MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

Titulación:

Grado en Ingeniería Mecánica

Tema 3 – Plasticidad

José Antonio Rodríguez Martínez

Tema 3

Plasticidad

Tema 3

Plasticidad

CONTENIDOS

CONTENIDOS

3.7.1 Introducción y Objetivos

Introducción

- En sesiones anteriores se ha estudiado el comportamiento constitutivo elasto-plástico.
- Usando, ya sea la teoría **total** o la **incremental**, se han podido resolver problemas de evolución de la deformación plástica, en situaciones geométricamente simples, en las que el tensor de tensiones (y de deformaciones) es fácil de establecer.
- Sin embargo, en casos más generales, en los que es más difícil (eventualmente, imposible) determinar analíticamente los campos tensoriales **σ** y **ε**, debe recurrirse a algún método de solución numérica.
- En comparación con la **implementación computacional** del **problema elástico**, el **problema elasto-plástico** es mucho **más complejo** y **costoso numéricamente** porque la relación entre **σ** y **ε** es de tipo **no lineal**

Objetivos

Aplicar estos fundamentos a materiales con **comportamiento constitutivo elasto-plástico**.

3.7.1 Introducción y Objetivos

Hipótesis de trabajo

- Material con **comportamiento elasto-plástico**, con o sin **endurecimiento** por deformación.
- Se admite **endurecimiento isótropo** (expansión *uniforme* de la superficie de fluencia).
- No se admite **endurecimiento cinemático** (desplazamiento del centro del lugar de plastificación).
- Régimen **cuasi-estático** (se desprecian las fuerzas de inercia)
- Se adopta la hipótesis de **deformaciones infinitesimales**: el **desplazamiento** y su **gradiente** son **"pequeños"** (ver Tema 2 para recordar esta hipótesis)

  (En esta circunstancia, las fuerzas externas no dependen del campo de desplazamiento y pueden, por tanto, calcularse en la configuración inicial, no deformada)

CONTENIDOS

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

En **Elasticidad** se presentó el **Método de Elementos Finitos (MEF)** como una herramienta que permite resolver el **problema elástico general**, que consta de:

Número de ecuaciones:

3 diferenciales de equilibrio interno
6 diferenciales para relación def. vs desplazamiento
6 constitutivas (Ley de Hooke-Lamé)

15 en total

Número de variables:

6 componentes de [σ]
6 componentes de [ε]
3 componentes de desplazamiento

Mediante la discretización en *elementos finitos* del sólido deformable en estudio, el problema elástico fue reducido a un sistema de ***ecuaciones algebraicas***, del tipo:

$$[K]\{\theta\}=\{f\} \qquad (1)$$

donde:

$\{\theta\}$ Vector de desplazamientos nodales

$\{f\}$ Vector de fuerzas nodales externas

$[K]$ Matriz de rigidez de la Estructura

El método empleado consistió, esencialmente, en

Hacer ***mínimo*** un ***funcional global***, que es ***suma*** de ***funcionales locales*** de cada elemento finito.

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

Características del sistema a resolver:

Si **[K]** y **{f}** son ***constantes***, es decir, si son independientes del vector de incógnitas **{θ}**, entonces

$$[K]\{\theta\}=\{f\} \qquad \textbf{(1)}$$

Es un sistema **lineal** de ecuaciones **algebraicas**.

Se cumple esto en Elasticidad?

$$[K]=\sum_{e=1}^{E}\left[A^e\right]^T\left[k^e\right]\left[A^e\right] \qquad \textbf{(2)}$$

$\left[A^e\right]$ Matriz de conectividad nodal

$\left[k^e\right]$ Matriz de rigidez del elemento "*e*-ésimo"

$$\left[k^e\right]=\int[B]^T\left[D^e\right][B]dv$$

$[B]$ Matriz que contiene las derivadas de las

relaciona tensión con deformación elástica: $\{\sigma^e\}=[D^e]\{\varepsilon^e\}$

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

Observaciones

En la matriz $[D^e]$ se ha incluido el super-índice ***e*** para indicar que la rigidez elástica del material puede variar de un ***elemento*** a otro (por ejemplo, algunos elementos del sólido bajo análisis pueden estar constituidos de aluminio, mientras que otros de acero).

Las propiedades elásticas contenidas en la matriz $[D^e]$ son, sin embargo, ***independientes*** de la solicitación mecánica y, por tanto, ***independientes*** también del vector de desplazamientos nodales $\{\theta^e\}$

Por lo tanto, se verifica que el MEF origina, en efecto, un sistema ***lineal*** de ecuaciones

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

¿Qué ocurre en plasticidad?

Puede demostrarse, recurriendo a la **Teoría Incremental** de la plasticidad, en conjunto con la formulación más general, basada en la existencia de un potencial de plastificación, que:

- Existe una relación general de proporcionalidad entre un ***incremento*** del tensor de tensiones y un ***incremento*** del tensor deformaciones:

$$d\sigma = D^{\tan} : d\varepsilon \qquad (4)$$

- El ***factor de proporcionalidad*** en esta relación entre incrementos varía, a su vez, en función del estado tenso-deformacional:

$$D^{\tan} = D^{\tan}(\sigma) \quad \text{o bien} \quad D^{\tan} = D^{\tan}(\varepsilon)$$

- Este ***factor de proporcionalidad*** $D^{\tan}$ es un tensor de 4º orden, a veces denominado tensor de ***Rigidez Tangente*** del material:

$$d\sigma = D^{\tan} : d\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma_{ij} = D^{\tan}_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl} \qquad (5)$$

En materiales que obedecen a ***plasticidad asociada***,

$$\ldots H' + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : D : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \ldots \qquad \ldots H' + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} D_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\gamma\delta}} \ldots$$

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

¿Qué ocurre en plasticidad?

¿Puede obtenerse en plasticidad un sistema de ecuaciones algebraicas utilizando el mismo método que se usó antes, en elasticidad?

Esto es:
- Discretizando el sólido en elementos finitos.
- Definiendo funciones de aproximación local.
- Haciendo ***mínimo*** un ***funcional global***, que es ***suma*** de ***funcionales locales*** de cada elemento finito.

Antes de responder a esta pregunta:

dado que [D^{tan}] varía con la deformación, puede ***intuirse*** que si, en efecto, fuese posible por algún método encontrar un sistema de ecuaciones para aproximar la solución del problema elastoplástico, este será del tipo:

$$\left[K^{\tan}\right]\{x\}=\{f\}$$ → Sistema ***no lineal***, puesto que $\boldsymbol{K^{tan}} = \boldsymbol{K(x)}$ **(6)**

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: I. Recuerdo

¿Qué ocurre en plasticidad?

¿Puede obtenerse en plasticidad un sistema de ecuaciones algebraicas utilizando el mismo método que se usó antes, en elasticidad?

Esto es:
- Discretizando el sólido en elementos finitos.
- Definiendo funciones de aproximación local.
- Haciendo ***mínimo*** un ***funcional global***, que es ***suma*** de ***funcionales locales*** de cada elemento finito.

El método seguido en Elasticidad para derivar la aproximación basada en Elementos Finitos a la solución del problema elástico tiene dos desventajas:

- El funcional π que se construyó para ser minimizado incluía entre sus variables la ***energía potencial elástica***, lo cual obligaba a **explicitar la ecuación constitutiva** ya en el proceso de ***obtención*** del sistema lineal de ecuaciones algebraicas que constituye la aproximación MEF
- Adicionalmente, no todos los sistemas de ecuaciones diferenciales admiten la construcción de un funcional cuya minimización conduzca a una aproximación a la solución exacta.

momento en que se desee resolver el sistema de ecuaciones resultantes.

CONTENIDOS

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del Principio de los Trabajos Virtuales

En este enfoque, no se utiliza la idea de construcción y minimización de un funcional asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales, sino que se trabaja directamente **reescribiendo** las **ecuaciones** de **equilibrio interno**.

Continúan en uso, evidentemente, las ideas de:

- **discretización** (o mallado) del sólido en elementos finitos.
- definición de **funciones de aproximación local**.

A. Discretización (o mallado):

- $\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{E} \Omega_e$ donde $\boldsymbol{\Omega_e}$ es un elemento finito genérico.
- $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad \text{si} \quad i \neq j$ (Los distintos elementos finitos **no** se **solapan**)

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Se plantean las Ecuaciones de Equilibrio Interno:
(***notación de índices***: si un índice se repite dos veces, se entiende que hay una sumatoria sobre el índice repetido)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (7)$$

Se multiplica la expresión anterior por un vector arbitrario **v** = **v**(***x***) y se integra este producto en el volumen del sólido:
(El vector arbitrario v puede considerarse como un "***desplazamiento virtual***")

$$\int_{\Omega} \mathrm{v}_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0 \quad (8)$$

Se reescribe la expresión anterior como:
(Manipulando algebraicamente y usando el teorema de la divergencia para expresar el vector de tracciones en la superficie).

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^{\mathrm{v}} \sigma_{ij} dV = \int_{\partial\Omega} \mathrm{v}_i t_i dS + \int_{\Omega} \mathrm{v}_i b_i dV \quad (9)$$

ε^{v}: ***deformación virtual*** asociada al

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial x \quad \partial x \right)$

externas (de volumen y de superficie) en el desplazamiento virtual **v**.

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Por conveniencia, la expresión anterior se reescribe utilizando ***notación matricial***, en lugar de ***notación tensorial*** de índices:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \left(\varepsilon^{\mathrm{v}}\right)^{T} \sigma \, dV}_{W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{v}}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathrm{v}^{T} t dS + \int_{\Omega} \mathrm{v}^{T} b dV}_{W_{ext}^{\mathrm{v}}} \qquad \textbf{(10)}$$

Donde:

$$\varepsilon^{\mathrm{v}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{\mathrm{v}} \\ \varepsilon_{22}^{\mathrm{v}} \\ \varepsilon_{33}^{\mathrm{v}} \\ 2\varepsilon_{12}^{\mathrm{v}} \\ 2\varepsilon_{13}^{\mathrm{v}} \\ 2\varepsilon_{23}^{\mathrm{v}} \end{Bmatrix} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad \mathrm{v} = \begin{Bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \\ \mathrm{v}_3 \end{Bmatrix} \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Discretización del dominio:

$$W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{v}} = \sum^{E} \int \left(\varepsilon^{\mathrm{v}}\right)^{T} \sigma \, dV \qquad \textbf{(11)}$$

Funciones de aproximación local, que se almacenan en las matrices de interpolación global ***N***:

(la matriz de interpolación global ***N*** corresponde al ensamble de matrices de interpolación local, ***N****e*)

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

Se introduce la aproximación **(14)** para $\mathbf{v}^{T}$ y $(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{v}})^{T}$ en las expresiones de los trabajos virtuales W_{ext}^{v} y W_{int}^{v}, respectivamente, para obtener:

+ una forma ***continua*** del balance de **trabajos virtuales**:

$$(\theta_{\mathrm{v}})^{T}\int_{\Omega} B^{T}\sigma\, dV = (\theta_{\mathrm{v}})^{T}\left(\int_{\partial\Omega} N^{T} t dS + \int_{\Omega} N^{T} b dV\right) \quad \textbf{(15)}$$

+ una forma ***discreta*** del balance de **trabajos virtuales**:

$$(\theta_{\mathrm{v}})^{T}\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^{e}} B^{T}\sigma\, dV = (\theta_{\mathrm{v}})^{T}\sum_{e=1}^{E}\left(\int_{\partial\Omega^{e}} N^{T} t dS + \int_{\Omega^{e}} N^{T} b dV\right) \quad \textbf{(16)}$$

Puesto que $(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{v}})^{\boldsymbol{T}}$ son desplazamientos nodales virtuales ***arbitrarios*** , de (15) y (16) se obtiene:

+ una forma ***continua*** del equilibrio de ***fuerzas***:

$$\underbrace{\int_{\Omega} B^{T}\sigma\, dV}_{} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} N^{T} t dS + \int_{\Omega} N^{T} b dV}_{} \quad \textbf{(17)}$$

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de ***ecuaciones algebraicas*** :

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e} B^T\sigma\, dV = \sum_{e=1}^{E}\left(\int_{\partial\Omega^e} N^T t dS + \int_{\Omega^e} N^T b dV\right) \qquad \textbf{(18)}$$

Observación 1:

- El contorno del sólido puede descomponerse en 2 partes: $\partial\Omega^e = \partial\Omega^e_t \bigcup \partial\Omega^e_u$
- Las "tracciones" ***t*** en el contorno $\partial\Omega^e_t$ son ***datos*** del problema
- Las "tracciones" ***t*** en el contorno $\partial\Omega^e_t$ son cero en "elementos interiores".
- Las "tracciones" ***t*** en el contorno $\partial\Omega^e_u$ se podrán obtener una vez resuelto el

Sin pérdida de generalidad, el MEF se puede reescribir como:

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e} B^T\sigma\, dV = f_{\text{ext}}$$

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de ***ecuaciones algebraicas*** :

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T \sigma \, dV = f_{\text{ext}} \qquad \textbf{(19)}$$

Observación 2:

- La formulación del MEF aquí presentada, no ha hecho mención a ninguna ecuación constitutiva en particular, de modo que la aproximación definida por el sistema **(19)** es válida, en principio, tanto para materiales ***elásticos*** como ***elasto-plásticos***.

Observación 3:

- Aunque se ha completado la formulación del MEF, el sistema de ecuaciones **(19)** no puede resolverse en la práctica mientras no se explicite la ecuación constitutiva del material, esto es, la relación entre los

- La linealidad del sistema **(19)** depende de la **linealidad** de la **ecuación constitutiva.**

3.7.2 El Método de los Elementos Finitos: II. Generalización mediante el PTV

Formulación del MEF a partir del principio de los trabajos virtuales

∴ La aproximación por el **Método de Elementos Finitos** consiste en la solución del siguiente sistema de ***ecuaciones algebraicas*** :

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T \sigma \, dV = f_{\text{ext}} \qquad \textbf{(19)}$$

Observación 4:

- La matriz ***B*** presente en **(19)** contiene derivadas de las funciones de aproximación local ***N***.
- Puesto que las funciones de aproximación ***N*** sólo dependen de la posición y no de los desplazamientos nodales ni de la tensión, también ***B*** depende sólo de la posición.
- Si ***B*** está definida en coordenadas materiales, el sistema **(19)** puede expresarse en términos ***incrementales***, simplemente introduciendo al tiempo

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T \dot{\sigma} \, dV = \dot{f}_{\text{ext}} \qquad \textbf{(20.a)}$$

ecuación constitutiva del material, así como del problema particular en estudio.

CONTENIDOS

3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

Ejemplo 1: Aplicación a la Elasticidad Lineal

I. Ecuación constitutiva en el elemento e: $\sigma = D^e \varepsilon$

II. Aproximación local a la deformación: $\varepsilon = B^e \theta^e$

III. Matriz de conectividad nodal: $\theta^e = A^e \theta$

$$\sigma = D^e B^e A^e \theta = D^e B \theta \qquad (21)$$

IV. Puesto que en este caso ***D^e*** es independiente del estado tensional, no es necesaria una forma incremental

Se puede sustituir (21) en (19), para obtener:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T D^e B \theta \, dV = f \qquad (22)$$

V. Puesto que θ **no participa en la integración** (no depende de la posición), puede salir del integrando y de la sumatoria. Además, recordando que $B = B^e A^e$ y $B^T = A^{e^T} B^{e^T}$, se tiene que:

$$\left(\sum_{e=1}^{E} A^{e^T} \left(\int_{\Omega^e} B^{e^T} D^e B^e dV \right) A^e \right) \theta = f \qquad (23)$$

asociado a la **Energía Potencial**.

CONTENIDOS

3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

Ejemplo 2: Aplicación a Elasto-Plasticidad

I. Ecuación constitutiva en el elemento *e*, aproximación local a la deformación y matriz de conectividad nodal. De acuerdo con (4) y (5), se tiene que:

$$d\sigma = D^{e^{\tan}} d\varepsilon$$

$$d\varepsilon = B^e d\theta^e$$

$$d\theta^e = A^e d\theta$$

$$\Rightarrow \quad d\sigma = D^{e^{\tan}} B^e A^e d\theta = D^{e^{\tan}} B d\theta \qquad \textbf{(24)}$$

Dividiendo por dt, (24) se puede reescribir como:

$$\Rightarrow \quad \dot{\sigma} = D^{e^{\tan}} B^e A^e \dot{\theta} = D^{e^{\tan}} B \dot{\theta} \qquad \textbf{(25)}$$

II. Puesto que en este caso $D^{e.\tan}$ es dependiente del estado tensional, es ***necesaria*** una ***forma incremental***.

$$\sum_{e=1}^{E} \int B^T D^{e^{\tan}} B d\theta \, dV = df$$

$$\sum_{e=1} \int_{\Omega^e}$$

(26.b)

3.7.3 Aplicaciones del MEF basado en el PTV

Ejemplo 2: Aplicación a Elasto-Plasticidad

III. Puesto que θ **no participa en la integración** (no depende de la posición), puede salir del integrando y de la sumatoria. Además, recordando que $B = B^e A^e$ y $B^T = A^{e^T} B^{e^T}$, las expresiones (26) se transforman en:

$$\left(\sum_{e=1}^{E} A^{e^T} \left(\int_{\Omega^e} B^{e^T} D^{e^{\tan}} B^e \, dV \right) A^e \right) d\theta = df \qquad \textbf{(27.a)}$$

$$\left(\sum_{e=1}^{E} A^{e^T} \left(\int_{\Omega^e} B^{e^T} D^{e^{\tan}} B^e \, dV \right) A^e \right) \dot{\theta} = \dot{f} \qquad \textbf{(27.b)}$$

que equivale a

$$K^{\tan} d\theta = df \qquad \textbf{(28.a)}$$

$$K^{\tan} \dot{\theta} = \dot{f} \qquad \textbf{(28.b)}$$

CONTENIDOS

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

OBSERVACIONES

- Se ha visto que la formulación del **MEF** basada en el **PTV** conduce a un sistema de **ecuaciones algebraicas**.
- Este sistema de ecuaciones es **no lineal**, si el comportamiento constitutivo del material es **no lineal**.
- Un ejemplo claro es el de la ecuación **(28)**, que corresponde al **MEF** utilizado en conjunto con la **Teoría Incremental de la Plasticidad** para materiales elasto-plásticos.

¿ Cómo se resuelve una ecuación no lineal ?

Se recordará a continuación el método iterativo de Newton-Raphson para:

- **Ecuaciones no lineales *escalares*** (1 ecuación, 1 incógnita)

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*a*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar (1/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$R(x) = 0 \tag{29}$$

donde:

- ***R*** es una función escalar y no lineal, de variable independiente ***x***
- ***x*** es la incógnita en la ecuación ***R* = 0**
- No es posible despejar ***x*** por la no linealidad de ***R***.

Para resolver la ecuación **(29)** mediante aproximación numérica, consideremos una **expansión de Taylor** de la función ***R***(*x*), truncada después de su **segundo** término:

$$R(x + \Delta x) \approx R(x) + \frac{dR}{dx}\Delta x \tag{30}$$

Esto permite definir un esquema iterativo del siguiente modo:

- sea ***x**** la solución buscada de la ec. **(29)**

$$dx\,|_{x^{(i)}}$$

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*a*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar (2/3)

Si en **(31)** se denota $\left.\dfrac{dR}{dx}\right|_{x^{(i)}} = J_R^{(i)}$, la expresión **(31)** se reescribe como:

$$\boxed{R\left(x^{(i)} + c^{(i+1)}\right) = 0 \approx R\left(x^{(i)}\right) + J_R^{(i)}\, c^{(i+1)}} \quad \textbf{(32)}$$

$$\boxed{J_R^{(i)}\, c^{(i+1)} \approx -R\left(x^{(i)}\right)} \quad \textbf{(33)}$$

Si el estado en la iteración *i*-ésima es conocido:

$\Rightarrow J_R^{(i)}$ y $x^{(i)}$ son conocidos

Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (es decir $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$)

2. Para $\boldsymbol{x}^{(0)}$, calcular $J_R^{(0)}$ y $R^{(0)} = R\left(x^{(0)}\right)$

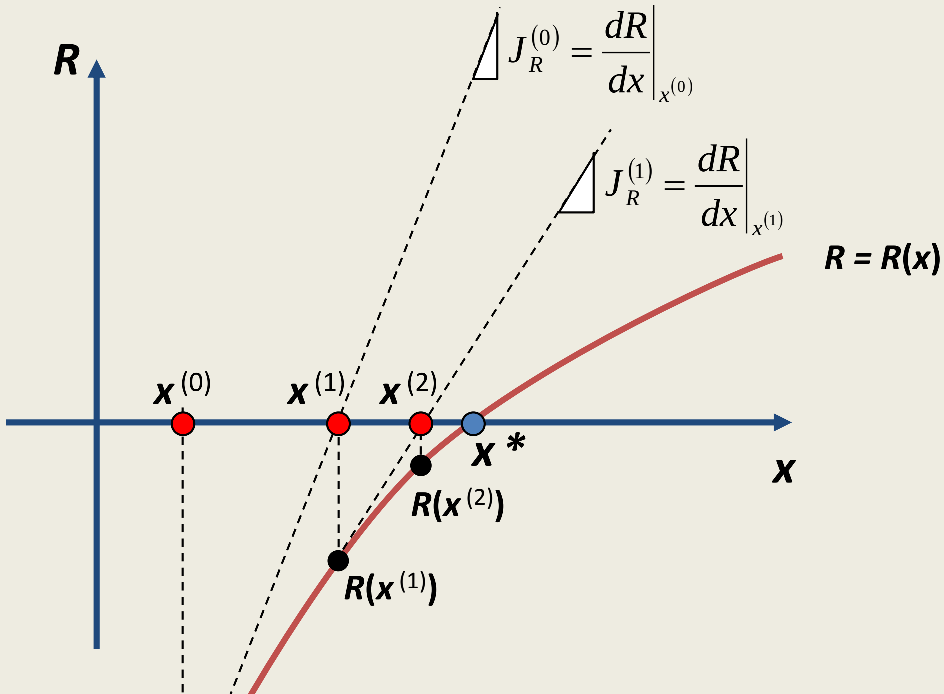
3. Iterar sobre $\boldsymbol{i}$ como: $c^{(i+1)} = \dfrac{-R^{(i)}}{J_R^{(i)}}$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + c^{(i+1)}$$

$$R^{(i+1)} = R\left(x^{(i+1)}\right)$$

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*a*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* escalar (3/3)



Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (es decir $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$)

2. Para $\boldsymbol{x}^{(0)}$, calcular $J_R^{(0)}$ y $R^{(0)} = R\left(x^{(0)}\right)$

3. Iterar sobre $\boldsymbol{i}$ como: $c^{(i+1)} = \dfrac{-R^{(i)}}{J_R^{(i)}}$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + c^{(i+1)}$$

$$R^{(i+1)} = R\left(x^{(i+1)}\right)$$

a la solución verdadera, que es x^*

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*b*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial (1/3)

Consideremos ahora la ecuación no lineal siguiente:

$$\boxed{\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0}} \quad \textbf{(32)}$$

Siendo $\vec{\boldsymbol{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{R}}$ vectores de ***n*** componentes.

En el caso vectorial, el método de N-R es similar al caso escalar, aunque se realizan los siguientes cambios:

$x \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \quad \longrightarrow$ Vector de incógnitas

$$J_R = \frac{dR}{dx} \quad \Rightarrow \quad J_R = \begin{bmatrix} \partial R_1/\partial x_1 & \cdots & \partial R_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = J_R(\vec{x})$$

$\longrightarrow$ Matriz Jacobiana de $\vec{R}(\vec{x})$

$c \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \quad \longrightarrow$ Vector de correcciones

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*b*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial (2/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$\boxed{\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0}} \quad \textbf{(32)}$$

Siendo $\vec{x}$ y $\vec{R}$ vectores de ***n*** componentes.

En el caso vectorial, el método de N-R es similar al caso escalar, aunque se realizan los siguientes cambios:

x	$\vec{x}$
$J_R = \dfrac{dR}{dx}$ $\Rightarrow$	$J_R = \begin{bmatrix} \partial R_1/\partial x_1 & \cdots & \partial R_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = J_R(\vec{x})$
c	$\vec{c}$

Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial $\vec{x}^{(0)}$ (es decir $i = 0$)

2. Para $\vec{x}^{(0)}$, calcular $\mathcal{J}_R^{(0)}$ y $\vec{R}^{(0)} = \vec{R}(\vec{x}^{(0)})$

3. Iterar sobre i como: $\vec{c}^{(i+1)} \approx -\left[\mathcal{J}_R^{(i)}\right]^{-1} \cdot \vec{R}^{(i)}$

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^{i} + \vec{c}^{i+1}$$

$$\left[J_R^{(i)}\right]\vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$$

$$\vec{R}^{i+1} = \vec{R}\left(\vec{x}^{i+1}\right)$$

3.7.4 Ecuaciones No Lineales: Método de Newton-Raphson

(*b*) Método de Newton-Raphson para una ecuación *no lineal* vectorial (3/3)

Consideremos la ecuación no lineal siguiente:

$$\vec{R}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (32)$$

Siendo $\vec{x}$ y $\vec{R}$ vectores de ***n*** componentes.

En el caso vectorial, el método de Newton-Raphson consiste en:

sustituir

UN sistema no-lineal de ***n*** ecs. x ***n*** incógnitas tal como la ecuación **(32)**

por

VARIAS resoluciones de un sistema lineal de nxn tal como el de la ecuación **(33)**

$$J_R^{(i)} \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)} \quad (33)$$

propuesto para **x**⁰ es ***cercano*** a la solución verdadera, que es ***x****

Algoritmo Newton-Raphson

1. Asignar un valor inicial $\vec{x}^{(0)}$ (es decir $i = 0$)

2. Para $\vec{x}^{(0)}$, calcular $\mathcal{J}_R^{(0)}$ y $\vec{R}^{(0)} = \vec{R}(\vec{x}^{(0)})$

3. Iterar sobre i como: $\vec{c}^{(i+1)} \approx -\left[\mathcal{J}_R^{(i)}\right]^{-1} \cdot \vec{R}^{(i)}$

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^{i} + \vec{c}^{i+1}$$

$$\left[J_R^{(i)}\right] \vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$$

$$\vec{R}^{i+1} = \vec{R}\left(\vec{x}^{i+1}\right)$$

CONTENIDOS

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

Se ha estudiado cómo resolver una ecuación **no lineal genérica**, ya sea de tipo **escalar** o **vectorial**, mediante iteraciones de Newton.

Sin embargo,

¿ Cómo se aplica el método de Newton en el caso particular del MEF ?

Se presentará a continuación dos implementaciones posibles:

- **Solución *iterativa* del MEF**
- **Solución *iterativa* e *incremental* del MEF**

En ambas implementaciones, la ecuación no lineal a resolver es la ec.(28),

CONTENIDOS

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*a*) Solución iterativa del MEF no lineal (1/5)

En el MEF no lineal, **¿ Cuál es nuestra $\vec{R}$?** **¿ Cuál es el vector de incógnitas $\vec{x}$?**

En primer lugar, se reescribe **(28.a)** como:

$$\boxed{K^{\tan} d\theta = df} \Rightarrow \boxed{\int_{\theta_0}^{\theta} K^{\tan} d\theta = \int_{f_{\text{ext.0}}}^{f_{\text{ext}}} df = \Delta f = f_{\text{ext}} - f_{\text{ext.0}}} \quad \textbf{(34)}$$

Admitiendo que $\boldsymbol{\theta_0 = 0}$ y que $\boldsymbol{f_{ext.0} = 0}$, se tiene:

$$\int_{0}^{\theta} K^{\tan} d\theta = f_{\text{ext}} \Rightarrow \int_{0}^{\theta} K^{\tan} d\theta - f_{\text{ext}} = 0$$

La función $\vec{R}$ se define entonces como:

$$R = R(\theta) = \underbrace{\int_{0}^{\theta} K^{\tan} d\theta}_{} - f_{\text{ext}}$$

Fuerzas ***externas***

La ecuación no lineal vectorial a resolver mediante *Newton-Raphson* es:

• Fuerzas internas

• ***f*** : vector de ***datos*** (fuerzas nodales externas)

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*a*) Solución iterativa del MEF no lineal (2/5)

Implementación del Método Iterativo

Ecuación a resolver :

$$\boxed{R(\theta)=0} \quad \textbf{(35)}$$

1. Asignar un valor inicial $\theta^{(0)}$ (es decir $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$)

2. Para $\theta^{(0)}$, calcular $J_R^{(0)}$ y $R^{(0)} = R\left(\theta^{(0)}\right)$

3. Iterar sobre $\boldsymbol{i}$ como:

- $c^{(i+1)} = -\left[J_R^{(i)}\right]^{-1} R^{(i)}$
- $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + c^{(i+1)}$

Observación (1)

¿Qué es $\boldsymbol{J_R}$? ¿Cómo se obtiene?

Observación (2)

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*a*) Solución iterativa del MEF no lineal (3/5)

Implementación del Método Iterativo

Observación (1)

¿Qué es J_R? ¿Cómo se obtiene?

Recordando que $R = R(\theta) = \int_0^\theta K^{\tan} d\theta - f$
y reconociendo que:

- f es un dato (independiente de θ).
- La derivada de un integral recupera el integrando.

se tiene que:

$$J_R = \frac{\partial R}{\partial \theta} = \quad J_R = K^{\tan} = K^{\tan}(\theta) \quad \textbf{(36)}$$

Observación (2)

¿Cómo se calcula el vector de residuos actualizado?

Recordando de **(19)** que las fuerzas internas se obtienen de $f_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T \sigma \, dV$

∴ ¡¡ Es necesario determinar la tensión ***actual*** !!

$$R^{(i+1)} = f_{\text{int}}^{(i+1)} - f_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} B^T \sigma^{(i+1)} \, dV \; - f_{\text{ext}}$$

De **(4)**, es evidente que:

$$\varepsilon^{(i+1)} = B\theta^{(i+1)}$$

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*a*) Solución iterativa del MEF no lineal (4/5)

Implementación del Método Iterativo

Observación (2) (continuación)

¿Cómo se calcula el vector de residuos actualizado?

Se ha visto que para actualizar el vector de residuos ***R*** en la iteración $\boldsymbol{i}+\mathbf{1}$, es necesario:

Integrar la ecuación constitutiva para hallar el ***valor actualizado del tensor de tensiones***.

Ahora bien, la expresión **(37)** se puede interpretar como

$$\sigma^{(i+1)} - \sigma_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon = \Delta\sigma_0^{(i+1)} \qquad \textbf{(37.b)}$$

$$\Delta\sigma_0^{(i+1)} = \sigma^{(i+1)} - \sigma_0 = \sigma^{(i+1)} - 0$$

Integración de la ecuación constitutiva:

- La integración de la ec. constitutiva requiere, usualmente, un procedimiento matemático relativamente complicado
- Se han propuesto diversos métodos en la literatura (por ej.: ***Retorno Radial***)
- Esta integración se realiza en los ***Puntos de Gauss***.
- Esta integración puede ser "*problemática*" si $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}^{(i+1)}$ es "*grande*", como suele ser el caso en el ***Método***

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*a*) Solución iterativa del MEF no lineal (5/5)

Resumen del Método Iterativo: ecuación y algoritmo

Ecuación a resolver : $$\boxed{R(\theta)=0} \quad \textbf{(35)}$$

1. Asignar un valor **inicial** $\theta^{(0)}$ (es decir $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$). Usualmente : $\theta^{(0)}=0 \quad \varepsilon^{(0)}=0 \quad \sigma^{(0)}=0$

2. Para $\theta^{(0)}$, calcular $J_R^{(0)}=K^{\tan}\left(\theta^{(0)}\right)=K^{elást}$ y $R^{(0)}=R\left(\theta^{(0)}\right)=0-f_{\text{ext}}=-f_{\text{ext}}$

3. Iterar sobre ***i*** como:

- $c^{(i+1)}=-\left[J_R^{(i)}\right]^{-1}R^{(i)}$ es decir, resolviendo el sistema ***lineal*** $\left[J_R^{(i)}\right]\vec{c}^{(i+1)}=-\vec{R}^{(i)}$
- $\theta^{(i+1)}=\theta^{(i)}+c^{(i+1)}$
- $\varepsilon^{(i+1)}=B\theta^{(i+1)}$
- $\sigma^{(i+1)}=\sigma^{(0)}+\int_{\varepsilon^{0}}^{\varepsilon^{(i+1)}}D^{\tan}d\varepsilon$

CONTENIDOS

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*b*) Solución iterativa e incremental del MEF no lineal (1/2)

Sea θ^* la solución de la ecuación no lineal vectorial $$\boxed{R(\theta)=0}$$

Normalmente, la condición de **cercanía** entre $\theta^{(0)}$ y θ^* **no se cumple !!!**

Se divide f_{ext} en varios ***incrementos*** de carga:

$$f_{ext}^{n+1} = f_{ext}^{n} + (\Delta f_{ext})_{n+1} \quad \text{con} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

siendo la fuerza total $$f_{ext} = \sum_{m=1}^{M} (\Delta f_{ext})_m$$

Asumiendo como ***conocido*** el estado ***n-ésimo***, se aplica el método de Newton-Raphson a la ec. **(34)** modificada del siguiente modo:

$$\int^{\theta_{n+1}} K^{\tan} d\theta = \int^{f_{n+1}} df - (\Delta f \ldots)$$

Donde:

3.7.5 El Método de Newton-Raphson en el MEF no lineal

(*b*) Solución iterativa e incremental del MEF no lineal (2/2)

Resumen del Método iterativo e incremental: ecuación y algoritmo

Ecuación a resolver : $R(\theta_{n+1}) = 0$

1. Asignar un valor **inicial** $\theta^{(0)}$ (es decir $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$). Usualmente : $\theta^{(0)} = \theta_n \quad \varepsilon^{(0)} = \varepsilon_n \quad \sigma^{(0)} = \sigma_n$

2. Para $\theta^{(0)}$, calcular $J_R^{(0)} = K^{\tan}(\theta_n)$ y $R^{(0)} = R(\theta^{(0)}) = 0 - f_{ext}^{n+1} = -f_{ext}^{n+1}$

3. Iterar sobre ***i*** como: • $c^{(i+1)} = -\left[J_R^{(i)}\right]^{-1} R^{(i)}$ es decir, resolviendo el sistema ***lineal*** $\left[J_R^{(i)}\right]\vec{c}^{(i+1)} = -\vec{R}^{(i)}$

• $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + c^{(i+1)}$ • $\varepsilon^{(i+1)} = B\theta^{(i+1)}$ • $\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(0)} + \int_{\varepsilon^{(0)}}^{\varepsilon^{(i+1)}} D^{\tan} d\varepsilon$