

# **MECÁNICA DE SÓLIDOS**

**Curso 2017/18**

**Titulación:**

Grado en Ingeniería Mecánica

## **Tema 3 – Plasticidad**

**Profesores:**

Jorge Zahr Viñuela  
José Antonio Rodríguez Martínez

# ***Tema 3***

## **Plasticidad**

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS**
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**
- 3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD**
- 3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD**
- 3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL**
- 3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

# Tema 3

## Plasticidad

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN
- 3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD
- 3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD
- 3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL
- 3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

# CONTENIDOS

## **3.7.1 Introducción y Objetivos**

## **3.7.2 El MEF:**

- I.* Recuerdo
- II.* Generalización mediante el P.T.V.

## **3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.**

- I.* Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II.* Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## **3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson**

- I.* Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II.* Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## **3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal**

- I.* Implementación ITERATIVA
- II.* Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

# CONTENIDOS

## **3.7.1 Introducción y Objetivos**

## **3.7.2 El MEF:**

- I.* Recuerdo
- II.* Generalización mediante el P.T.V.

## **3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.**

- I.* Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II.* Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## **3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson**

- I.* Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II.* Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## **3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal**

- I.* Implementación ITERATIVA
- II.* Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.1 Introducción y Objetivos

---

### Introducción

- En sesiones anteriores se ha estudiado el comportamiento constitutivo elasto-plástico.
- Usando, ya sea la teoría **total** o la **incremental**, se han podido resolver problemas de evolución de la deformación plástica, en situaciones geoméricamente simples, en las que el tensor de tensiones (y de deformaciones) es fácil de establecer.
- Sin embargo, en casos más generales, en los que es más difícil (eventualmente, imposible) determinar analíticamente los campos tensoriales  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , debe recurrirse a algún método de solución numérica.
- En comparación con la **implementación computacional** del **problema elástico**, el **problema elasto-plástico** es mucho **más complejo y costoso numéricamente** porque la relación entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$  es de tipo **no lineal**

### Objetivos

- Establecer los fundamentos del **Método de Elementos Finitos no lineal**, en problemas en los que el origen de la no linealidad es debido únicamente a la **no linealidad de la ecuación constitutiva** del material.
- Aplicar estos fundamentos a materiales con **comportamiento constitutivo elasto-plástico**.

## 3.7.1 Introducción y Objetivos

---

### Hipótesis de trabajo

- Material con **comportamiento elasto-plástico**, con o sin **endurecimiento** por deformación.
- Se admite **endurecimiento isótropo** (expansión *uniforme* de la superficie de fluencia).
- No se admite **endurecimiento cinemático** (desplazamiento del centro del lugar de plastificación).
- Régimen **cuasi-estático** (se desprecian las fuerzas de inercia)
- Se adopta la hipótesis de **deformaciones infinitesimales**: el **desplazamiento** y su **gradiente** son “**pequeños**” (ver Tema 2 para recordar esta hipótesis)

(En esta circunstancia, las fuerzas externas no dependen del campo de desplazamiento y pueden, por tanto, calcularse en la configuración inicial, no deformada)

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 **EL MEF:**

*I.* Recuerdo

*II.* Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

*I.* Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL

*II.* Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

*I.* Para ecuaciones no-lineales ESCALARES

*II.* Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

*I.* Implementación ITERATIVA

*II.* Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL



## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

### I. Recuerdo

En **Elasticidad** se presentó el **Método de Elementos Finitos (MEF)** como una herramienta que permite resolver el **problema elástico general**, que consta de:

#### Número de ecuaciones:

- 3 diferenciales de equilibrio interno
- 6 diferenciales para relación def. vs desplazamiento
- 6 constitutivas (Ley de Hooke-Lamé)

15 en total

#### Número de variables:

- 6 componentes de  $[\sigma]$
- 6 componentes de  $[\varepsilon]$
- 3 componentes de desplazamiento

15 en total

Mediante la discretización en *elementos finitos* del sólido deformable en estudio, el problema elástico fue reducido a un sistema de **ecuaciones algebraicas**, del tipo:

$$[K]\{\theta\} = \{f\} \quad (1)$$

donde:

$\{\theta\}$  Vector de desplazamientos nodales

$\{f\}$  Vector de fuerzas nodales externas

$[K]$  Matriz de rigidez de la Estructura

El método empleado consistió, esencialmente, en los siguientes pasos:

- **Dividir** el sólido en elementos finitos (discretización).
- Definir **funciones** de **aproximación local**.
- Hacer **mínimo** un **funcional global**, que es **suma** de **funcionales locales** de cada elemento finito.

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

I. Recuerdo

### Características del sistema a resolver:

Si  $[K]$  y  $\{f\}$  son **constantes**, es decir, si son independientes del vector de incógnitas  $\{\theta\}$ , entonces



$$[K]\{\theta\} = \{f\} \quad (1)$$

Es un sistema **lineal** de ecuaciones **algebraicas**.

### Se cumple esto en Elasticidad?

$$[K] = \sum_{e=1}^E [A^e]^T [k^e] [A^e] \quad (2)$$

$[A^e]$  Matriz de conectividad nodal

$[k^e]$  Matriz de rigidez del elemento "e-ésimo"

$$[k^e] = \int_{V^e} [B]^T [D^e] [B] dv \quad (3)$$

$[B]$  Matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma, de modo que:

$$\{\varepsilon^e\} = [B]\{\theta^e\}$$

$[D^e]$  Matriz de rigidez (Ley de Lamé-Hooke), que relaciona tensión con deformación elástica:

$$\{\sigma^e\} = [D^e]\{\varepsilon^e\}$$

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

### I. Recuerdo

#### Observaciones

En la matriz  $[D^e]$  se ha incluido el super-índice **e** para indicar que la rigidez elástica del material puede variar de un **elemento** a otro (por ejemplo, algunos elementos del sólido bajo análisis pueden estar constituidos de aluminio, mientras que otros de acero).

Las propiedades elásticas contenidas en la matriz  $[D^e]$  son, sin embargo, **independientes** de la sollicitación mecánica y, por tanto, **independientes** también del vector de desplazamientos nodales  $\{\theta^e\}$



Por lo tanto, se verifica que el MEF origina, en efecto, un sistema **lineal** de ecuaciones **algebraicas**, si la respuesta del material a la sollicitación mecánica es puramente **elástica**.

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

### I. Recuerdo

#### ¿Qué ocurre en plasticidad?

Puede demostrarse, recurriendo a la **Teoría Incremental** de la plasticidad, en conjunto con la formulación más general, basada en la existencia de un potencial de plastificación, que:

- Existe una relación general de proporcionalidad entre un **incremento** del tensor de tensiones y un **incremento** del tensor deformaciones:

$$d\sigma = D^{\text{tan}} : d\varepsilon \quad (4)$$

- El **factor de proporcionalidad** en esta relación entre incrementos varía, a su vez, en función del estado tenso-deformacional:

$$D^{\text{tan}} = D^{\text{tan}}(\sigma) \quad \text{o bien} \quad D^{\text{tan}} = D^{\text{tan}}(\varepsilon)$$

- Este **factor de proporcionalidad**  $D^{\text{tan}}$  es un tensor de 4º orden, a veces denominado tensor de **Rigidez Tangente** del material:

$$d\sigma = D^{\text{tan}} : d\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{\text{tan}} d\varepsilon_{kl} \quad (5)$$

En materiales que obedecen a **plasticidad asociada**, con **endurecimiento isotrópico**  $J_2$

$$D^{\text{tan}} = D - \frac{\left\{ \left( D : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \otimes \left( D : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \right\}}{\left( H' + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : D : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)}$$

Expresada en componentes:

$$D_{ijkl}^{\text{tan}} = D_{ijkl} - \frac{\left\{ D_{ijst} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl} \right\}}{\left( H' + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} D_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\gamma\delta}} \right)}$$

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

I. Recuerdo

### ¿Qué ocurre en plasticidad?

¿Puede obtenerse en plasticidad un sistema de ecuaciones algebraicas utilizando el mismo método que se usó antes, en elasticidad?

Esto es:

- Discretizando el sólido en elementos finitos.
- Definiendo funciones de aproximación local.
- Haciendo **mínimo** un **funcional global**, que es **suma** de **funcionales locales** de cada elemento finito.

Antes de responder a esta pregunta:

dado que  $[D^{\tan}]$  varía con la deformación, puede **intuirse** que si, en efecto, fuese posible por algún método encontrar un sistema de ecuaciones para aproximar la solución del problema elastoplástico, este será del tipo:

$$\boxed{[K^{\tan}] \{x\} = \{f\}} \longrightarrow \text{Sistema } \mathbf{no\ linear}, \text{ puesto que } K^{\tan} = K(x) \quad (6)$$

Deberá ser resuelto por **métodos numéricos**.

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos:

### I. Recuerdo

### ¿Qué ocurre en plasticidad?

**¿Puede obtenerse en plasticidad un sistema de ecuaciones algebraicas utilizando el mismo método que se usó antes, en elasticidad?**

Esto es:

- Discretizando el sólido en elementos finitos.
- Definiendo funciones de aproximación local.
- Haciendo **mínimo** un **funcional global**, que es **suma** de **funcionales locales** de cada elemento finito.

El método seguido en Elasticidad para derivar la aproximación basada en Elementos Finitos a la solución del problema elástico tiene dos desventajas:

- El funcional  $\pi$  que se construyó para ser minimizado incluía entre sus variables la **energía potencial elástica**, lo cual obligaba a **explicitar la ecuación constitutiva** ya en el proceso de **obtención** del sistema lineal de ecuaciones algebraicas que constituye la aproximación MEF
- Adicionalmente, no todos los sistemas de ecuaciones diferenciales admiten la construcción de un funcional cuya minimización conduzca a una aproximación a la solución exacta.

En Mecánica de Sólidos, el MEF puede también formularse recurriendo al **Principio de los Trabajos Virtuales**.

En este caso, **no es necesario** explicitar la ecuación constitutiva del material sino hasta el momento en que se desee resolver el sistema de ecuaciones resultantes.

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 **EL MEF:**

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.**

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del Principio de los Trabajos Virtuales

En este enfoque, no se utiliza la idea de construcción y minimización de un funcional asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales, sino que se trabaja directamente **reescribiendo** las **ecuaciones de equilibrio interno**.

Continúan en uso, evidentemente, las ideas de:

- **discretización** (o mallado) del sólido en elementos finitos.
- definición de **funciones de aproximación local**.

#### A. Discretización (o mallado):

◆  $\Omega \approx \bigcup_{e=1}^E \Omega_e$     donde  $\Omega_e$  es un elemento finito genérico.

◆  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$  si  $i \neq j$     (Los distintos elementos finitos **no se solapan**)

#### B. Funciones de aproximación local:

◆  $u^e = N^e \theta^e$     → El campo de desplazamiento **dentro** de un elemento genérico  $e$  se interpola a partir de los desplazamientos de los **nodos**.



## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Se plantean las Ecuaciones de Equilibrio Interno:  
(**notación de índices**: si un índice se repite dos veces, se entiende que hay una sumatoria sobre el índice repetido)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (7)$$

Se multiplica la expresión anterior por un vector arbitrario  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  y se integra este producto en el volumen del sólido:  
(El vector arbitrario  $\mathbf{v}$  puede considerarse como un "**desplazamiento virtual**")

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_i \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0 \quad (8)$$

Se reescribe la expresión anterior como:  
(Manipulando algebraicamente y usando el teorema de la divergencia para expresar el vector de tracciones en la superficie).

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^v \sigma_{ij} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_i t_i dS + \int_{\Omega} \mathbf{v}_i b_i dV \quad (9)$$

$\varepsilon^v$ : **deformación virtual**, asociada al **desplazamiento virtual**  $\mathbf{v}$ , a través de una relación de compatibilidad.

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Trabajo virtual realizado por las fuerzas internas en la deformación virtual  $\varepsilon^v$

Trabajo virtual realizado por las fuerzas externas (de volumen y de superficie) en el desplazamiento  $\mathbf{v}$ .

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Por conveniencia, la expresión anterior se reescribe utilizando **notación matricial**, en lugar de **notación tensorial** de índices:

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^v)^T \boldsymbol{\sigma}}_{W_{\text{int}}^v} dV = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\mathbf{v}^T \mathbf{t}}_{W_{\text{ext}}^v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (10)$$

Donde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^v \\ \varepsilon_{22}^v \\ \varepsilon_{33}^v \\ 2\varepsilon_{12}^v \\ 2\varepsilon_{13}^v \\ 2\varepsilon_{23}^v \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

#### Discretización del dominio:

$$W_{\text{int}}^v = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (11)$$

$$W_{\text{ext}}^v = \sum_{e=1}^E \left( \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \right) \quad (12)$$

**Funciones de aproximación local**, que se almacenan en las matrices de interpolación global  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta} \quad (13.a) \text{ y } (13.b)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}\boldsymbol{\theta}_v \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}_v \quad (14.a) \text{ y } (14.b)$$

(la matriz de interpolación global  $\mathbf{N}$  corresponde al ensamble de matrices de interpolación local,  $\mathbf{N}^e$ )

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Se introduce la aproximación **(14)** para  $\mathbf{v}^T$  y  $(\boldsymbol{\varepsilon}^v)^T$  en las expresiones de los trabajos virtuales  $W_{ext}^v$  y  $W_{int}^v$ , respectivamente, para obtener:

+ una forma **continua** del balance de **trabajos virtuales**:

$$(\boldsymbol{\theta}_v)^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = (\boldsymbol{\theta}_v)^T \left( \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T t dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b dV \right) \quad (15)$$

+ una forma **discreta** del balance de **trabajos virtuales**:

$$(\boldsymbol{\theta}_v)^T \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = (\boldsymbol{\theta}_v)^T \sum_{e=1}^E \left( \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T t dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T b dV \right) \quad (16)$$

Puesto que  $(\boldsymbol{\theta}_v)^T$  son desplazamientos nodales virtuales **arbitrarios**, de (15) y (16) se obtiene:

+ una forma **continua** del equilibrio de **fuerzas**:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T t dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T b dV \quad (17)$$

+ una forma **discreta** del equilibrio de **fuerzas**:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{e=1}^E \left( \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T t dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T b dV \right) \rightarrow \boxed{\text{¡¡ Es el MEF !!}} \quad (18)$$

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de **ecuaciones algebraicas** :

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma dV = \sum_{e=1}^E \left( \int_{\partial\Omega^e} N^T t dS + \int_{\Omega^e} N^T b dV \right) \quad (18)$$

#### Observación 1:

- El contorno del sólido puede descomponerse en 2 partes:  $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$
- Las “tracciones”  $\mathbf{t}$  en el contorno  $\partial\Omega_t$  son **datos** del problema
- Las “tracciones”  $\mathbf{t}$  en el contorno  $\partial\Omega_t$  son cero en “elementos interiores”.
- Las “tracciones”  $\mathbf{t}$  en el contorno  $\partial\Omega_u$  se podrán obtener una vez resuelto el sistema de ecuaciones, como “reacciones” en los nodos situados en  $\partial\Omega_u$
- El vector de fuerzas de volumen  $\mathbf{b}$  es un **dato** del problema.

Sin pérdida de generalidad, el MEF se puede reescribir como:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma dV = \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

considerando a  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  como un **vector de datos**.

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de **ecuaciones algebraicas** :

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma dV = f_{\text{ext}} \quad (19)$$

#### Observación 2:

- La formulación del MEF aquí presentada, no ha hecho mención a ninguna ecuación constitutiva en particular, de modo que la aproximación definida por el sistema **(19)** es válida, en principio, tanto para materiales **elásticos** como **elasto-plásticos**.

#### Observación 3:

- Aunque se ha completado la formulación del MEF, el sistema de ecuaciones **(19)** no puede resolverse en la práctica mientras no se explicita la ecuación constitutiva del material, esto es, la relación entre los tensores  $\sigma$  y  $\varepsilon$ .
- Se ha indicado que **(19)** es un sistema de **ecuaciones algebraicas**, pero no se ha indicado si es de tipo **lineal** o **no lineal**.
- La linealidad del sistema **(19)** depende de la **linealidad** de la **ecuación constitutiva**.

## 3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

### Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de **ecuaciones algebraicas** :

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma dV = f_{\text{ext}} \quad (19)$$

#### Observación 4:

- La matriz **B** presente en (19) contiene derivadas de las funciones de aproximación local **N**.
- Puesto que las funciones de aproximación **N** sólo dependen de la posición y no de los desplazamientos nodales ni de la tensión, también **B** depende sólo de la posición.
- Si **B** está definida en coordenadas materiales, el sistema (19) puede expresarse en términos **incrementales**, simplemente introduciendo al tiempo como parámetro de control de la sollicitación mecánica. →
- La conveniencia (eventualmente, la necesidad) de usar la **forma total** de (19) o alguna de las **formas incrementales** de (20) depende de la naturaleza de la ecuación constitutiva del material, así como del problema particular en estudio.

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \dot{\sigma} dV = \dot{f}_{\text{ext}} \quad (20.a)$$

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T d\sigma dV = df_{\text{ext}} \quad (20.b)$$

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

### 3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

#### Ejemplo 1: Aplicación a la Elasticidad Lineal

I. Ecuación constitutiva en el elemento e:

$$\sigma = D^e \varepsilon$$



$$\varepsilon = B^e \theta^e$$



$$\theta^e = A^e \theta$$

$$\Rightarrow \sigma = D^e B^e A^e \theta = D^e B \theta \quad (21)$$

II. Aproximación local a la deformación:

III. Matriz de conectividad nodal:

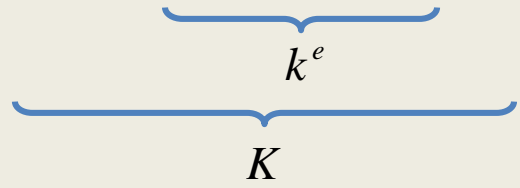
IV. Puesto que en este caso  $D^e$  es independiente del estado tensional, no es necesaria una forma incremental

Se puede sustituir (21) en (19), para obtener:

V. Puesto que  $\theta$  **no participa en la integración** (no depende de la posición), puede salir del integrando y de la sumatoria. Además, recordando que  $B = B^e A^e$  y  $B^T = A^{eT} B^{eT}$ , se tiene que:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T D^e B \theta dV = f \quad (22)$$

$$\Rightarrow \left( \sum_{e=1}^E A^{eT} \left( \int_{\Omega^e} B^{eT} D^e B^e dV \right) A^e \right) \theta = f \quad (23)$$



Se ha recuperado el sistema lineal de ecuaciones algebraicas de la elasticidad, expresado en (1), (2) y (3)...como era de esperar!!!  
 El principio de los trabajos virtuales **recupera** la aproximación MEF obtenida en elasticidad mediante **minimización** de un funcional asociado a la **Energía Potencial**.



# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

### 3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

#### Ejemplo 2: Aplicación a Elasto-Plasticidad

- I. Ecuación constitutiva en el elemento  $e$ , aproximación local a la deformación y matriz de conectividad nodal. De acuerdo con (4) y (5), se tiene que:

$$\begin{array}{l}
 d\sigma = D^{e\text{tan}} d\varepsilon \\
 \quad \downarrow \\
 d\varepsilon = B^e d\theta^e \\
 \quad \downarrow \\
 d\theta^e = A^e d\theta
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} d\sigma = D^{e\text{tan}} d\varepsilon \\ d\varepsilon = B^e d\theta^e \\ d\theta^e = A^e d\theta \end{array}} \right\} \Rightarrow d\sigma = D^{e\text{tan}} B^e A^e d\theta = D^{e\text{tan}} B d\theta \quad (24)$$

Dividiendo por  $dt$ , (24) se puede reescribir como:

$$\Rightarrow \dot{\sigma} = D^{e\text{tan}} B^e A^e \dot{\theta} = D^{e\text{tan}} B \dot{\theta} \quad (25)$$

- II. Puesto que en este caso  $D^{e\text{tan}}$  es dependiente del estado tensional, es **necesaria** una **forma incremental**.

Se puede sustituir (25) o (24) en (20.a) o en (20.b), respectivamente, para obtener:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T D^{e\text{tan}} B d\theta dV = df \quad (26.a)$$

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T D^{e\text{tan}} B \dot{\theta} dV = \dot{f} \quad (26.b)$$

### 3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

#### Ejemplo 2: Aplicación a Elasto-Plasticidad

- III. Puesto que  $\theta$  **no participa en la integración** (no depende de la posición), puede salir del integrando y de la sumatoria. Además, recordando que  $B = B^e A^e$  y  $B^T = A^{eT} B^{eT}$ , las expresiones (26) se transforman en:

$$\left( \sum_{e=1}^E A^{eT} \left( \int_{\Omega^e} B^{eT} D^{e \tan} B^e dV \right) A^e \right) d\theta = df \quad (27.a)$$

$$\left( \sum_{e=1}^E A^{eT} \left( \int_{\Omega^e} B^{eT} D^{e \tan} B^e dV \right) A^e \right) \dot{\theta} = \dot{f} \quad (27.b)$$

que equivale a

$$K^{\tan} d\theta = df \quad (28.a)$$

$$K^{\tan} \dot{\theta} = \dot{f} \quad (28.b)$$

Como  $D^{e \tan}$  es función del estado tenso-deformacional, es evidente que  $K^{\tan}$  es, a su vez, función del vector de desplazamientos nodales:

$$D^{e \tan} = D^{e \tan}(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad K^{\tan} = K^{\tan}(q) \quad \Rightarrow$$

∴ El sistema (28) es **no lineal !!!!**

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

### OBSERVACIONES

- Se ha visto que la formulación del **MEF** basada en el **PTV** conduce a un sistema de **ecuaciones algebraicas**.
- Este sistema de ecuaciones es **no lineal**, si el comportamiento constitutivo del material es **no lineal**.
- Un ejemplo claro es el de la ecuación **(28)**, que corresponde al **MEF** utilizado en conjunto con la **Teoría Incremental de la Plasticidad** para materiales elasto-plásticos.

### ¿ Cómo se resuelve una ecuación no lineal ?

Se recordará a continuación el método iterativo de Newton-Raphson para:

- Ecuaciones no lineales escalares (1 ecuación, 1 incógnita)
- Ecuaciones no lineales vectoriales ( $N$  ecuaciones,  $N$  incógnitas)

## 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

### (a) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar

(1/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$R(x) = 0 \quad (29)$$

Para resolver la ecuación (29) mediante aproximación numérica, consideremos una **expansión de Taylor** de la función  $R(x)$ , truncada después de su **segundo** término:

$$R(x + \Delta x) \approx R(x) + \frac{dR}{dx} \Delta x \quad (30)$$

Esto permite definir un esquema iterativo del siguiente modo:

- sea  $\mathbf{x}^*$  la solución buscada de la ec. (29)
- sea  $\mathbf{x}^{(i)}$  una aproximación  $i$ -ésima a la solución  $\mathbf{x}^*$
- sea  $\mathbf{c}^{(i+1)} = \Delta \mathbf{x}^{(i+1)}$  una corrección “pequeña”, definida como  $\mathbf{c}^{(i+1)} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(i)}$

donde:

- $R$  es una función escalar y no lineal, de variable independiente  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}$  es la incógnita en la ecuación  $R = 0$
- No es posible despejar  $\mathbf{x}$  por la no linealidad de  $R$ .

Con estas definiciones, (30) se reescribe como:

$$R(x^{(i)} + c^{(i+1)}) = 0 \approx R(x^{(i)}) + \left. \frac{dR}{dx} \right|_{x^{(i)}} c^{(i+1)} \quad (31)$$

## 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

### (a) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar

(2/3)

Si en (31) se denota  $\left. \frac{dR}{dx} \right|_{x^{(i)}} = J_R^{(i)}$ , la expresión (31) se reescribe como:

$$R(x^{(i)} + c^{(i+1)}) = 0 \approx R(x^{(i)}) + J_R^{(i)} c^{(i+1)} \quad (32)$$



$$J_R^{(i)} c^{(i+1)} \approx -R(x^{(i)}) \quad (33)$$

Si el estado en la iteración  $i$ -ésima es conocido:

$\Rightarrow J_R^{(i)}$  y  $x^{(i)}$  son conocidos

$\Rightarrow$  se determina la corrección  $c^{(i+1)}$  como:

$$c^{(i+1)} \approx \frac{-R(x^{(i)})}{J_R^{(i)}} \quad (34)$$

#### Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial  $x^{(0)}$   
(es decir  $i = 0$ )
2. Para  $x^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)}$  y  $R^{(0)} = R(x^{(0)})$

3. Iterar sobre  $i$  como:  $c^{(i+1)} = \frac{-R^{(i)}}{J_R^{(i)}}$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + c^{(i+1)}$$

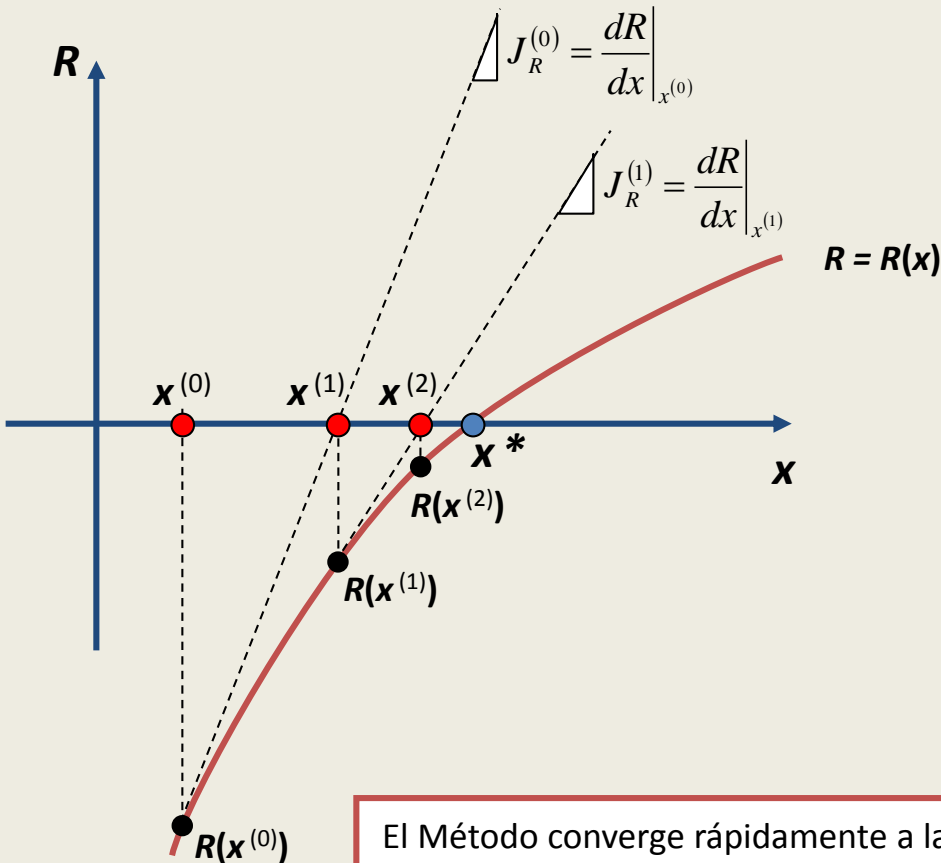
$$J_R^{(i+1)} = \left. \frac{dR}{dx} \right|_{x^{(i+1)}}$$

$$R^{(i+1)} = R(x^{(i+1)})$$

## 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(a) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar

(3/3)



El Método converge rápidamente a la solución si el valor inicial propuesto para  $x^{(0)}$  es **cercano** a la solución verdadera, que es  $x^*$

### Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial  $x^{(0)}$   
(es decir  $i = 0$ )
2. Para  $x^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)}$  y  $R^{(0)} = R(x^{(0)})$
3. Iterar sobre  $i$  como:  $c^{(i+1)} = \frac{-R^{(i)}}{J_R^{(i)}}$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + c^{(i+1)}$$

$$J_R^{(i+1)} = \left. \frac{dR}{dx} \right|_{x^{(i+1)}}$$

$$R^{(i+1)} = R(x^{(i+1)})$$



### 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

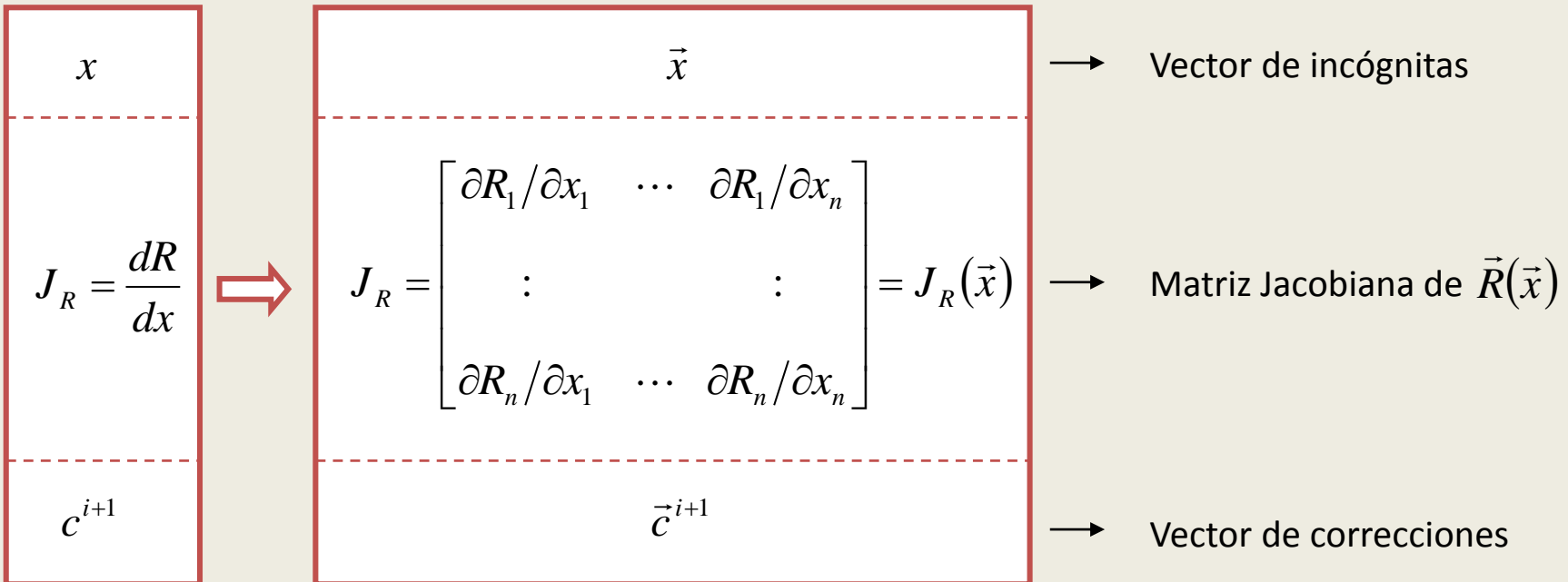
#### (b) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial

(1/3)

Consideremos ahora la ecuación no lineal siguiente:

$$\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (32) \quad \text{Siendo } \vec{x} \text{ y } \vec{R} \text{ vectores de } n \text{ componentes.}$$

En el caso vectorial, el método de N-R es similar al caso escalar, aunque se realizan los siguientes cambios:



### 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

#### (b) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial

(2/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (32) \quad \text{Siendo } \vec{x} \text{ y } \vec{R} \text{ vectores de } n \text{ componentes.}$$

En el caso vectorial, el método de N-R es similar al caso escalar, aunque se realizan los siguientes cambios:

$x$	$\vec{x}$
$J_R = \frac{dR}{dx}$	$J_R = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial R_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial R_n / \partial x_1 & \cdots & \partial R_n / \partial x_n \end{bmatrix} = J_R(\vec{x})$
$c^{i+1}$	$\vec{c}^{i+1}$

#### Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial  $\vec{x}^{(0)}$  (es decir  $i = 0$ )
2. Para  $\vec{x}^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)}$  y  $\vec{R}^{(0)} = \vec{R}(\vec{x}^{(0)})$
3. Iterar sobre  $i$  como:  $\vec{c}^{(i+1)} \approx -[J_R^{(i)}]^{-1} \cdot \vec{R}^{(i)}$

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{c}^{i+1}$$

En realidad, esto es un sistema lineal !!!

$$J_R^{i+1} = J_R(\vec{x}^{i+1})$$

$$[J_R^{(i)}] \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$$

$$\vec{R}^{i+1} = \vec{R}(\vec{x}^{i+1})$$

## 3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

### (b) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial

(3/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (32) \quad \text{Siendo } \vec{x} \text{ y } \vec{R} \text{ vectores de } n \text{ componentes.}$$

En el caso vectorial, el método de Newton-Raphson consiste en:

sustituir

UN sistema no-lineal de  $n$  ecs. x  $n$  incógnitas  
tal como la ecuación (32)

por

VARIAS resoluciones de un sistema lineal de  $n \times n$   
tal como el de la ecuación (33)

$$J_R^{(i)} \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)} \quad (33)$$

El Método converge rápidamente a la solución si el valor inicial propuesto para  $\vec{x}^0$  es **cercano** a la solución verdadera, que es  $\vec{x}^*$

#### Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial  $\vec{x}^{(0)}$  (es decir  $i = 0$ )
2. Para  $\vec{x}^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)}$  y  $\vec{R}^{(0)} = \vec{R}(\vec{x}^{(0)})$
3. Iterar sobre  $i$  como:  $\vec{c}^{(i+1)} \approx -[J_R^{(i)}]^{-1} \cdot \vec{R}^{(i)}$

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{c}^{i+1}$$

En realidad,  
esto es un  
**sistema lineal !!!**

$$J_R^{i+1} = J_R(\vec{x}^{i+1})$$

$$[J_R^{(i)}] \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$$

$$\vec{R}^{i+1} = \vec{R}(\vec{x}^{i+1})$$

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

Se ha estudiado cómo resolver una ecuación **no lineal genérica**, ya sea de tipo **escalar** o **vectorial**, mediante iteraciones de Newton.

Sin embargo,

**¿ Cómo se aplica el método de Newton en el caso particular del MEF ?**

Se presentará a continuación dos implementaciones posibles:

- Solución *iterativa* del MEF
- Solución *iterativa* e *incremental* del MEF

En ambas implementaciones, la ecuación no lineal a resolver es la ec.(28), particularmente en su forma de incrementos (28.a)

Un desarrollo análogo es directamente aplicable a la versión (28.b)

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (a) Solución iterativa del MEF no lineal

(1/5)

En el MEF no lineal, ¿Cuál es nuestra  $\vec{R}$ ? ¿Cuál es el vector de incógnitas  $\vec{x}$ ?

En primer lugar, se reescribe (28.a) como:

$$K^{\tan} d\theta = df \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} K^{\tan} d\theta = \int_{f_{\text{ext}.0}}^{f_{\text{ext}}} df = \Delta f = f_{\text{ext}} - f_{\text{ext}.0} \quad (34)$$

Admitiendo que  $\theta_0 = \mathbf{0}$  y que  $f_{\text{ext}.0} = \mathbf{0}$ , se tiene:

$$\int_0^{\theta} K^{\tan} d\theta = f_{\text{ext}} \Rightarrow \int_0^{\theta} K^{\tan} d\theta - f_{\text{ext}} = 0$$

La función  $\vec{R}$  se define entonces como:

$$R = R(\theta) = \int_0^{\theta} K^{\tan} d\theta - f_{\text{ext}}$$

La ecuación no lineal vectorial a resolver mediante *Newton-Raphson* es:

$$R(\theta) = 0 \quad (35)$$

Fuerzas **externas**  
Fuerzas **internas**

Donde

- $R$  : se denomina **vector de residuos** (fuerzas residuales)
- $\theta$  : vector de **incógnitas** (desplazamientos nodales)
- $f$  : vector de **datos** (fuerzas nodales externas)

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (a) Solución iterativa del MEF no lineal

(2/5)

#### Implementación del Método Iterativo

Ecuación a resolver :

$$R(\theta) = 0 \quad (35)$$

1. Asignar un valor inicial  $\theta^{(0)}$  (es decir  $i = 0$ )

2. Para  $\theta^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)}$  y  $R^{(0)} = R(\theta^{(0)})$

3. Iterar sobre  $i$  como: ●  $c^{(i+1)} = -[J_R^{(i)}]^{-1} R^{(i)}$

●  $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + c^{(i+1)}$

●  $J_R^{(i+1)} = J_R(\theta^{(i+1)})$

●  $R^{(i+1)} = R(\theta^{(i+1)})$

#### Observación (1)

¿Qué es  $J_R$ ? ¿Cómo se obtiene?

#### Observación (2)

¿Cómo se calcula el vector de residuos actualizado?



# 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

## (a) Solución iterativa del MEF no lineal

(3/5)

### Implementación del Método Iterativo

#### Observación (1)

¿Qué es  $J_R$ ? ¿Cómo se obtiene?

Recordando que  $R = R(\theta) = \int_0^\theta K^{\tan} d\theta - f$   
 y reconociendo que:

- $f$  es un dato (independiente de  $\theta$ ).
- La derivada de un integral recupera el integrando.

se tiene que:

$$J_R = \frac{\partial R}{\partial \theta} = J_R = K^{\tan} = K^{\tan}(\theta) \quad (36)$$

#### Observación (2)

¿Cómo se calcula el vector de residuos actualizado?

Recordando de (19) que las fuerzas internas se obtienen de  $f_{\text{int}} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma dV$

∴ ¡¡ Es necesario determinar la tensión **actual** !!

$$R^{(i+1)} = f_{\text{int}}^{(i+1)} - f_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} B^T \sigma^{(i+1)} dV - f_{\text{ext}}$$

De (4), es evidente que:

$$\varepsilon^{(i+1)} = B\theta^{(i+1)}$$

$$(37) \quad \sigma^{(i+1)} = \sigma^{(0)} + \int_{\varepsilon^{(0)}}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon$$

Integración de la ecuación constitutiva.

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (a) Solución iterativa del MEF no lineal

(4/5)

#### Implementación del Método Iterativo

#### Observación (2) (continuación)

¿Cómo se calcula el vector de residuos actualizado?

Se ha visto que para actualizar el vector de residuos  $R$  en la iteración  $i + 1$ , es necesario:

**Integrar la ecuación constitutiva** para hallar el **valor actualizado del tensor de tensiones**.

Ahora bien, la expresión (37) se puede interpretar como

$$\sigma^{(i+1)} - \sigma_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon = \Delta\sigma_0^{(i+1)} \quad (37.b)$$

∴ La **integración de la ecuación constitutiva**, debe proporcionar el **incremento de tensión**  $\Delta\sigma_0^{(i+1)}$  que está asociado al incremento de deformación  $\Delta\varepsilon_0^{(i+1)}$ , con :

$$\Delta\varepsilon_0^{(i+1)} = \varepsilon^{(i+1)} - \varepsilon_0 = \varepsilon^{(i+1)} - 0$$

$$\Delta\sigma_0^{(i+1)} = \sigma^{(i+1)} - \sigma_0 = \sigma^{(i+1)} - 0$$

#### Integración de la ecuación constitutiva:

- La integración de la ec. constitutiva requiere, usualmente, un procedimiento matemático relativamente complicado
- Se han propuesto diversos métodos en la literatura (por ej.: **Retorno Radial**)
- Esta integración se realiza en los **Puntos de Gauss**.
- Esta integración puede ser “problemática” si  $\Delta\varepsilon_0^{(i+1)}$  es “grande”, como suele ser el caso en el **Método Iterativo** (no-incremental)
- Nótese que en (37.b), en  $D^{\tan}$  participa, entre otros términos, la función de **endurecimiento** del material – véase la ec.(5.b)

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (a) Solución iterativa del MEF no lineal

(5/5)

#### Resumen del Método Iterativo: ecuación y algoritmo

Ecuación a resolver :

$$R(\theta) = 0 \quad (35)$$

1. Asignar un valor **inicial**  $\theta^{(0)}$  (es decir  $i = 0$ ). Usualmente :  $\theta^{(0)} = 0$   $\varepsilon^{(0)} = 0$   $\sigma^{(0)} = 0$
2. Para  $\theta^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)} = K^{\tan}(\theta^{(0)}) = K^{elást}$  y  $R^{(0)} = R(\theta^{(0)}) = 0 - f_{\text{ext}} = -f_{\text{ext}}$
3. Iterar sobre  $i$  como:
  - $c^{(i+1)} = -[J_R^{(i)}]^{-1} R^{(i)}$  es decir, resolviendo el sistema **lineal**  $[J_R^{(i)}] \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$
  - $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + c^{(i+1)}$     •  $\varepsilon^{(i+1)} = B\theta^{(i+1)}$     •  $\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(0)} + \int_{\varepsilon^0}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon$
  - $J_R^{(i+1)} = K^{\tan}(\theta^{(i+1)})$
  - $R^{(i+1)} = R(\sigma^{(i+1)})$

#### **Condición de parada:**

Asignar  $\theta = \theta^{(i+1)}$  cuando  $\|R^{(i+1)}\| = \|R(\sigma^{(i+1)})\| \leq tol$

# CONTENIDOS

## 7.1 Introducción y Objetivos

## 7.2 El MEF:

- I. Recuerdo
- II. Generalización mediante el P.T.V.

## 7.3 Aplicaciones del MEF basado en el P.T.V.

- I. Aplicación a ELASTICIDAD LINEAL
- II. Aplicación a ELASTO-PLASTICIDAD

## 7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

- I. Para ecuaciones no-lineales ESCALARES
- II. Para ecuaciones no-lineales VECTORIALES

## 7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

- I. Implementación ITERATIVA
- II. Implementación ITERATIVA e INCREMENTAL

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (b) Solución iterativa e incremental del MEF no lineal

(1/2)

Sea  $\theta^*$  la solución de la ecuación no lineal vectorial

$$R(\theta) = 0$$

Normalmente, la condición de **cercanía** entre  $\theta^{(0)}$  y  $\theta^*$   
**no se cumple !!!**

Se divide  $f_{ext}$  en varios **incrementos** de carga:

$$f_{ext}^{n+1} = f_{ext}^n + (\Delta f_{ext})_{n+1} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{siendo la fuerza total } f_{ext} = \sum_{m=1}^M (\Delta f_{ext})_m$$

Asumiendo como **conocido** el estado ***n*-ésimo**, se aplica el método de Newton-Raphson a la ec. (34) modificada del siguiente modo:

$$\int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} K^{\tan} d\theta = \int_{f_n}^{f_{n+1}} df = (\Delta f_{ext})_{n+1} \quad (37)$$

Donde:

- $\theta_{n+1}$  : vector de **incógnitas** (desplazamientos nodales)
- $(\Delta f_{ext})_{n+1}$  : vector de **datos** (fuerzas nodales externas)

## 3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

### (b) Solución iterativa e incremental del MEF no lineal

(2/2)

#### Resumen del Método iterativo e incremental: ecuación y algoritmo

Ecuación a resolver :

$$R(\theta_{n+1}) = 0$$

1. Asignar un valor **inicial**  $\theta^{(0)}$  (es decir  $i = 0$ ). Usualmente :  $\theta^{(0)} = \theta_n$      $\varepsilon^{(0)} = \varepsilon_n$      $\sigma^{(0)} = \sigma_n$

2. Para  $\theta^{(0)}$ , calcular  $J_R^{(0)} = K^{\tan}(\theta_n)$     y     $R^{(0)} = R(\theta^{(0)}) = 0 - f_{ext}^{n+1} = -f_{ext}^{n+1}$

3. Iterar sobre  $i$  como: ●  $c^{(i+1)} = -[J_R^{(i)}]^{-1} R^{(i)}$  es decir, resolviendo el sistema **lineal**  $[J_R^{(i)}] \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$

$$\bullet \theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + c^{(i+1)} \quad \bullet \varepsilon^{(i+1)} = B\theta^{(i+1)} \quad \bullet \sigma^{(i+1)} = \sigma^{(0)} + \int_{\varepsilon^{(0)}}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon$$

$$\bullet J_R^{(i+1)} = K^{\tan}(\theta^{(i+1)})$$

$$\bullet R^{(i+1)} = R(\sigma^{(i+1)})$$

**Condición de parada:**

Asignar  $\theta_{n+1} = \theta^{(i+1)}$  cuando  $\|R^{(i+1)}\| = \|R(\sigma^{(i+1)})\| \leq tol$