MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

Titulación:

Grado en Ingeniería Mecánica

Tema 3 – Plasticidad

Tema 3

Plasticidad

Tema 3

Plasticidad

Tema 3 – Plasticidad

3.4 – Teorías de la Plasticidad

CONTENIDOS

3.4.1 Introducción

- Anteriormente, se han estudiado las ***condiciones*** que debe cumplir el ***estado tensional*** para que se ***inicie*** la ***deformación plástica*** en el material.
- Estas condiciones conforman el ***Criterio de Plastificación***:
  - -- En el caso ***uniaxial*** (sea tracción o compresión), se utiliza como límite un único valor escalar, conocido como ***Límite Elástico*** o ***Tensión de Fluencia***, σ_Y
  - -- En el caso ***multiaxial*** general, se utiliza el concepto de ***Superficie de Plastificación***, o bien, de ***Lugar de Plastificación*** (en aquellos casos en que la tensión hidrostática no juega ningún papel).
- Se ha estudiado también el concepto de ***Endurecimiento por Deformación***, que:
  - -- En el caso ***uniaxial***, se traduce en un ***aumento*** del ***Límite Elástico*** σ_Y , frente a un aumento de la solicitación mecánica.
  - -- En el caso ***triaxial*** general, se traduce en una ***expansión*** del ***Lugar de Plastificación***, frente a un aumento de la solicitación mecánica (expansión que ocurre ***sin cambio de forma***, en el caso de endurecimiento isótropo).

¿ De qué manera se relacionan la *tensión* y la *deformación* ?

3.4.1 Introducción

- La relación buscada entre el ***tensor de tensiones*** y el ***tensor de deformaciones*** puede describirse de dos formas:

  -- ***Teoría Incremental de la Plasticidad***

  (a veces denominada ***Teoría de las Deformaciones Incrementales*** o, simplemente, ***Plasticidad Tangente***)

  -- ***Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales***

  (a veces denominada ***Plasticidad Secante***, puesto que se apoya en la ***Teoría de la Elasticidad no-lineal***)

- Ambas teorías hacen uso extensivo de las ***descomposiciones aditivas*** habituales de los tensores ***tensión*** y ***deformación*** y que, a continuación, se recuerdan.

3.4.2 **Recuerdo:** Descomposiciones aditivas de σ y de ε

Descomposición del tensor **ε** en sus componentes **elástica** y **plástica**:

Tensorial:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$$

$\Leftrightarrow$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$$

$$\overbrace{\frac{1}{3}\varepsilon^{el.\text{vol}} + e^{el}} \qquad \overbrace{\frac{1}{3}\varepsilon^{pl.\text{vol}} + e^{pl}}$$

En metales dúctiles:

$$\varepsilon^{pl.\text{vol}} = 0$$

Descomposición del tensor **ε** en sus componentes **hidrostática** y **desviadora**:

Tensorial:

$$\varepsilon = \varepsilon^{h} + e$$

$\Leftrightarrow$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{h} + e_{ij}$$

$$\sigma = \sigma \quad + \quad s$$

$\Leftrightarrow$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \quad + \quad s_{ij}$$

3.4.2 **Recuerdo:** Descomposiciones aditivas de σ y de ε

Descomposición del tensor **ε** en sus componentes **elástica** y **plástica**:

Tensorial:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$$

$\Leftrightarrow$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$$

Descomposición del tensor **ε** en sus componentes **hidrostática** y **desviadora**:

Tensorial:

$$\varepsilon = \varepsilon^{h} + e$$

$\Leftrightarrow$

En componentes:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{h} + e_{ij}$$

Descomposición del tensor **σ** en sus componentes **hidrostática** y **desviadora**:

Tensorial:

$$\sigma = \sigma^{h} + s$$

$\Leftrightarrow$

En componentes:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{h} + s_{ij}$$

Donde las componentes volumétrica (o hidrost.) se pueden expresar en términos de 2 escalares con sentido físico :

$\varepsilon_{ij}^{h} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon^{vol}\delta_{ij}$ siendo $\varepsilon^{vol} = \varepsilon_{kk}$

En ***Elasticidad***, de la Ley de Hooke se conoce que :

$p = -K\varepsilon^{vol}$ siendo $K = \frac{E}{\ldots}$

$\ldots_{ij} \; \frac{\ldots}{2G} \; \ldots_{ij} \qquad \ldots \, 2(1+\nu)$

3.4.2 **Recuerdo:** Descomposiciones aditivas de σ y de ε

EN RESUMEN:

- Puesto que la deformación volumétrica es íntegramente elástica, se conoce la relación entre la ***tensión hidrostática*** y la ***deformación volumétrica*** :

$$p = -K\,\varepsilon^{\mathrm{vol}}$$

- Puesto que la deformación desviadora tiene una componente elástica (que es gobernada por la Ley de Hooke), se conoce también la relación entre la ***tensión desviadora*** y la ***componente elástica*** de la ***deformación desviadora*** :

$$s_{ij} = 2G\,e_{ij}^{el}$$

QUEDA POR DETERMINAR:

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Planteamiento de la Teoría Incremental.-

- Las deformaciones plásticas ***dependen*** de la ***historia de la solicitación mecánica***. La deformación plástica ***final*** no puede obtenerse únicamente a partir del estado de tensiones ***final***.
- Se requiere, en cambio, una ***formulación incremental*** de tal manera que a cada ***incremento de tensión*** le corresponda un ***incremento de deformación***.

$$d\sigma_{ij} = f(\,d\varepsilon_{kl}\,) \qquad donde, a\ su\ vez, \qquad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^{pl}$$

- El estado tenso-deformacional final se calculará como la suma de los incrementos de tensión sucesivos:

$$\sigma_{ij} = \int d\sigma_{ij} \qquad ; \qquad \varepsilon_{ij} = \int d\varepsilon_{ij}$$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Diferentes propuestas:

- **Saint Venant (1870)** propuso que "*las direcciones principales del* *tensor de tensiones* *coinciden* *con las direcciones principales del* *tensor incremento de deformación*"

$$d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\lambda$$

- **Levy (1871)** y **Von Mises (1913)** plantean que "*las direcciones principales del* *tensor de tensiones DESVIADORAS* *coinciden con las del* *tensor de incremento de deformación*"

$$d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda$$

- **Prandtl (1924)** y **Reuss (1930)** plantean que "*las direcciones principales del* *tensor de tensiones DESVIADORAS* *coinciden con las del tensor* *incremento de deformación PLÁSTICA*"

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij} d\lambda \quad \Rightarrow$$

Ecuaciones de PRANDTL-REUSS

Prandtl-Reuss son coincidentes.

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Determinación de la relación Tensión – Deformación (asumiendo Criterio de von Mises)

Comenzando con las Ecuaciones de Prandtl-Reuss:

$$\boxed{d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij}\,d\lambda}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{pl}\,d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij}s_{ij}(d\lambda)^2$$

De las definiciones de $d\bar{\varepsilon}^p$ y de q se reconoce que:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl}\,d\varepsilon_{ij}^{pl} = \frac{3}{2}(d\bar{\varepsilon}^p)^2 \quad ; \quad s_{ij}\,s_{ij} = \frac{2}{3}q^2$$

$$\frac{3}{2}(d\bar{\varepsilon}^p)^2 = \frac{2}{3}q^2(d\lambda)^2$$

Criterio de Plastificación:

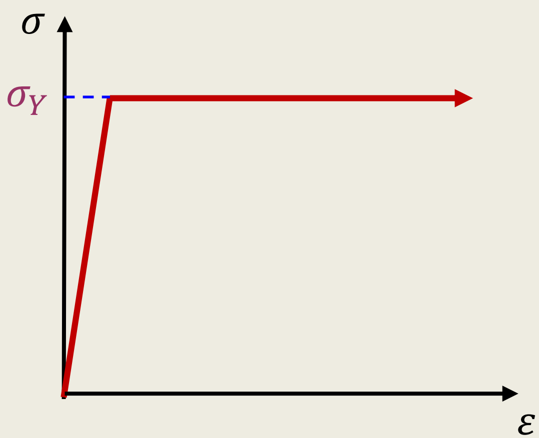
$$q = \sigma_Y$$

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{q}$$

Ecuaciones constitutivas

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (1): caso de un ***material elástico perfectamente plástico***



En este caso: $\sigma_Y = cte$ (propiedad del material)

RESUMEN

Las ecuaciones constitutivas incrementales para un material ***elástico perfectamente plástico*** son:

$$d\varepsilon^{vol} = \frac{-1}{K} dp$$

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_p}{\sigma_Y} s_{ij}$$

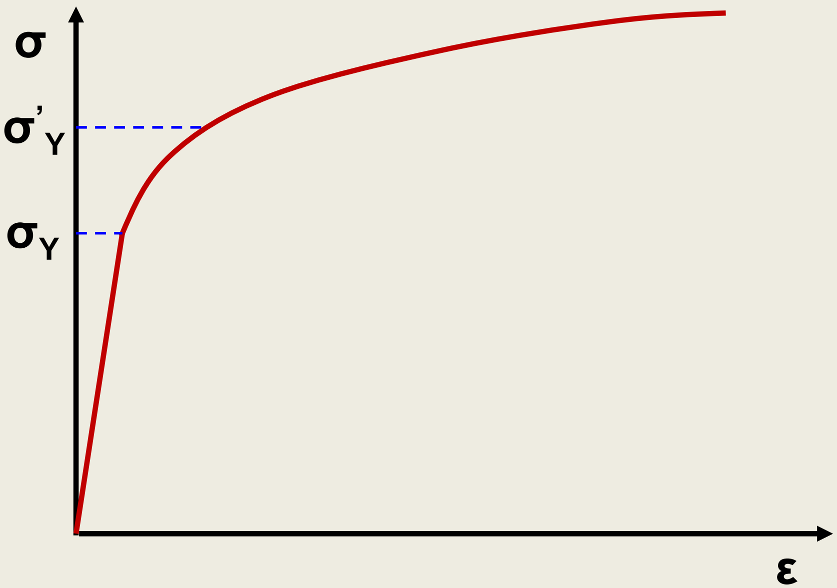
Partiendo de valores conocidos de s_{ij} y de ds_{ij}, las ecuaciones de Prandtl-Reuss **NO PROPORCIONAN BIUNÍVOCAMENTE** de_{ij}, porque $d\bar{\varepsilon}^p$ queda indeterminado

Partiendo de un de_{ij}, las ecuaciones de Prandtl-Reuss **SÍ PROPORCIONAN BIUNÍVOCAMENTE** ds_{ij} siempre y cuando este incremento corresponda a un proceso de carga y no de ...

... recurrir a Prandtl-Reuss.

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (1/5)



Este problema debe abordarse para las 2 hipótesis de endurecimiento:

Hipótesis 1.- el endurecimiento está descrito en función del **trabajo plástico**:

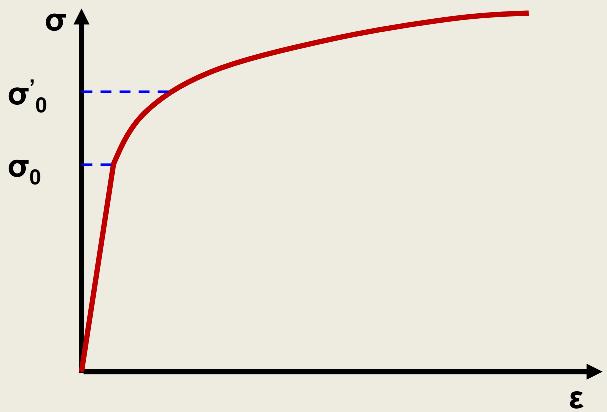
$$\sigma_{\mathrm{Y}} = q = F\left(W_p\right) = F\left(\int dW_p\right)$$

Hipótesis 2.- el endurecimiento está descrito en función de la **def. plástica equivalente**:

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = q = H\left(\bar{\varepsilon}^{\,p}\right) = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^{\,p}\right)$$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (2/5)



Hipótesis 1.-

El endurecimiento está descrito en función del trabajo plástico.

$$\sigma_Y = q = F\left(W_p\right) = F\left(\int dW_p\right) \qquad \textbf{(1)}$$

De **(1)**, se deduce que

$$dq = F'\, dW_p \qquad \textbf{(2)}$$

De la definición de dW_p : $dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij} s_{ij} d\lambda = q d\bar{\varepsilon}^{\,p}$ **(3)**

Prandtl-Reuss

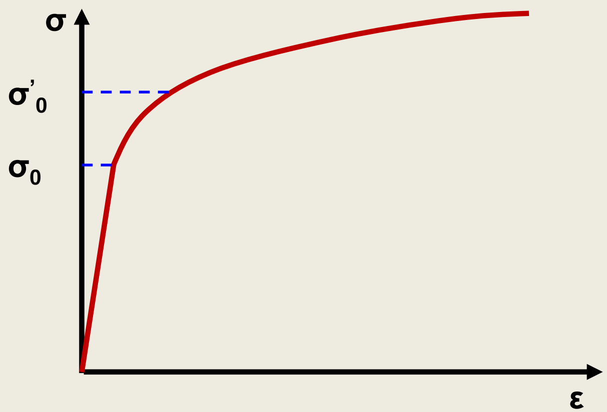
Recordando que: $d\lambda = \dfrac{3}{2}\dfrac{d\bar{\varepsilon}^{\,p}}{\sigma_Y}$; $s_{ij}s_{ij} = \dfrac{2}{3}q^2$; $q = \sigma_Y$

De **(2)** y **(3)**, resulta $d\bar{\varepsilon}^{\,p} = \dfrac{dq}{qF'} \Rightarrow d\lambda = \dfrac{3}{2}\dfrac{dq}{q^2 F'}$

Ecuaciones constitutivas

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (3/5)



Hipótesis 2.- La tensión de fluencia es función de la def. plástica equivalente

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = q = H\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right) = H\left(\int d\bar{\varepsilon}^{p}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Derivando en **(1)**: $dq = H'\, d\bar{\varepsilon}^{p}$

Recordando que $d\lambda = \dfrac{3 d\bar{\varepsilon}^{p}}{2q}$

se puede reescribir como: $d\lambda = \dfrac{3}{2}\dfrac{dq}{q\,H'}$

Introduciendo en $d\varepsilon_{ij}^{p} = s_{ij} d\lambda$ se obtiene, como antes, el incremento en deformación plástica:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\frac{dq}{qH'} s_{ij}$$

Ecuaciones constitutivas

$d\varepsilon_{ij}^{el}$ $d\varepsilon_{ij}^{pl}$ $d\varepsilon_{ij}^{pl} = s_{ij}\, d\lambda$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (4/5)

Resumen

Las ecuaciones constitutivas incrementales para un material que ***endurece por deformación plástica*** son:

$$d\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K}\,dp \qquad de_{ij} = \frac{1}{2G}\,ds_{ij} + \frac{3}{2}\frac{dq}{q^2 F'}\,s_{ij}$$

Si el endurecimiento está descrito en función del ***trabajo plástico***:

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = F\left(W_p\right)$$

$$d\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-1}{K}\,dp \qquad de_{ij} = \frac{1}{2G}\,ds_{ij} + \frac{3}{2}\frac{dq}{q\,H'}\,s_{ij}$$

Si el endurecimiento está descrito en función de la ***deformación plástica equivalente***:

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = H\left(\bar{\varepsilon}^{\,p}\right)$$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Aplicación (2): caso de un ***material que <u>endurece</u> por deformación*** (5/5)

<u>Observaciones sobre la Teoría Incremental</u> en el caso de materiales que ***<u>endurecen por deformación plástica</u>***:

1.- <u>Solicitación controlada por TENSIÓN</u>

Conocidos s_{ij} y ds_{ij} , si $dq \geq 0$ (es decir, si hay ***carga***), las ecuaciones de Prandtl-Reuss PROPORCIONAN UNÍVOCAMENTE de_{ij} y, por extensión, $d\varepsilon_{ij}$.

Si $dq < 0$ (es decir, si hay ***descarga***), $d\varepsilon_{ij}$ se obtiene simplemente de las ecuaciones de la elasticidad.

2.- <u>Solicitación controlada por DEFORMACIÓN</u>

Conocidos $d\varepsilon_{ij}$ y, por extensión de_{ij} , debe determinarse si:

la elasticidad (Ley de Hooke-Lamé)

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Ejemplo.-

El estado tensional en un punto de un elemento estructural viene dado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} MPa$$

Si la tensiones se incrementan en

$$\Delta\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} MPa$$

calcular el ***tensor incremento de deformación*** $\Delta\varepsilon$.

Supóngase que el material endurece según la relación siguiente, que se ha

donde ***E*** = 20000 MPa y un coeficiente de Poisson ν = 0,3

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Ejemplo (cont.)

Tensión equivalente Von Mises

$$q=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(20-10)^2+(10+5)^2+(20+5)^2+6\cdot 10^2\right]}=27{,}8MPa$$

Tensión equivalente Von Mises del estado tensional incrementado

$$q+\Delta q=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(25-13)^2+(13+7)^2+(25+7)^2+6\cdot 8^2\right]}=31{,}2MPa$$

$$\boxed{\Delta q=3{,}41>0}$$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Ejemplo (cont.)

Valores iniciales e incrementos en la tensión hidrostática y componentes desviadoras:

$$p = -\frac{10+20-5}{3} = -8{,}3\ MPa \longrightarrow s_{ij} = \begin{pmatrix} 11{,}7 & 10 & 0 \\ 10 & 1{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & -13{,}3 \end{pmatrix} MPa$$

$$\Delta p = -\frac{5+3-2}{3} = -2\ MPa \longrightarrow \Delta s_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij}^{h} = \Delta\sigma_{ij} + (\Delta p)\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} MPa$$

Respecto a la curva de endurecimiento del material:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{20000} + \left(\frac{\sigma}{65}\right)^{4} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \Rightarrow \bar{\varepsilon}^{p} = H^{-1}(\sigma_Y) = \left(\frac{\sigma_Y}{65}\right)^{4} \Rightarrow \sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}^{p}) = 65\left(\bar{\varepsilon}^{p}\right)^{0,25}$$

$\sigma = q$

3.4.3 Teoría Incremental de la Plasticidad

Ejemplo (cont.)

3,41

$$\begin{pmatrix} 11{,}7 & 10 & 0 \\ 10 & 1{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & -13{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{3\Delta q}{2qH'} s_{ij} + \frac{1}{2G} \Delta s_{ij}$$

$$\Delta e_{ij} = 10^{-4} \begin{pmatrix} 105{,}6 & 90{,}1 & 0 \\ 90{,}1 & 15{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -121 \end{pmatrix}$$

27,8

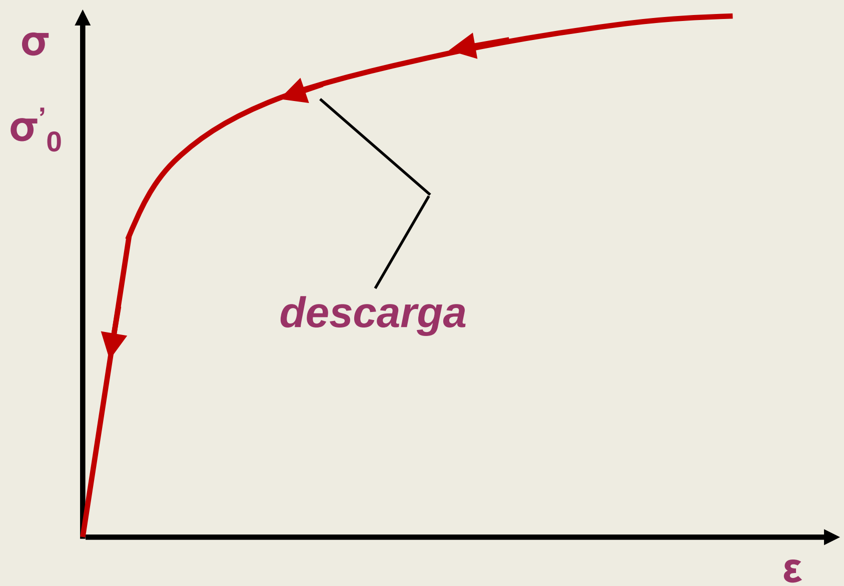
207

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{20000}{2(1+0{,}3)} = 7692\ MPa$$

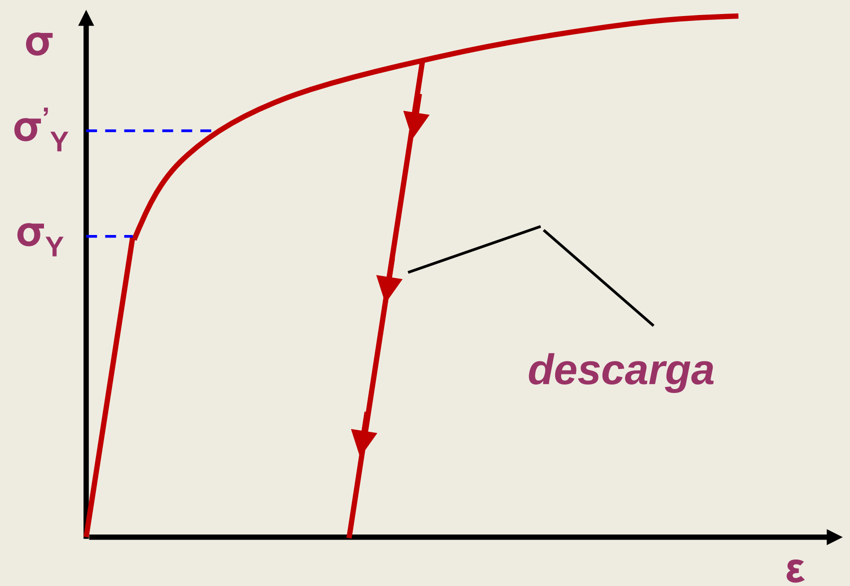
3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Planteamiento.-

Comportamiento elástico no-lineal



Comportamiento plástico



3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

El estado tensional final se relacionará pues con la deformación total

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{ij}\\ \varepsilon_{ij}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}\\ \varepsilon_{ij}+d\varepsilon_{ij}\end{matrix}\right.$$

Hipótesis.-

- **El material se considera isótropo**
- **Las variaciones de volumen son exclusivamente elásticas**
- **Se utilizará el hecho de que en elasticidad, deformaciones desviadoras elásticas son proporcionales a la tensión desviadora**

$$e_{ij}^{el} = \frac{1}{2G} s_{ij}$$

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Hipótesis de Hencky: Se considera una relación de proporcionalidad entre el tensor de deformaciones plásticas y el tensor de tensiones desviadoras

A consecuencia de esto, la deformación plástica es íntegramente de naturaleza desviadora

$$\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi\, s_{ij} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}^{pl} = e_{ij}^{pl}$$

Las componentes de la deformación desviadora pueden obtenerse entonces como

$$e_{ij} = e_{ij}^{el} + e_{ij}^{pl} = \frac{s_{ij}}{2G} + \phi\, s_{ij} = \left(\frac{1}{2G} + \phi\right) s_{ij} = \psi\, s_{ij}$$

con $\psi = \dfrac{1}{2G} + \phi$

$$\Rightarrow \quad e_{ij} = \psi\, s_{ij}$$

Como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{h} + e_{ij} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{-p}{3K}\delta_{ij} + \psi\, s_{ij}$$

$\varepsilon^{\text{vol}} = -\frac{p}{}$

ψ

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

¿ Qué representa ψ en la expresión $e_{ij} = \psi s_{ij}$?

(a) $\boxed{e_{ij} = \psi\, s_{ij}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{e_{ij}e_{ij} = \psi^2 s_{ij}s_{ij}}$ **(b)**

- Si se define una ***deformación desviadora equivalente*** como: $\bar{e} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}e_{ij}}$ **(c)**
- Recordando además que la **tensión equivalente de von Mises** es : $q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}}$ **(d)**
- Entonces, resulta evidente de **(b)**, **(c)** y **(d)** que: $\boxed{\psi = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q}}$ → ψ puede caracterizarse ***experimentalmente*** a partir de la curva de endurecimiento del material (ver **aplicación 2**, más adelante)
- Por otra parte, de **(a)** puede interpretarse a ψ como un ***módulo de cortadura secante***, que ***varía*** con la ***solicitación mecánica***:

En Teoría Total de Plasticidad: $e_{ij} = \frac{1}{2G_{sec}} s_{ij} = \psi\, s_{ij}$ con $\frac{1}{2G_{sec}} = \psi = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q}$

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

¿ Qué representa ϕ en la expresión $\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi s_{ij}$?

(a) $\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi\, s_{ij}$ $\Longrightarrow$ $\varepsilon_{ij}^{pl}\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi^2\, s_{ij} s_{ij}$ **(b)**

- Podría definirse una ***deformación plástica equivalente*** como: $\bar{\varepsilon}_T^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{pl}\varepsilon_{ij}^{pl}}$ **(c)**

- Usando como antes, la definición de q, resulta evidente de **(b)** y **(c)** que: $\phi = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{p}}{q}$

- Nótese que esta definición de ***def. plástica equivalente*** es, en general, ***diferente*** de la que se dio anteriormente, en el apartado de **Teoría Incremental**. Es decir:

$$\bar{\varepsilon}_T^{p} \neq \bar{\varepsilon}^{p} = \int d\bar{\varepsilon}^{p} \quad \text{con} \quad d\bar{\varepsilon}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^{pl}d\varepsilon_{ij}^{pl}}$$

- La solicitación mecánica es estrictamente creciente, sin descargas intermedias.

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

¿ Qué representa ϕ en la expresión $\varepsilon_{ij}^{pl} = \phi s_{ij}$?

$$\phi = \frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}_T^{\,p}}{q}$$

- Al igual que antes, ϕ puede caracterizarse ***experimentalmente*** a partir de la curva de endurecimiento.

- Como ϕ y ψ se relacionan mediante $\psi = \frac{1}{2G} + \phi$, basta caracterizar experimentalmente sólo una de estas dos variables.

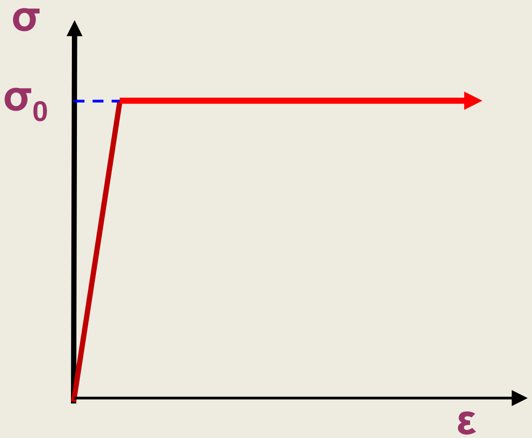
- Si se realiza un ensayo de tracción uniaxial ***controlado en deformaciones monótonamente crecientes***, es evidente que se cumplen las 2 condiciones antes mencionadas para que:

$$\bar{\varepsilon}_T^{\,p} = \bar{\varepsilon}^{\,p}$$

- En tal caso, puede usarse la inversa de la función H que da $\sigma_Y = q = H(\bar{\varepsilon}^p)$ para

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Aplicación (1): caso de un ***material elástico perfectamente plástico***



Para cualquier valor de la deformación $q = \sigma_Y$

con lo cual $\psi = \dfrac{3}{2}\dfrac{\bar{e}}{\sigma_Y}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-p}{3K}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{\sigma_Y}s_{ij}$$

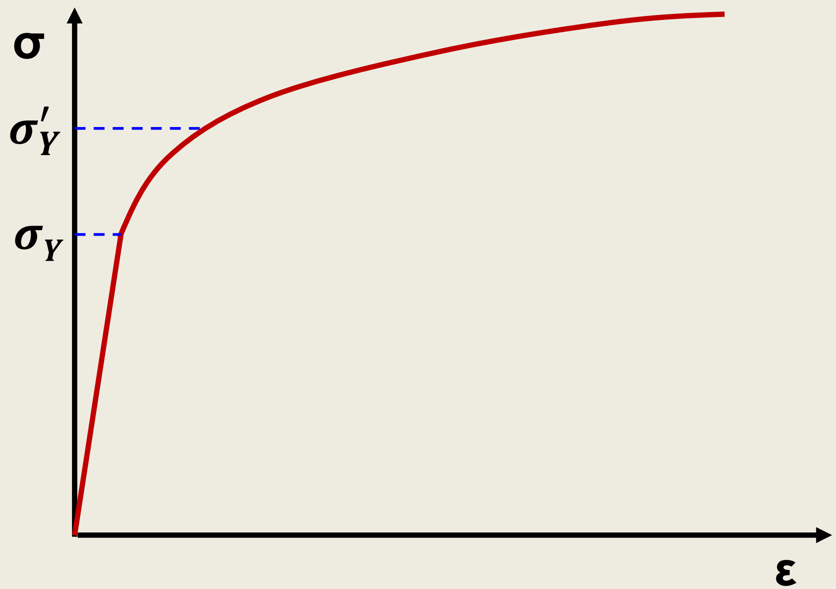
Conocida la tensión, NO queda unívocamente determinada la deformación por que se requiere conocer $\bar{e}$

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon^{\mathrm{vol}}\delta_{ij} + \frac{2}{3}\frac{\sigma_Y}{\bar{e}}e_{ij}$$

Conocida la deformación, SÍ queda unívocamente determinada la tensión que, automáticamente, verifica el criterio de Von Mises

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (1/3)



Considérese la gráfica tensión-deformación $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ obtenida en un ensayo de ***tracción uniaxial*** a lo largo del ***eje 1***.

(En tensión uniaxial $q = \sigma_1$ y $p = -\sigma_1/3$)

Sean e_1 , e_2 , e_3 las deformaciones desviadoras principales

$e_1 + e_2 + e_3 = 0$ por definición de "desviador"

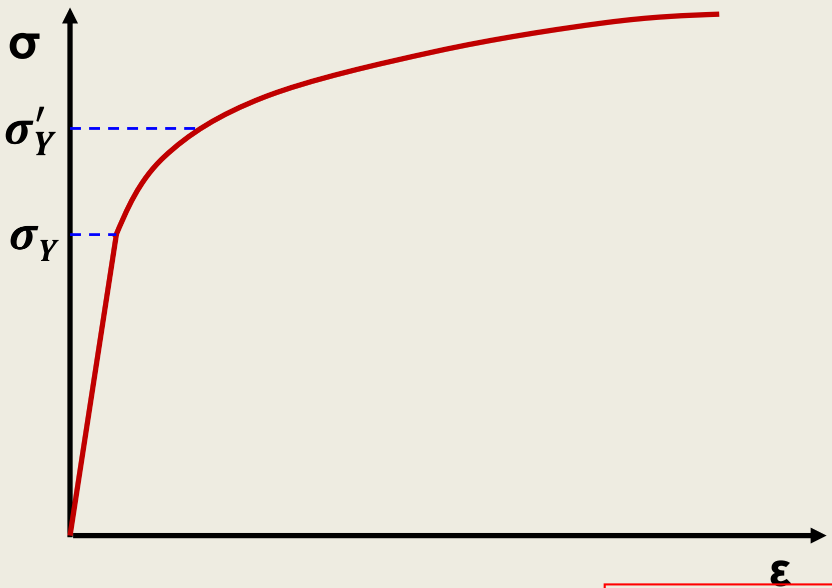
$e_2 = e_3$ por simetría

de lo que se deduce: $\boxed{e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2}}$

obteniéndose → $\bar{e} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left[(e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2\right]} = e_1$

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (2/3)



A partir de $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ puede pues encontrarse

$$q = H_T(\bar{e}) \quad \text{siendo} \quad \bar{e} = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{9K} \quad \text{y} \quad q = \sigma_1$$

Con lo anterior, el coeficiente ψ resulta

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q} = \frac{3}{2}\frac{H_T^{-1}(q)}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{H_T(\bar{e})}$$

Por lo que las ecuaciones de Hencky resultan:

en deformaciones

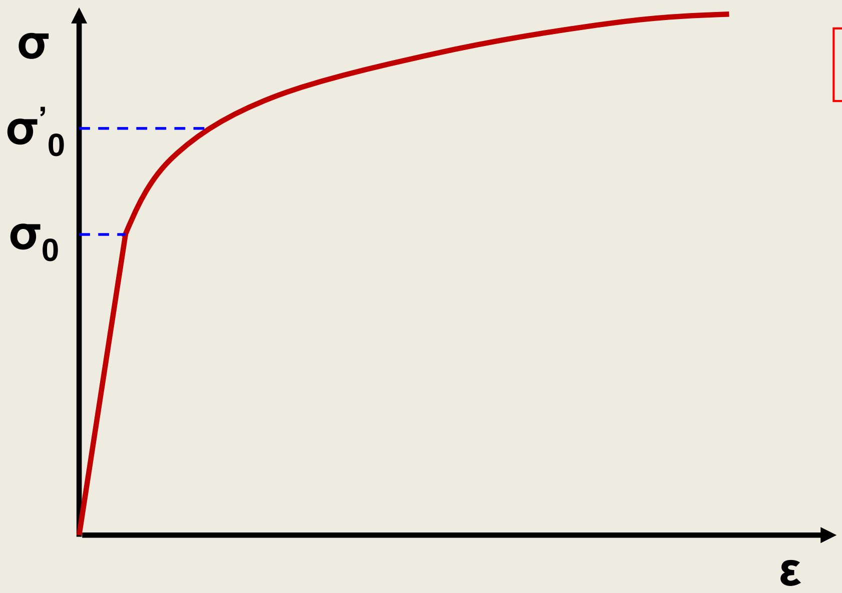
$$\varepsilon_{ij} = \frac{-p}{3K}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{H_T^{-1}(q)}{q}s_{ij}$$

Estas expresiones definen una ***relación biunívoca*** entre las componentes de los tensores de tensión y deformación

La deformación final es función del estado tensional total y no de la historia de tensiones

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Aplicación (2): caso de un ***material que endurece por deformación*** (3/3)



Validez de la teoría de deformaciones totales.-

Si el camino de tensiones es recto *(las tensiones principales no cambian de dirección)* y sus valores son proporcionales ambas teorías conducen al mismo resultado

La diferencia entre los resultados de ambas teorías será tanto mayor cuanto menos recto sea el camino de tensiones sufrido por el elemento, y el resultado de la teoría de

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Ejemplo.-

El estado tensional en un punto de un elemento estructural viene dado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} MPa$$

calcular el correspondiente ***tensor de deformaciones*** ε .

Para el material supóngase la relación constitutiva uniaxial $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{20000} + \left(\dfrac{\sigma}{65}\right)^4$

donde ***E*** = 20000 MPa y un coeficiente de Poisson ν = 0,3

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Ejemplo (cont.)

Módulo de compresibilidad

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{20000}{3(1-2\cdot 0.3)} = 16667\,MPa$$

Inversa de la función *H*$_T$

En un ensayo en tracción uniaxial, se sabe que $q=\sigma_1$ y que $\bar{e} = \varepsilon_1 - \dfrac{q}{9K}$

Por lo tanto, la expresión de Ramberg-Osgood $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{20000} + \left(\dfrac{\sigma_1}{65}\right)^4$ puede reescribirse como

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Ejemplo (cont.)

Presión hidrostática:

$$p = -\frac{10+20-5}{3} = -8{,}3\ MPa$$

Tensor de tensiones desviadoras:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 11{,}7 & 10 & 0 \\ 10 & 1{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & -13{,}3 \end{pmatrix} MPa$$

Tensión equivalente de von Mises:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}\left\{11{,}7^2 + 1{,}7^2 + 13{,}3^2 + 2\cdot 10^2\right\}} = 27{,}8MPa$$

3.4.4 Teoría de la Plasticidad en Deformaciones Totales

Ejemplo (cont.)

Deformación volumétrica:

$$\frac{1}{3}\varepsilon^{\mathrm{vol}} = \frac{-p}{3K} = \frac{+8{,}3}{3\cdot 16667} = 16{,}6\cdot 10^{-5}$$

Deformación desviadora equivalente:

$$\bar{e} = H_T^{-1}(q) = \frac{13\cdot 27{,}8}{300000} + \left(\frac{27{,}8}{65}\right)^4 = 3{,}5\cdot 10^{-2}$$

Coeficiente ψ:

$$\psi = \frac{3}{2}\frac{H_T^{-1}(q)}{q} = \frac{3}{2}\frac{\bar{e}}{q} = \frac{3\cdot 3{,}5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 27{,}8} = 187{,}6\cdot 10^{-5}\ [1/MPa]$$

Tensor de deformaciones desviadoras:

$$e_{ij} = \psi\, s_{ij} = 187{,}6\cdot 10^{-5}\begin{pmatrix} 11{,}67 & 10 & 0 \\ 10 & 1{,}67 & 0 \\ 0 & 0 & -13{,}3 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad -248.3$$

RESUMEN DE NOMENCLATURA

- $\boldsymbol{s}$ o bien $\boldsymbol{s_{ij}}$: tensión desviadora (tensor)
- $\boldsymbol{e}$ o bien $\boldsymbol{e_{ij}}$: deformación desviadora (tensor)
- $\boldsymbol{e^{el}}$ y $\boldsymbol{e^{pl}}$: componentes elástica y plástica de la def. desviadora (tensores)
- $\boldsymbol{q}$: tensión equivalente de von Mises (escalar).
- $\boldsymbol{\bar{\varepsilon}^{p}}$: deformación plástica equivalente (escalar).
- $\boldsymbol{\bar{\varepsilon}^{p}_{T}}$: definición alternativa de def. plástica equivalente (para Teoría Total).
- $\boldsymbol{\bar{e}}$: deformación desviadora equivalente (escalar).
- $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{G_{sec}}$: módulo de cortadura *elástico* y módulo de cortadura *secante*.
- $\boldsymbol{H = H(\bar{\varepsilon}^{p})}$: función de endurecimiento en términos de *deformación plástica equivalente*.