es que la tensión hidrostática **no induce** movimiento de dislocaciones ni procesos de maclado.
- Por lo tanto, esta hipótesis es aplicable en **metales** u otros materiales en los que la naturaleza de la deformación plástica sea **deslizamiento** o **maclado**.
- Esta hipótesis **es aplicable** en una **cantidad importante de materiales de uso ingenieril**, aunque existen, ciertamente, materiales en los que esta hipótesis no es razonable (rocas y ciertos materiales porosos).



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

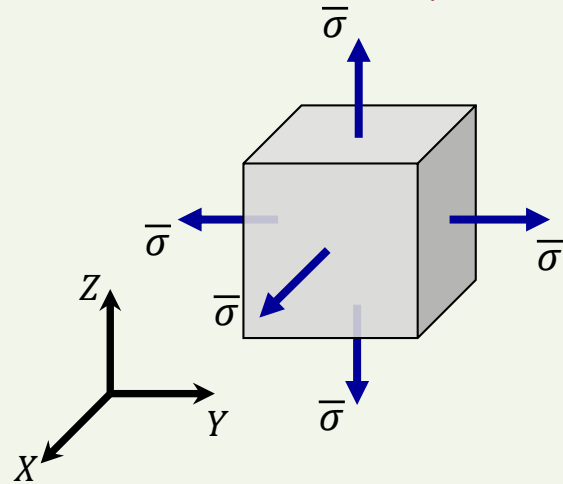
asociadas al tensor desviador S_{ij} ; no al tensor hidrostático σ_{ij}^h

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(6/13)

Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

(Bridgman, principios S.XX)



$$\sigma_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}}_{\sigma_{ij}^h} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \bar{\sigma} \end{bmatrix} = S_{ij}$$

NO produce plastificación, ni cambio permanente de volumen.

Primera alternativa: usar como “cantidades invariantes” a las *tensiones principales* del *tensor desviador*.

La *función de plastificación* depende de las *tensiones*

Segunda alternativa: usar como “cantidades invariantes” a los *invariantes* del *tensor desviador*.

La *función de plastificación* depende de los *invariantes* del *tensor desviador*, de modo que el *criterio de plastificación*

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Además: En el caso de *muchos metales*, el invariante J_3 tiene *muy*

importante influencia en el criterio de plastificación.

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(7/13)

Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

(Bridgman, principios S.XX)

Más aun: Si se recuerda la definición del **Ángulo de Lode** (ver pág. [12](#)), resulta que:

para un **valor fijo** de J_2 , se tiene que:

la relación entre J_3 y $\cos(3\theta)$ es de **proporcionalidad**.

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

Por lo tanto:

El criterio de plastificación en la forma

$$f(J_2, J_3) = 0$$

Puede reformularse como:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la **superficie de plastificación**

Sean **P** y **Q** puntos representativos de **dos estados tensionales** que **difieren exclusivamente** en su componente **hidrostática**.

→ Esto es, ambos puntos tienen igual J_2 e igual J_3 .

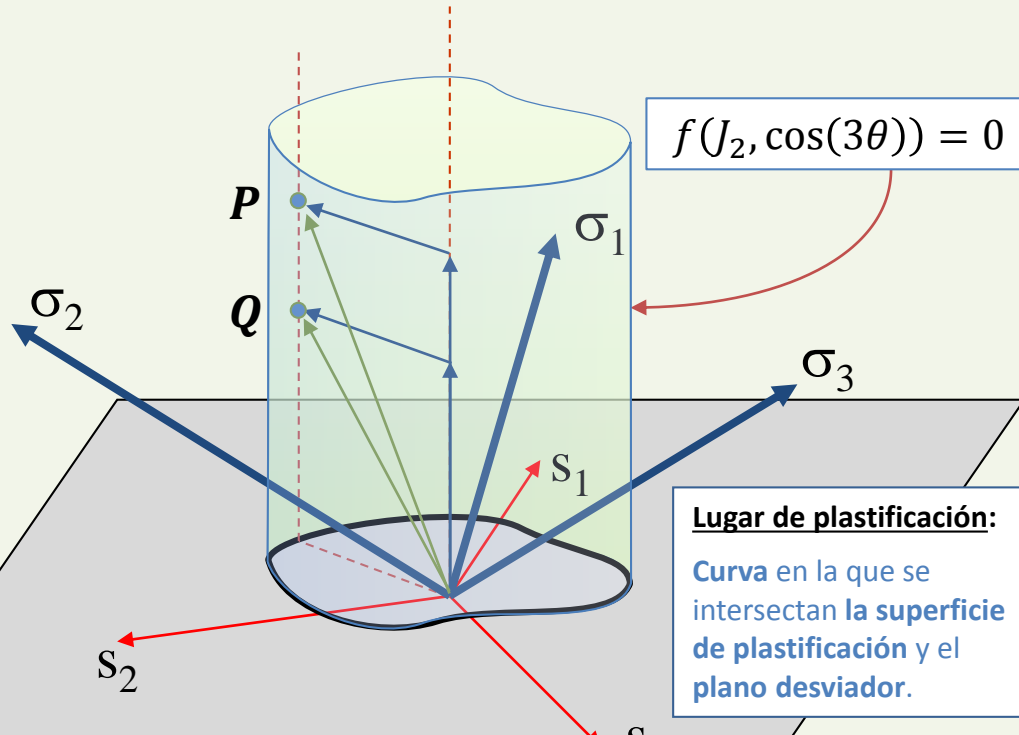
Necesariamente, **P** y **Q** están en la **misma recta** perpendicular al plano π (pues tienen igual ángulo θ)

Como hemos admitido que:

$$f = f(J_2, \cos(3\theta))$$

Y como, además, se tiene que:

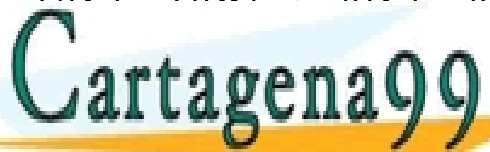
$$I_1(P) = I_1(Q) \quad ; \quad \theta(P) = \theta(Q)$$



Lugar de plastificación:
Curva en la que se intersectan la **superficie de plastificación** y el **plano desviador**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(9/13)

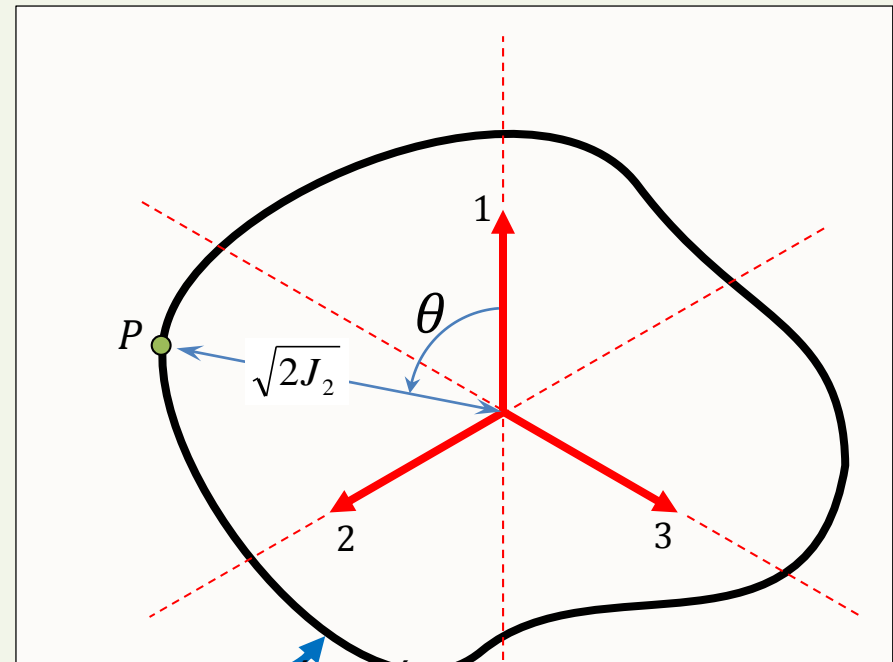
Hipótesis 2ª.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la **superficie de plastificación**

Al cambiar el punto de vista, se aprecia que el **Lugar De Plastificación** contiene **toda la información relevante** sobre la **Superficie de Plastificación**

Si **P** es un estado tensional que **satisface el criterio de plastificación** $f(J_2, \cos(3\theta)) = 0$, entonces

P se sitúa **en el lugar de plastificación.**



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(10/13)

Hipótesis 2^a.- La plastificación es independiente de la componente hidrostática de la tensión

CONSECUENCIAS de esta hipótesis en la forma de la **superficie de plastificación**

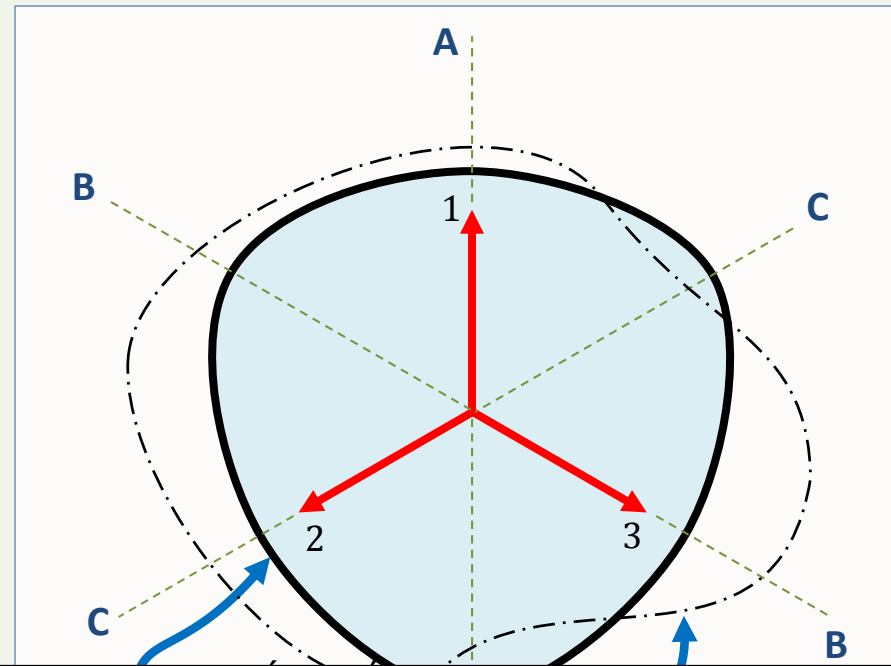
¿ Qué formas puede adoptar el Lugar de Plasticificación ?

Evidencia experimental y consideraciones termodinámicas sugieren que esta curva debe ser:

- Cerrada
- Convexa

Además, puede demostrarse que las hipótesis de:

$$\text{Isotropía} + f = f(J_2, \cos(3\theta)) ,$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

(que es el período de la función $\cos(3\theta)$)

Ejemplo de curva **NO ADMISIBLE** para el L.P. (tiene zonas

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(11/13)

Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión

El límite elástico no cambia al cambiar de signo las tensiones aplicadas.

∴ La función de plastificación **no debe cambiar** si todas las componentes del tensor de tensiones cambian de signo

$$\Rightarrow f(\sigma_{ij}) = f(-\sigma_{ij})$$

∴ f debe ser función **par** de s_1, s_2 y s_3 .

Primera alternativa:

Si se escoge $f(s_1, s_2, s_3) = 0$, la **función de plastificación** debe escogerse de modo que garantice

Segunda alternativa:

Si se escoge $f(J_2, \cos(3\theta)) = 0$, entonces:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(12/13)

Hipótesis 3ª.- El comportamiento a tracción es el mismo que a compresión

Sean: $\mathbf{P} = (s_1, s_2, s_3)$; $\mathbf{Q} = (-s_1, -s_2, -s_3)$

Es directo verificar que:

$$J_2(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = J_2(\mathbf{Q})$$

$$J_3(\mathbf{P}) = s_1 s_2 s_3 = -J_3(\mathbf{Q})$$

Por lo tanto, según la definición del Ángulo de Lode, se tiene:

$$\cos(3\theta) = -\cos(3\theta^*)$$

Si el material plastifica en \mathbf{P} , entonces también plastifica en \mathbf{Q} , es decir:

$$f(\mathbf{P}) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{Q}) = 0$$

Por lo tanto:

La función de plasticación $f = f(J_2, \cos(3\theta))$ debe escogerse como función **par de su segundo argumento**, de modo que:

$$f(J_2, \cos(3\theta)) = f(J_2, -\cos(3\theta))$$

- Identidad trigonométrica: $-\cos(3\theta) = \cos(\pi - 3\theta) = \cos(\pi - 3\theta + 2\pi) = \cos(3[\pi - \theta])$
- Cambio de variables: $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \cos(3\theta) = \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]\right)$ y $-\cos(3\theta) = \cos\left(3\left[\frac{\pi}{2} + \alpha\right]\right)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.3. Hipótesis adicionales aplicables en el caso de materiales metálicos

(13/13)

Todas las consecuencias de las Hipótesis 1ª, Hipótesis 2ª y Hipótesis 3ª

¿ Qué formas puede adoptar el Lugar de Plastificación ?

Evidencia experimental y consideraciones termodinámicas sugieren que esta curva debe ser:

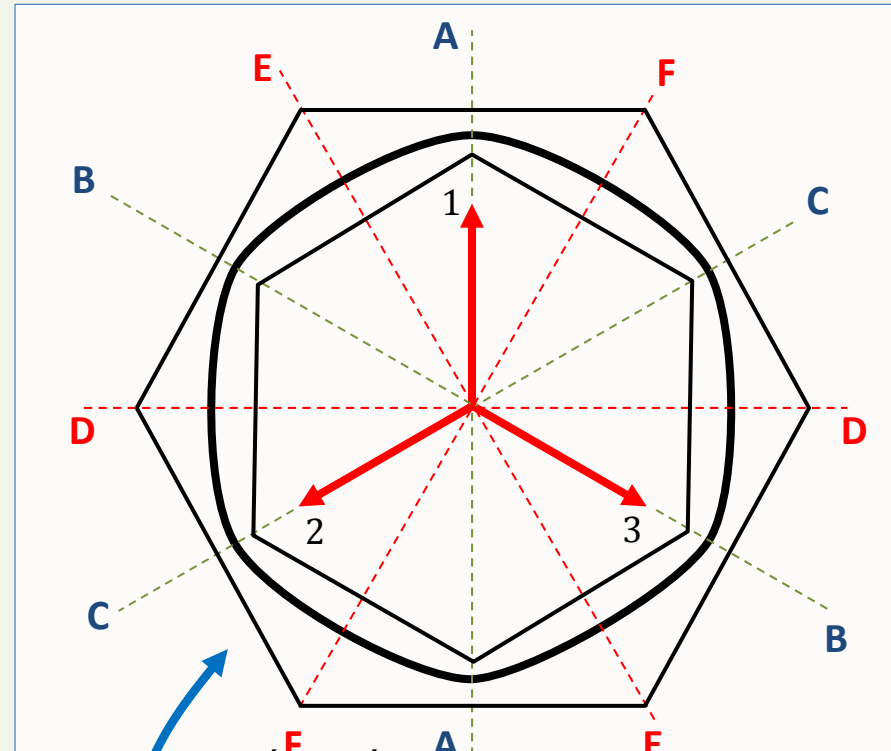
- Cerrada
- Convexa

Las hipótesis 1 y 2, de:

$$\text{Isotropía} + f = f(J_2, \cos(3\theta)),$$

tienen como resultado lo siguiente:

- (1) La **curva** es **simétrica** con respecto a los ejes AA, BB y CC (debido a la **paridad** de la función **coseno**)
- (2) La **curva** tiene **periodicidad** de 120° (que es el **período** de la función $\cos(3\theta)$)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Las 3 curvas satisfacen las 3 hipótesis !!!

Cartagena99

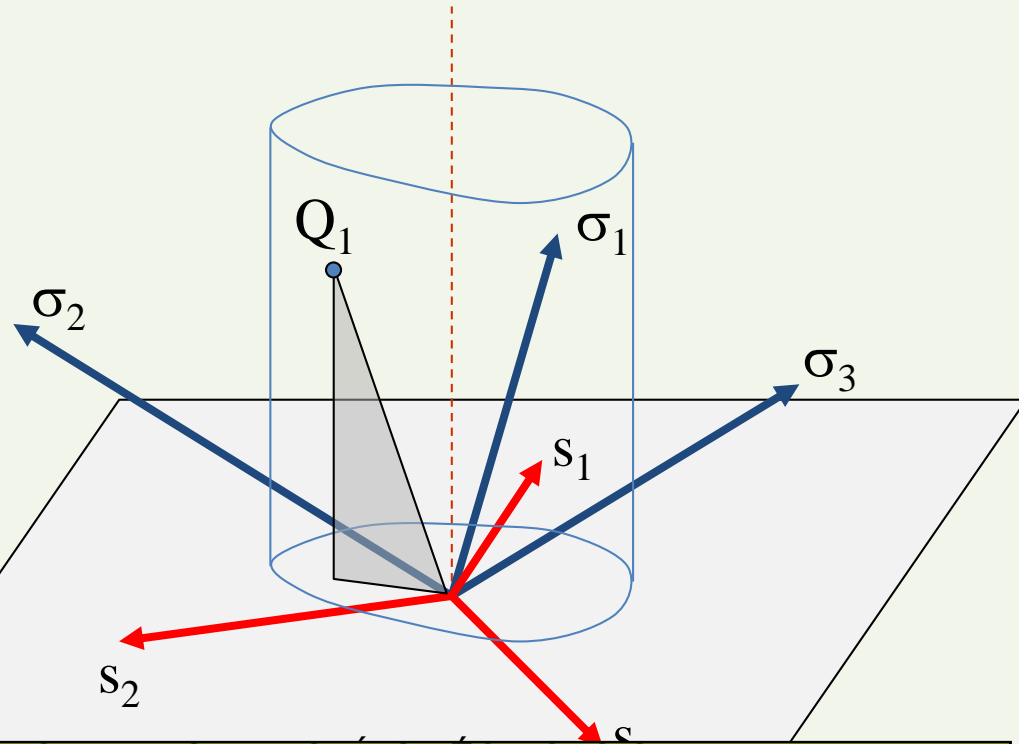
3.2.4. Discusión

(1/4)

Consideremos una sollicitación mecánica **PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

Q_1 : el material no ha plastificado.
 Q_1 está **dentro** de la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.4. Discusión

(2/4)

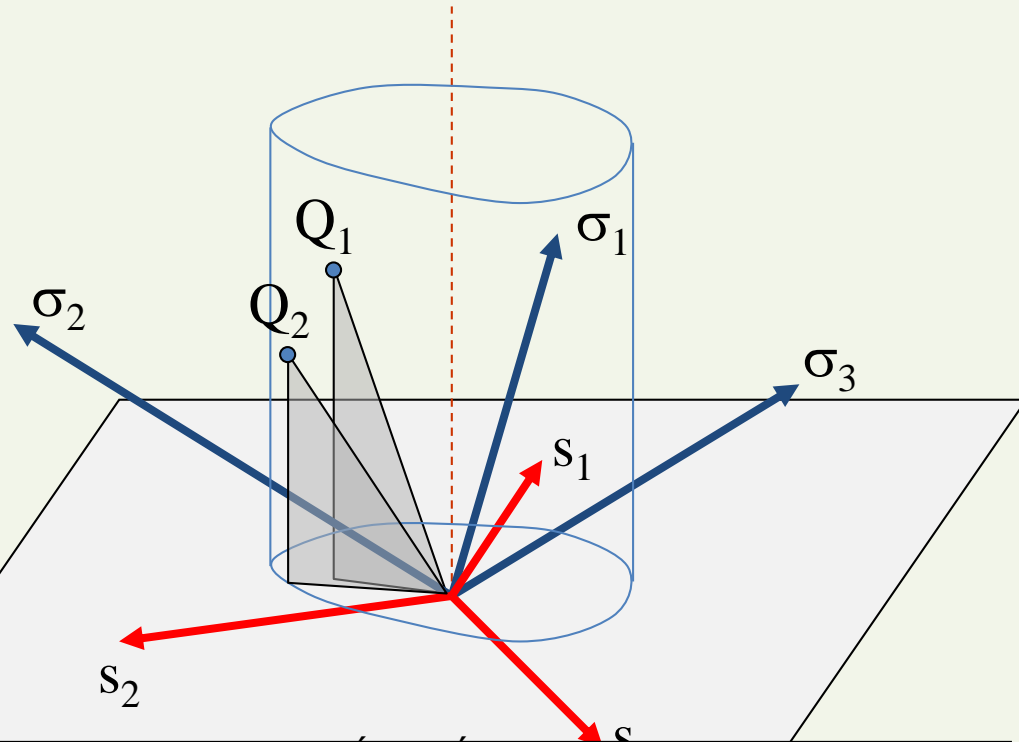
Consideremos una sollicitación mecánica **PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

Q_1 : el material no ha plastificado.
 Q_1 está **dentro** de la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$

Q_2 : el material ha plastificado.
 Q_2 está **en** la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_2)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.4. Discusión

(3/4)

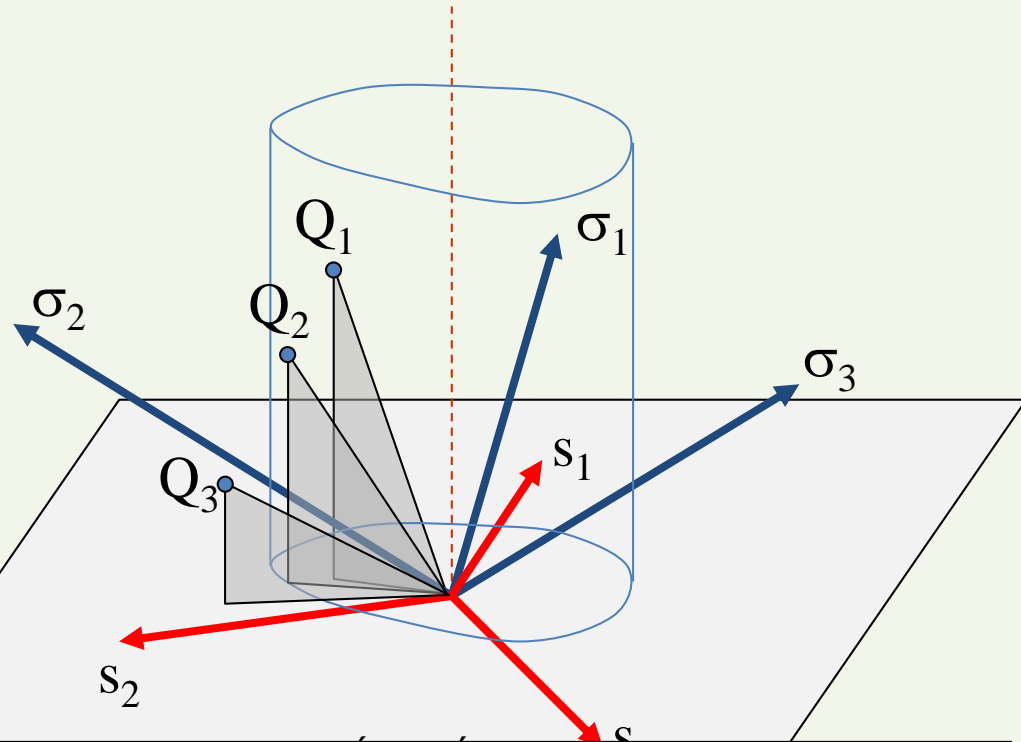
Consideremos una sollicitación mecánica **PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

Q_1 : el material no ha plastificado.
 Q_1 está **dentro** de la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$

Q_2 : el material ha plastificado.
 Q_2 está **en** la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_2)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.4. Discusión

(4/4)

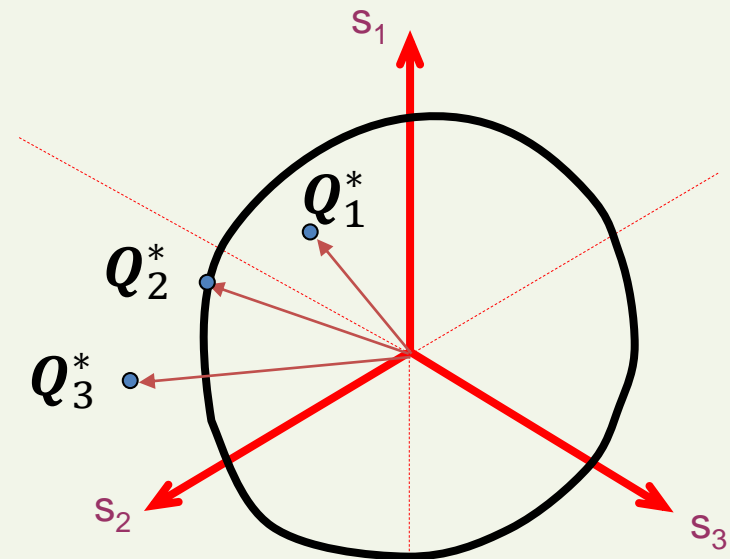
Consideremos una sollicitación mecánica **PROGRESIVAMENTE CRECIENTE**

Q_1 : el material no ha plastificado.
 Q_1 está **dentro** de la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) < 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_1)$$

Q_2 : el material ha plastificado.
 Q_1 está **en** la **superficie de plasticación**

$$f(J_2) = 0 \quad \text{para} \quad J_2 = J_2(Q_2)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.5. Criterio de plasticificación de Tresca-Guest

(1/2)

Criterio:

“La plasticificación se produce cuando la **tensión tangencial máxima** alcanza un **valor crítico**”

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \tau_{\text{crítica}}$$

siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



En un **ensayo de tracción uniaxial** sabemos que:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

y, si se alcanza la plasticificación,

$$\sigma_1 = \sigma_Y \quad \text{por lo que} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

Si aplicamos el criterio de Tresca

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_Y - 0}{2} = \tau_{\text{crítica}}$$

de lo que se deduce

$$\tau_{\text{crítica}} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

la plasticificación”

3.2.5. Criterio de plasticificación de Tresca-Guest

(2/2)

Función de plasticificación del Criterio de Tresca:

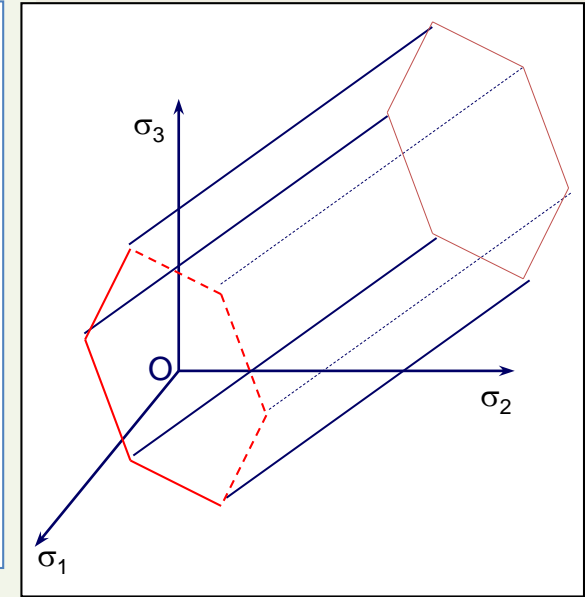
En caso de que las tensiones principales no estén “ordenadas” de mayor a menor, se puede escribir como:

$$f(s_1, s_2, s_3) = \max\{|s_1 - s_2|, |s_1 - s_3|, |s_2 - s_3|\} - \sigma_Y$$

Criterio de Tresca:

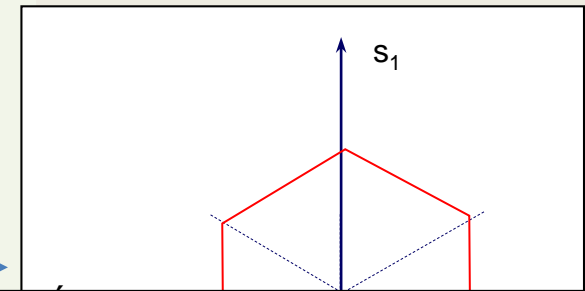
$f(s_1, s_2, s_3) < 0 \Rightarrow$ Comportamiento elástico

$f(s_1, s_2, s_3) = 0 \Rightarrow$ Se satisface criterio de plasticificación



La **superficie de plasticificación** es una superficie **prismática hexagonal** cuyo eje es la bisectriz del espacio de las tensiones principales

El lugar de plasticificación es un hexágono cuyo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai

(1/5)



¿Qué es la energía de distorsión?

Es la energía consumida para obtener un **cambio de forma** de un elemento de volumen, **sin cambio** en su **volumen**.

$$U^d = U^T - U^V$$

Energía de distorsión

Energía necesaria para producir un **cambio de volumen** sin cambio de forma.

Energía total: es el **trabajo total** suministrado por las fuerzas externas.

Criterio:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

crítica

Cartagena99

3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai

• Cambio de volumen:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1}{1}$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\nu)}{E} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)3(1 - 2\nu)}{3E} = \frac{3\bar{\sigma}(1 - 2\nu)}{E}$$

• Energía consumida en el cambio de volumen, U^V:

$$U^V = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3}{2E} \bar{\sigma}^2 (1 - 2\nu) = \frac{1}{2E} (1 - 2\nu) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3)$$

• Energía total, U^T

$$U^T = \frac{1}{2} (\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) (1 - 2\nu)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai

(3/5)

Criterio en términos del 2º invariante del tensor desviador:

“La plastificación se produce cuando la **energía de distorsión** alcanza un **valor crítico**”

$$U^d = \frac{1}{2G} J_2 = U_{crítica}^d$$

En un ensayo de **tracción uniaxial** la **energía de distorsión** justo cuando se alcanza la plastificación es

$$U^d = \frac{2(1+\nu)}{3E} \left[\frac{(\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2}{4} \right] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2 = \frac{1}{6G} \sigma_Y^2$$

con lo cual $\frac{1}{6G} \sigma_Y^2 = U_{crítica}^d$

Reformulación del Criterio de von Mises:

“En una situación **tridimensional general**, la **plastificación** se produce cuando la **energía de distorsión** alcanza un valor **igual** al que alcanza en un **ensayo de tracción uniaxial** en el instante en el que comienza la plastificación”



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

--

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Al criterio de plastificación de **von Mises** se le denomina también “**criterio J_2** ”

3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai

(4/5)

En lugar de expresar el **criterio de von Mises** en términos de J_2 , cuyas unidades son $[\text{MPa}]^2$, es más práctico expresarlo en términos de una **“tensión equivalente”** en **MPa**.

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{\sigma_Y^2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_Y$$

Se define la **“Tensión Equivalente de von Mises”** como:

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3J_2}$$

El **criterio de von Mises** se reescribe en términos de **tensiones** como:

“En una situación **tridimensional general**, la plastificación se produce cuando la **Tensión Equivalente de von Mises** alcanza un valor **igual al límite de elasticidad** del material, medido en un ensayo de tracción uniaxial”

Es decir, el material plastifica cuando:

$$q = \sigma_Y$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.6. Criterio de Von Mises-Hencky-Nadai

(5/5)

Función de plastificación del Criterio de Von Mises:

$$f = f(J_2) = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y \quad \text{o bien} \quad f = f(q) = q - \sigma_Y$$

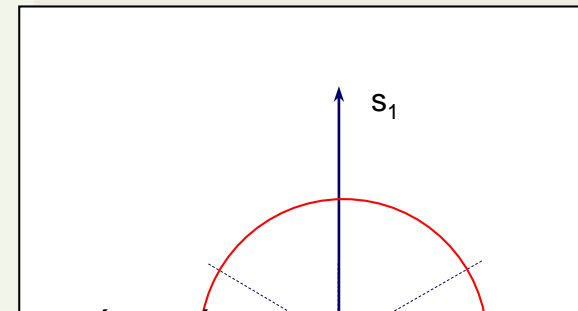
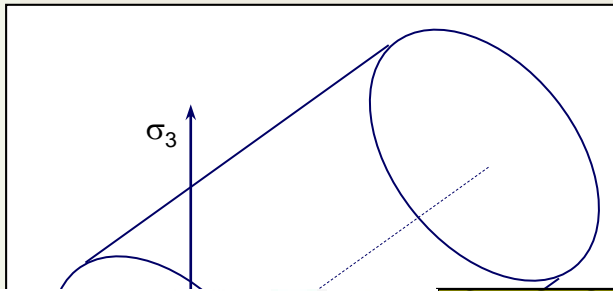
Criterio de von Mises:

$f < 0 \Rightarrow$ Comportamiento elástico

$f = 0 \Rightarrow$ Se satisface criterio de plastificación

La superficie de plastificación es de sección circular cuyo eje es la bisectriz del espacio de las tensiones principales

El lugar de plastificación es una circunferencia



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

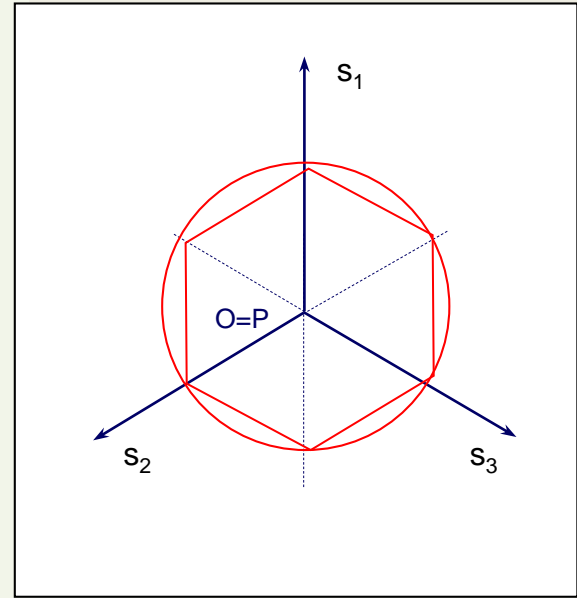
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.2.7 Comparación: Criterio de Tresca vs criterio de Von Mises

(1/3)

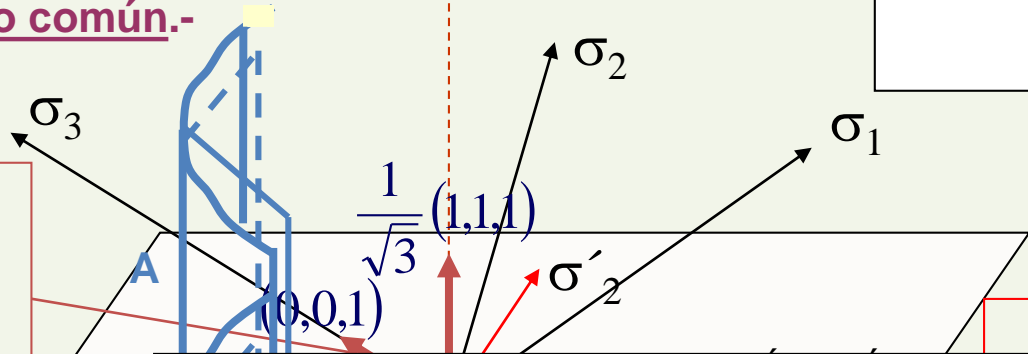
Si $OA = \sigma_Y$, **A** representa un ensayo de tracción en el que se ha alcanzado la **plastificación**, entonces **A'** debe pertenecer al lugar de plastificación, sea éste el correspondiente a los criterios de Tresca o de Von Mises



El lugar de plastificación del criterio de **Von Mises** es una **circunferencia circunscrita al hexágono** que es el lugar de plastificación del criterio de **Tresca**

Cálculo del radio común.-

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

circunferencia y al hexágono



3.2.7 Comparación: Criterio de Tresca vs criterio de Von Mises

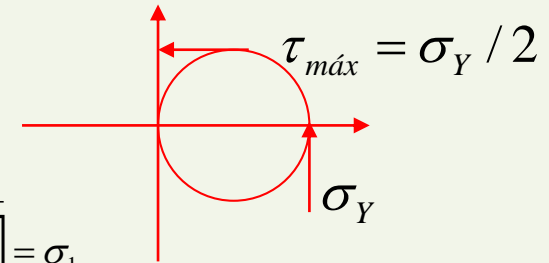
(2/3)

Estado tensional de tracción simple.-

(a) $\sigma_1 > 0 \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(b) $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$

(c) $q = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_1$

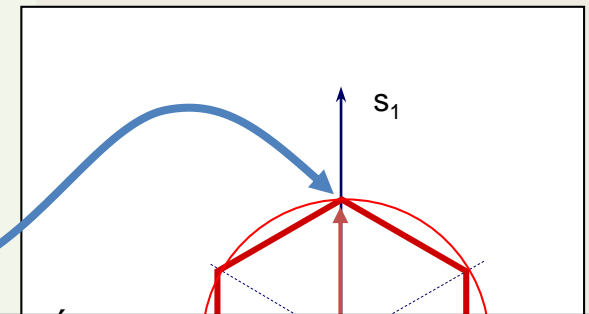


Criterio de Tresca:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{cr\acute{i}tica} = \frac{\sigma_Y}{2} \xrightarrow{(b)} \sigma_1 = \sigma_Y$$

Criterio de Von Mises:

$$q = \sigma_Y \xrightarrow{(c)} q = \sigma_1 = \sigma_Y$$



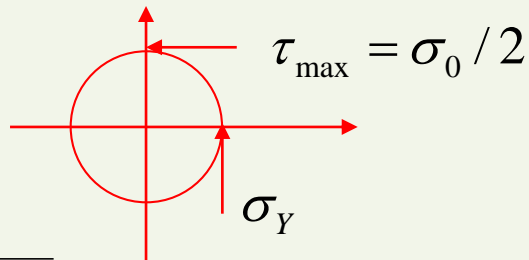
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\sigma_1 = \sigma_Y$

3.2.7 Comparación: Criterio de Tresca vs criterio de Von Mises



Estado tensional de cortante puro.-

(a) $\sigma_1 = -\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2 = 0$

(b) $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - (-\sigma_1)}{2} = \sigma_1$

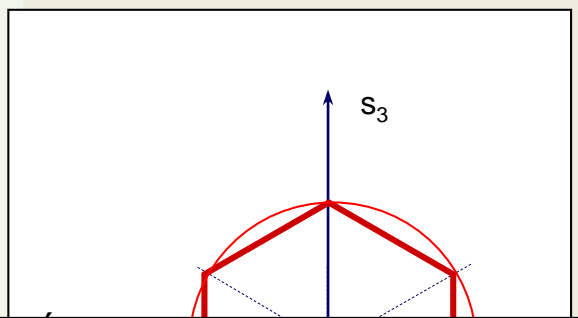
(c) $q = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\sigma_1$

Criterio de Tresca

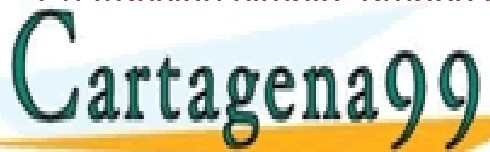
$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{cr\acute{i}tica} = \frac{\sigma_Y}{2} \xrightarrow{(b)} \sigma_1 = \frac{\sigma_Y}{2}$

Criterio de Von Mises

$q = \sigma_Y \xrightarrow{(c)} \sqrt{3}\sigma_1 = \sigma_Y \xrightarrow{(b)} \tau_{m\acute{a}x} = \sigma_1 = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$



En tracción simple ambos criterios predicen



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3.2.8 Otros Criterios de Plastificación

(1/5)

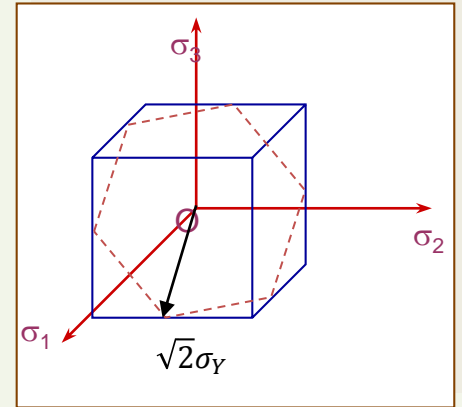
a) Criterio de Rankine-Lame

El sólido permanece dentro del rango elástico si se cumplen simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} |\sigma_1| < \sigma_Y \\ |\sigma_2| < \sigma_Y \\ |\sigma_3| < \sigma_Y \end{cases}$$



Es la extrapolación directa del criterio de plastificación en un ensayo de tracción



La superficie de plastificación es un cubo de lado $2 \cdot \sigma_Y$

¡ El criterio depende implícitamente del primer invariante !!

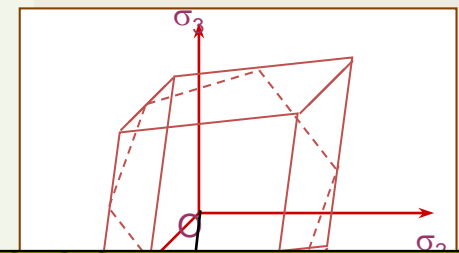
b) Criterio de Saint Venant-Poncelet

El sólido permanece dentro del rango elástico si se cumplen simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} |\epsilon_1| < \epsilon_e \\ |\epsilon_2| < \epsilon_e \end{cases}$$

Empleando la ley de Hooke generalizada este criterio

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)| < \sigma_Y \\ |\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)| < \sigma_Y \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

tensiones es un romboedro

El criterio depende implícitamente del primer invariante !!

3.2.8 Otros Criterios de Plastificación

(2/5)

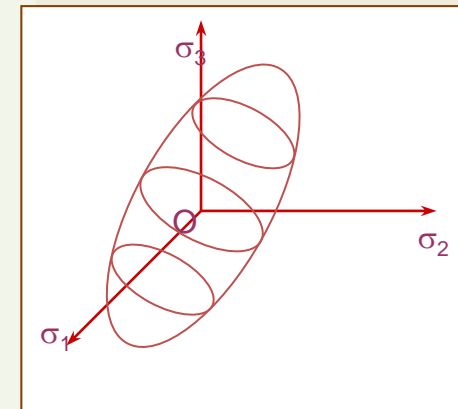
c) Criterio de Beltrami-Haig

La plastificación se inicia cuando la energía de deformación alcanza el valor de energía que origina la plastificación en un ensayo de tracción

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) < \sigma_Y^2$$

$$I_1^2 + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot I_2 < \sigma_Y^2$$

Es una generalización del criterio de **Von Mises**, añadiendo una dependencia **cuadrática** del **primer invariante** del tensor de tensiones.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3.2.8 Otros Criterios de Plastificación

(3/5)

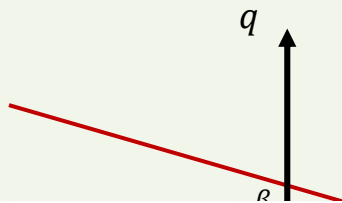
d) Criterio de Drucker-Prager

Se puede considerar una generalización del criterio de **Von Mises**, añadiendo la dependencia lineal del primer invariante del tensor de tensiones.

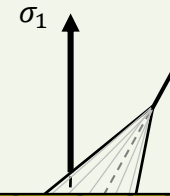
$$\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - \beta = 0$$

Donde: α y β son propiedades del material

- Si $\alpha = 0$ el criterio se reduce a von Mises (se recuerda que $q = \sqrt{3J_2}$).
- El parámetro α es adimensional y corresponde a un coeficiente de **fricción interna**.
- El parámetro β tiene unidades de tensión y corresponde a un coeficiente de **cohesión**.



$$\alpha = \tan \phi$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

α

σ_2

3.2.8 Otros Criterios de Plastificación

(4/5)

e) Criterio de Mohr-Coulomb (1773)

- Este criterio suele utilizarse como **criterio de fallo** en materiales frágiles en los que la resistencia a compresión es mucho mayor que a tracción, y en los que la “**fricción interna**” juega un papel.
- En él, pueden participar los tres invariantes del tensor de tensiones: $f(I_1, I_2, I_3) = 0$
- Por razones históricas, este criterio suele expresarse en términos de **componentes** de tensión, en lugar de **invariantes**.

Hay tres expresiones alternativas para el criterio:

$$k\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_c = 0$$

Donde: k y σ_c son propiedades del material

$$R + \frac{k-1}{k+1}C - \frac{\sigma_c}{k+1} = 0$$

Donde: R y C son el radio y el centro del círculo de Mohr en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

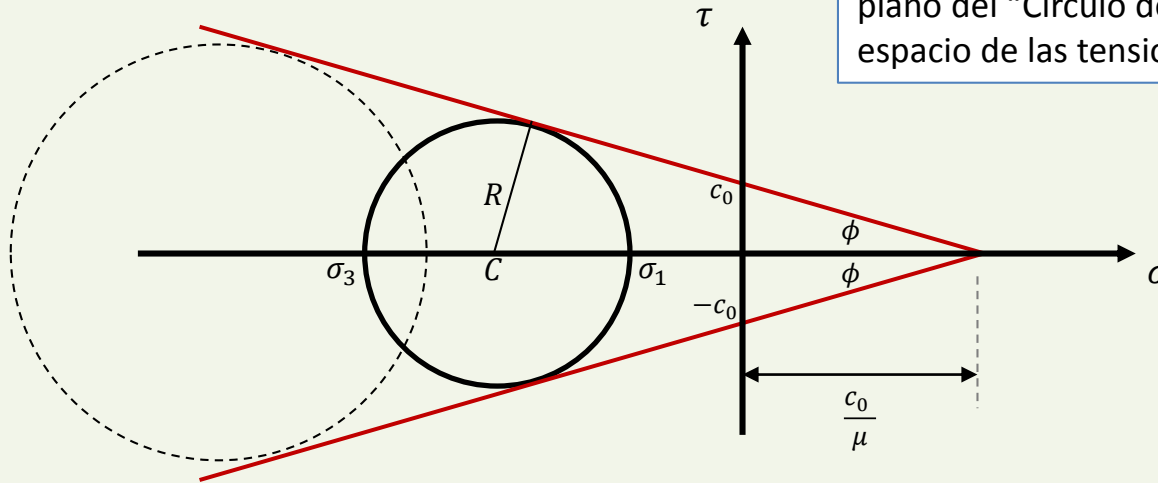
Móhr asociado al plano $\sigma_1 - \sigma_3$, cuyo centro y radio son R y C .

3.2.9 Otros Criterios de Plastificación

(5/5)

e) Criterio de Mohr-Coulomb (1773)

En este caso, el criterio se ha representado en el plano del "Círculo de Mohr", en lugar del espacio de las tensiones principales



$$\sin \phi = \frac{k - 1}{k + 1}$$

$$\mu = \tan \phi$$

$$c_0 = \frac{\sigma_c}{2\sqrt{k}}$$

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$k\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_c = 0$$

$$R + \frac{k - 1}{k + 1}C - \frac{\sigma_c}{k + 1} = 0$$

Donde: k y σ_c son propiedades del material

Donde: R y C son el radio y el centro del círculo de Mohr en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70