

# MECÁNICA DE SÓLIDOS

## Curso 2017/18

- 1 **COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS MATERIALES**
- 2 **LAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA DE SÓLIDOS**
- 3 **PLASTICIDAD**
- 4 **VISCOELASTICIDAD**
- 5 **VISCOPLASTICIDAD**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## **Tema 4**

# **Viscoelasticidad**

- 1 INTRODUCCIÓN**
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS**
- 3 HERRAMIENTAS**
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN**
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT**
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS**
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS**
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS
- 3 HERRAMIENTAS
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

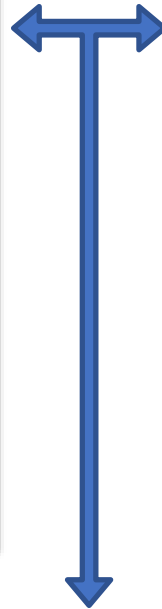
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.1 Introducción

### Material elástico:

- **Almacena** energía mecánica sin disiparla.
- Si se aplica una **carga** en forma **instantánea**, el sólido se **deforma instantáneamente**.
- En este caso, el estado tenso-deformacional permanece constante hasta que desaparezca la carga.
- El estado tensional es de tipo “restaurador”: si la carga cesa, la forma se recupera.
- La tensión  $\sigma$  depende de la deformación  $\epsilon$ .



### Fluido viscoso:

- Sometidos a un estado tensional no hidrostático, **disipan energía**, sin posibilidad alguna de almacenamiento.
- Ante un estado tensional tangencial, el fluido fluye de manera estacionaria.
- El estado tensional no es de tipo “restaurador”: si cesa las tensiones, las partículas fluidas no regresan a su posición inicial.
- La tensión  $\sigma$  depende de la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ .

### Material viscoelástico:

- Puede considerarse que tiene un comportamiento “intermedio” entre sólido elástico y fluido viscoso.
- Si se aplica una carga en forma **instantánea**, sufre una **deformación instantánea**, seguida de otra **deformación diferida**, creciente con el tiempo y que puede, o no, ser

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

presencia de equimios, la deformación en el caso visco-elástico está asociada a efectos de difusión de átomos o moléculas en el seno del material.

## 4.1 Introducción

### Material elástico:

- La tensión  $\sigma$  depende de la deformación  $\varepsilon$ :

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

- Un ejemplo es la Ley de Hooke-Lamé:

$$\sigma = f(\varepsilon) = E\varepsilon$$

### Material viscoelástico:

- La tensión  $\sigma$  depende de la deformación  $\varepsilon$  y de la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}$ :

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

- Los estados tensional y deformacional **NO** están **biunívocamente relacionados**, ya que influye la historia de los estados de tensiones y deformaciones por los que el material ha pasado anteriormente.

### Fluido viscoso:

- Ante un estado tensional tangencial, el fluido fluye de manera estacionaria y la tensión  $\sigma$  depende de la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}$ :



$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\frac{dv}{dy}$

capas de fluido en el plano de aplicación de la

## 4.1 Introducción

---

### Ejemplos de materiales con comportamiento viscoelástico:

- Metales a alta temperatura o bajo sollicitación mecánica de “larga duración”.
- Hormigón.
- Ciertos polímeros en estado vítreo.
- Los suelos sometidos a acciones dinámicas, etc

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 **ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS**
- 3 HERRAMIENTAS
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.2 Aspectos fenomenológicos

Fenomenológicamente, se puede reconocer que un material obedece a **ELASTICIDAD CLÁSICA** si se puede constatar experimentalmente que, simultáneamente:

- La deformación es completamente recuperable bajo descarga
- La tensión  $\sigma$  depende únicamente de la deformación  $\varepsilon$ :  $\sigma = f(\varepsilon)$

Por su parte, se puede reconocer que un material es de tipo **VISCO-ELÁSTICO** (o visco-plástico) si se verifican experimentalmente los siguientes fenómenos:

- El fenómeno de **FLUENCIA**
- El fenómeno de **RELAJACIÓN**

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font with a blue and orange gradient background behind the letters.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

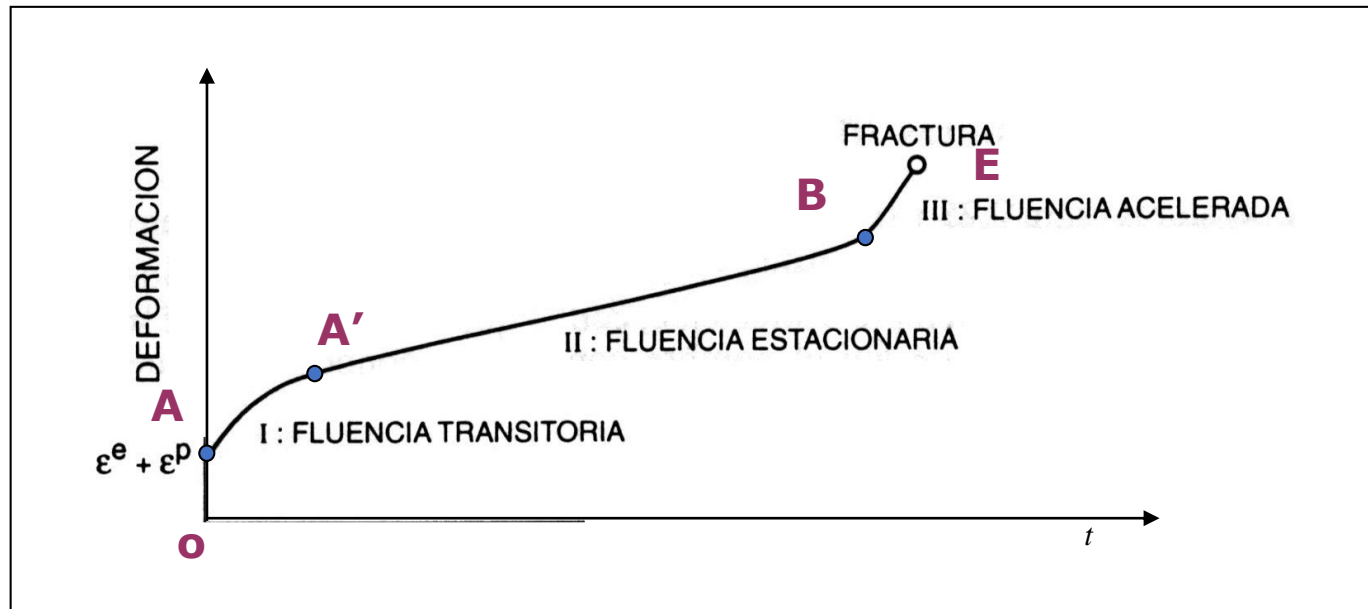
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 4.2 Aspectos fenomenológicos

### ¿ Qué es FLUENCIA ? - Evidencia experimental del comportamiento viscoelástico

Si se somete a un sólido a una **tensión instantánea**, que luego se **mantiene constante**, la deformación aumenta con el tiempo en 3 fases diferenciadas:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

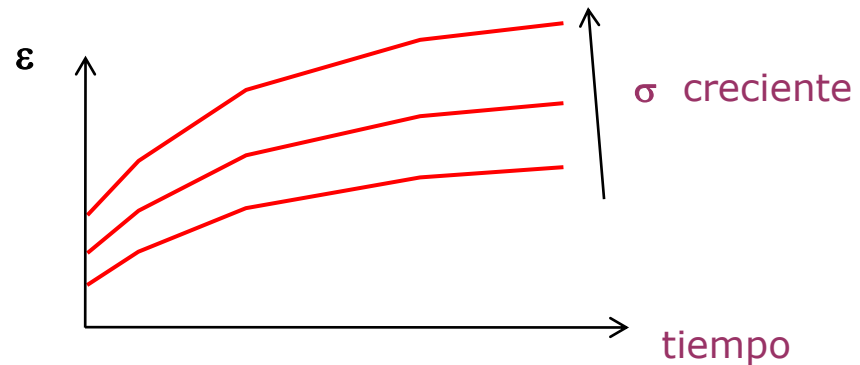
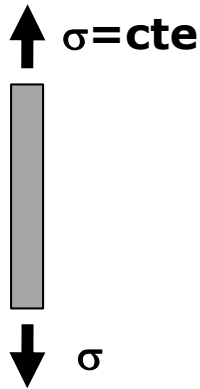
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

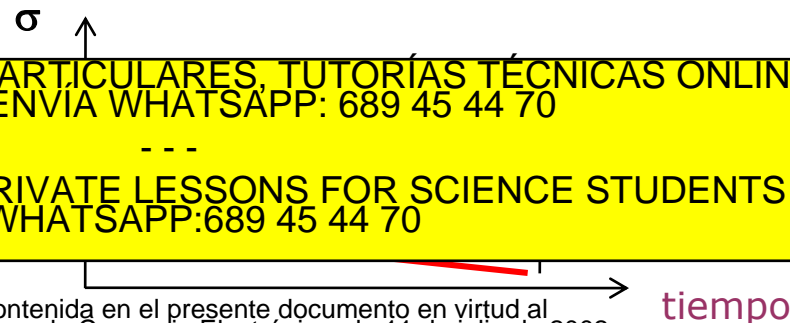
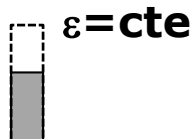
## 4.2 Aspectos fenomenológicos

### Ensayos experimentales de FLUENCIA y de RELAJACIÓN

-Ensayo de fluencia (uniaxial): ensayo a **tensión** constante en el que se mide la variación de la **deformación** en el tiempo



-Ensayo de relajación (uniaxial): ensayo a **deformación** constante en el que se mide la variación de la **tensión** en el tiempo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

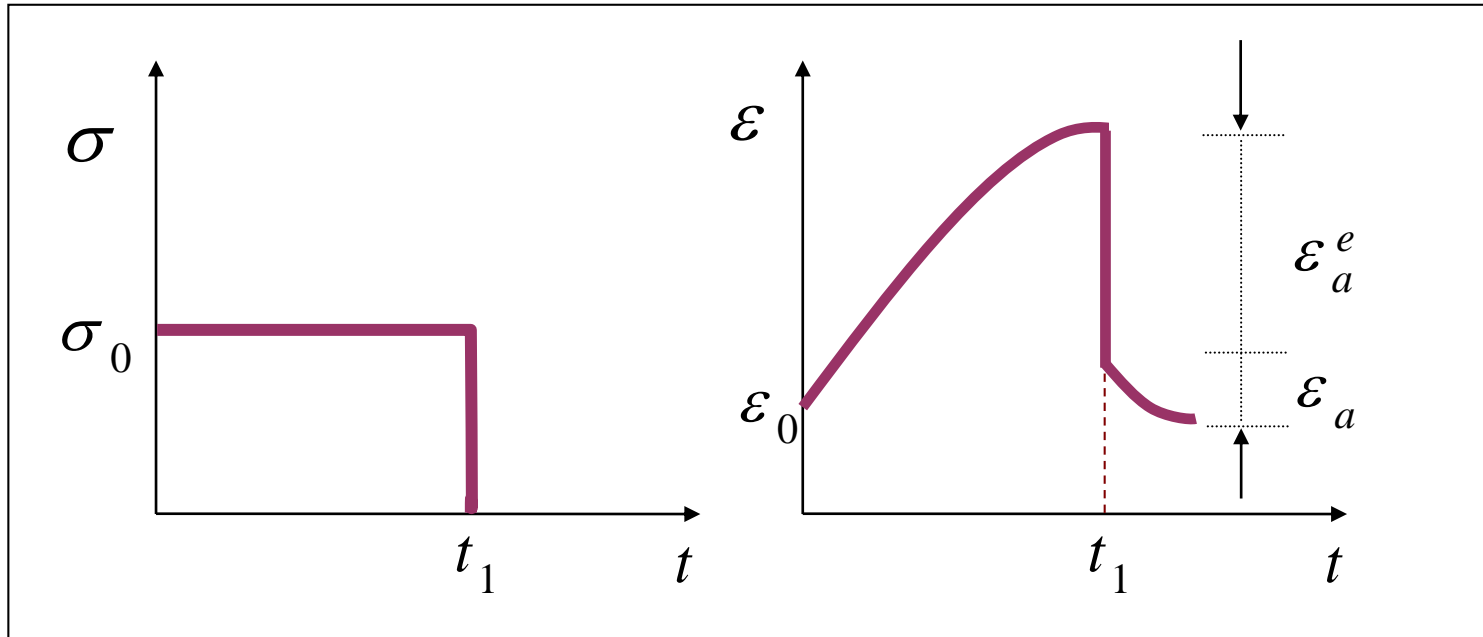
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

tiempo

## 4.2 Aspectos fenomenológicos

### Ensayo de FLUENCIA



- Si se aplica instantáneamente una **tensión**  $\sigma_0$ , que luego se mantiene **constante** en el tiempo, se observa un **incremento paulatino** de la **deformación** a partir del valor instantáneo inicial  $\epsilon_0$ .

Cartagena99

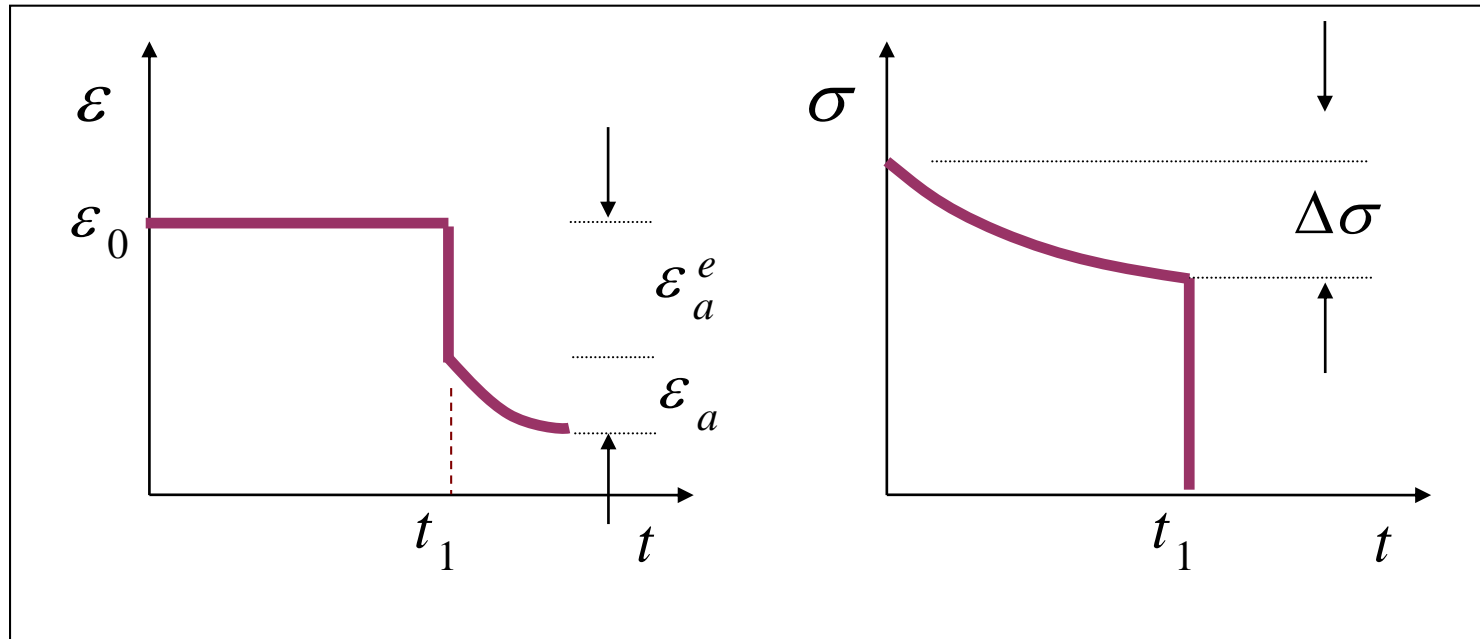
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.2 Aspectos fenomenológicos

### Ensayo de RELAJACIÓN



- Si se mantiene la **deformación constante** en el tiempo, se observa una **disminución paulatina** de la **tensión** a partir de un **valor inicial** al que se había llegado **instantáneamente**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS
- 3 HERRAMIENTAS**
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

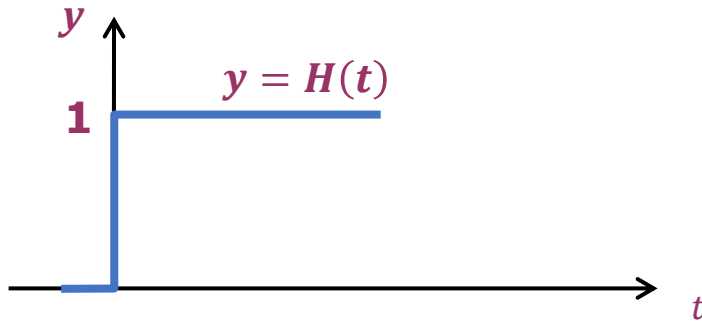
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

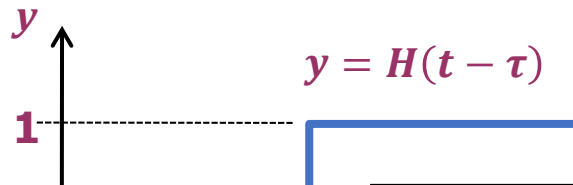
## 4.3 Herramientas matemáticas

Función “escalón unitario” (función Heaviside):



$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$H$  no está definida en  $t = 0$



$$\begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}$$

Cartagena99

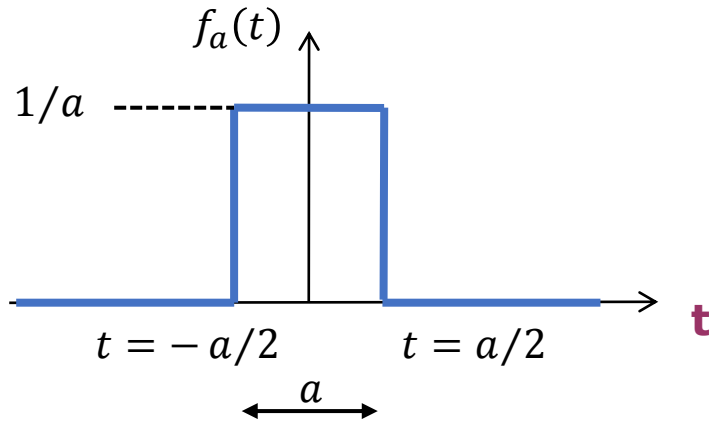
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 4.3 Herramientas matemáticas

Función “delta de Dirac”,  $\delta$ :



Sea  $a \geq 0$ :

$$f_a(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } |t| < a/2 \\ 0 & \text{si } |t| > a/2 \end{cases}$$

La función “delta de Dirac” se define a partir de  $f$  como:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

**Cartagena99**

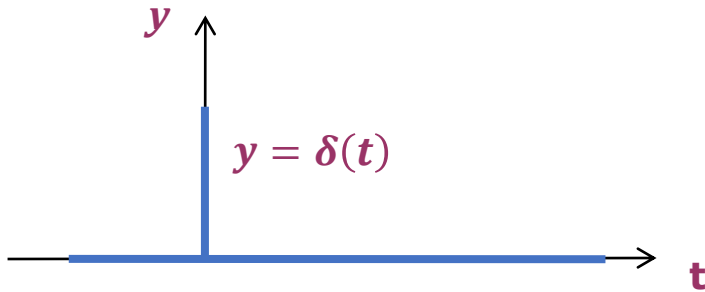
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

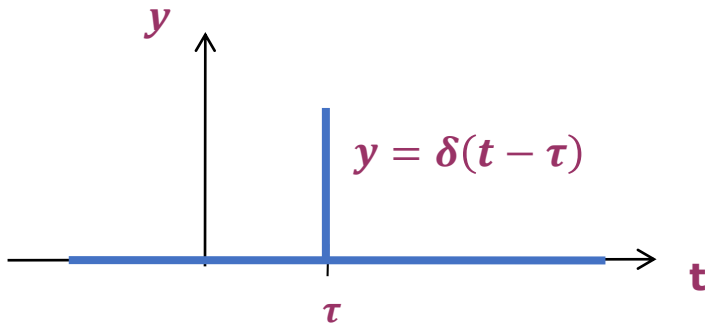
## 4.3 Herramientas matemáticas

Función “delta de Dirac”,  $\delta$ :



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

$\delta$  no está definida en  $t = 0$



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

$\delta$  no está definida en  $t = \tau$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

---

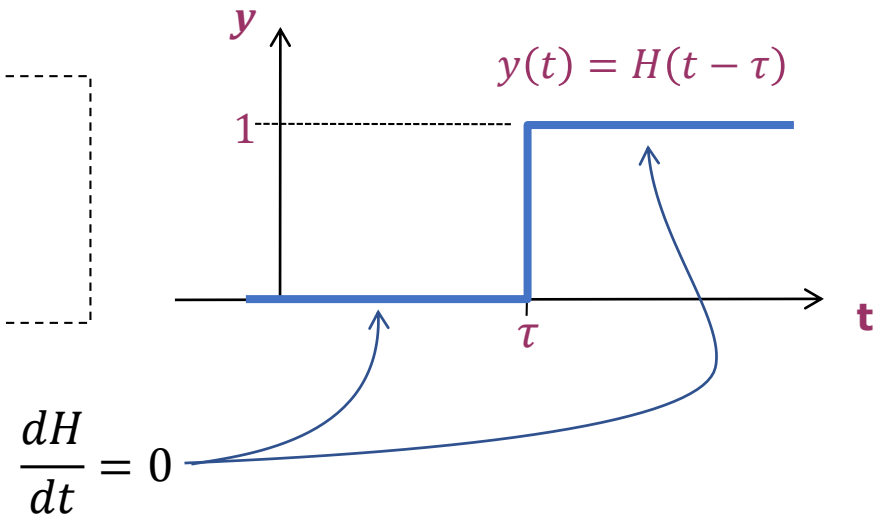


## 4.3 Herramientas matemáticas

### Relación entre las funciones Heaviside y Dirac:

Si se considera la función Heaviside desplazada:

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } t > \tau \end{cases}$$



Es directo verificar que:

La derivada de  $H$  es la “delta de Dirac”:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

vertical tiene pendiente infinita.

## 4.3 Herramientas matemáticas

### Transformada de Laplace de una función del tiempo:

- Sea  $f(t)$  una función del tiempo, definida para  $t > 0$
- La “**transformada de Laplace**” de la función  $f(t)$  se denota como  $\mathcal{L}[f(t)]$ , y se define mediante la expresión integral siguiente:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \bar{f}(s)$$

- Puede entenderse a  $\mathcal{L}[ \ ]$  como un “**operador**” que, cuando se aplica sobre una función del tiempo, resulta en una nueva función en variable  $s$ .

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.3 Herramientas matemáticas

### Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (1/3)

	Función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)]$	Transformada de $f$ $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
Escalón unitario	$f(t) = H(t)$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{s}$
Escalón unitario desplazado	$f(t) = H(t - \tau)$	$\bar{f}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$
Dirac	$f(t) = \delta(t)$	$\bar{f}(s) = 1$
Dirac desplazada	$f(t) = \delta(t - \tau)$	$\bar{f}(s) = e^{-\tau s}$
Función identidad (polinomio lineal)	$f(t) = t$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{s^2}$
Función potencial	$f(t) = t^n$	$\bar{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 4.3 Herramientas matemáticas

### Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (2/3)

	Función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)]$	Transformada de $f$ $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
Seno	$f(t) = \sin(\omega t)$	$\bar{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Coseno	$f(t) = \cos(\omega t)$	$\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Evolución exponencial (es decaimiento para $\alpha > 0$ )	$f(t) = e^{-\alpha t}$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{(\alpha + s)}$
Evolución exponencial (es crecimiento para $\alpha > 0$ )	$f(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(\alpha + s)}$
Función con envolvente	$f(t) = g(t)e^{at}$	$\bar{f}(s) = \bar{g}(s - a)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## 4.3 Herramientas matemáticas

### Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (3/3)

- Transformada de Laplace de la derivada temporal de una función:

$$f(t) = \frac{d^n g(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(s) = s^n \bar{g}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left. \frac{d^k g}{dt^k} \right|_{t=0}$$

- Si además se da el caso particular de que  **$g$**  y **todas sus derivadas** son nulas en el instante inicial  **$t = 0$** , es decir:

$$g(0) = 0 \quad \text{y además} \quad \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2 g}{dt^2} \right|_{t=0} = \dots = \left. \frac{d^n g}{dt^n} \right|_{t=0} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS
- 3 HERRAMIENTAS
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN**
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

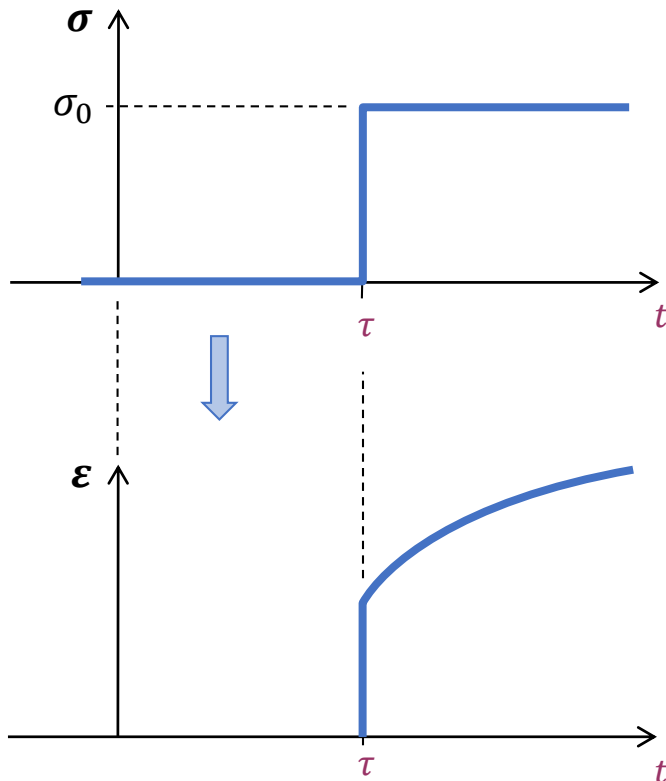
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.4 Función de Fluencia y Módulo de Relajación

### Función de fluencia.-



Se prescribe una *tensión constante*  $\sigma_0$  a partir del instante  $\tau$ :

$$\sigma = \sigma_0 H(t - \tau)$$

Se observa una *deformación variable*, descrita mediante la siguiente función:

$$\epsilon = \sigma_0 J(t - \tau)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

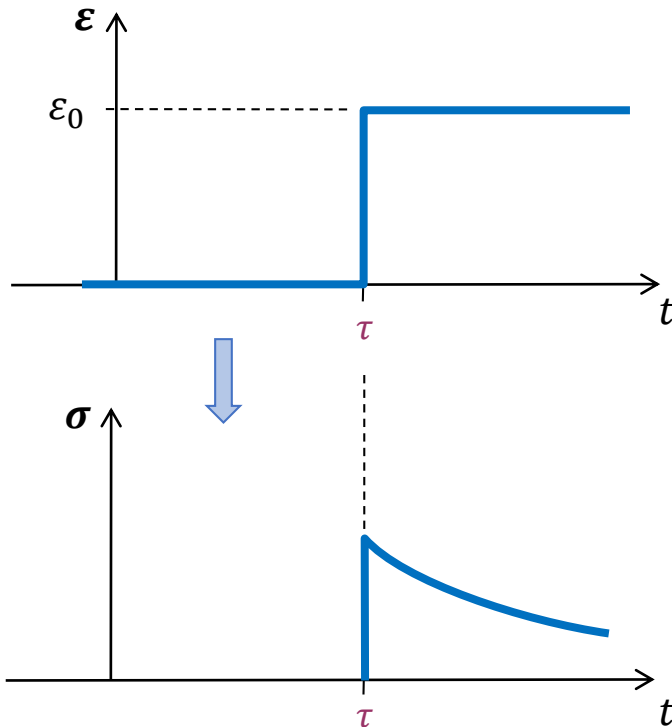
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

constante prescrita es unitaria ( $\sigma_0 = 1$ )

## 4.4 Función de Fluencia y Módulo de Relajación

### Módulo de relajación.-



Se prescribe una *deformación constante*  $\epsilon_0$  a partir del instante  $\tau$  :

$$\epsilon = \epsilon_0 H(t - \tau)$$

Se observa una *tensión variable*, descrita mediante la siguiente función:

$$\sigma = \epsilon_0 Y(t - \tau)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

constante prescrita es unitaria ( $\epsilon_0 = 1$ )



# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS
- 3 HERRAMIENTAS
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT**
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelos viscoelásticos analógicos.-

- Elemento “muelle” :



$$F = ku \rightarrow \sigma = E\varepsilon$$

- Elemento “amortiguador” :

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \rightarrow \tau = \eta \dot{\gamma}$$



$$F = c\dot{u} \rightarrow \sigma = c\dot{\varepsilon}$$

Un **modelo viscoelástico analógico** es una combinación de **muelles** y **amortiguadores** que se utiliza para reflejar un comportamiento viscoelástico según leyes constitutivas del tipo:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

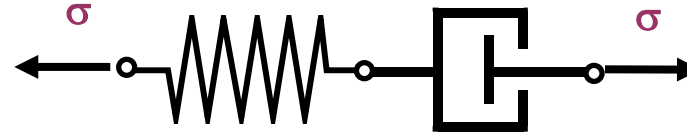
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Maxwell.-

(a) Planteamiento del modelo :



$$\begin{array}{l}
 \text{Muelle:} \\
 \text{Amortiguador:} \\
 \text{Elemento completo:}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \sigma = E \varepsilon_m \quad [1] \\
 \sigma = c \dot{\varepsilon}_a \quad [2] \\
 \varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_a \quad [3]
 \end{array} \right\}$$

Derivando [3] con respecto al tiempo, se tiene:  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m + \dot{\varepsilon}_a$  [4]

Derivando [1] con respecto al tiempo, se tiene:  $\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}_m$  [5]

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

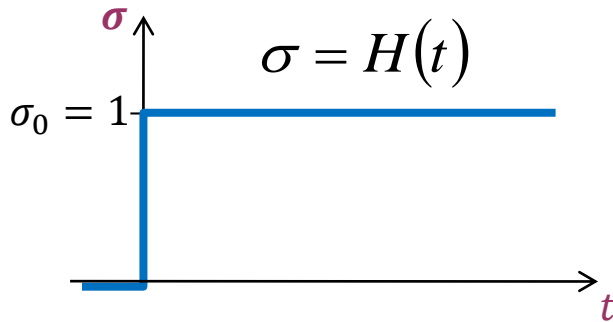
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(tensión y la deformación)

# 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

## Modelo de Maxwell (Cont.)-

(b) Función de Fluencia ( $\sigma_0 = 1$ ):



Ecuación diferencial del modelo:

$$\sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \dot{\epsilon}$$

$$\rightarrow H(t) + \frac{c}{E} \dot{H}(t) = c \dot{\epsilon} \quad [1]$$

Aplicando la transformada de Laplace en [1], se obtiene:  $\frac{1}{s} + \frac{c}{E} = c s \bar{\epsilon} \Rightarrow \sigma = H(t)$  [2]

Aplicando la transformada inversa en [2], se obtiene la Función de Fluencia:

$$J(t) = \epsilon(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{c} t$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

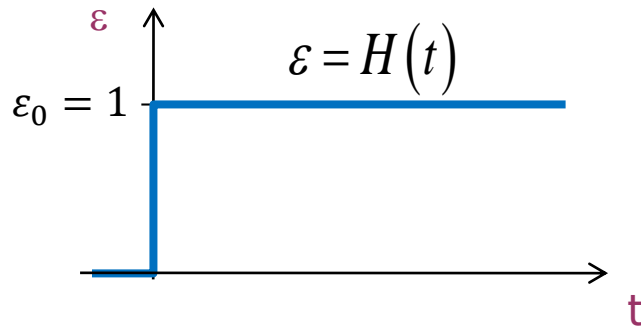
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

predice la Elasticidad Clásica.

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Maxwell (Cont.)-

(c) Módulo de Relajación ( $\varepsilon_0 = 1$ ):



Ecuación diferencial  
del modelo:

$$\sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \dot{\varepsilon}$$

$$\longrightarrow \sigma + \frac{c}{E} \dot{\sigma} = c \delta(t) \quad [1]$$

Aplicando la transformada de Laplace en [1], se obtiene:  $\bar{\sigma} + \frac{c}{E} s \bar{\sigma} = c \longrightarrow \bar{\sigma} = \frac{E}{\frac{E}{c} + s} \quad [2]$

Aplicando la transformada inversa en [2], se obtiene el Módulo de Relajación:

$$Y(t) = \sigma = E \exp\left(-\frac{E}{c} t\right)$$

Decaimiento exponencial

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

t

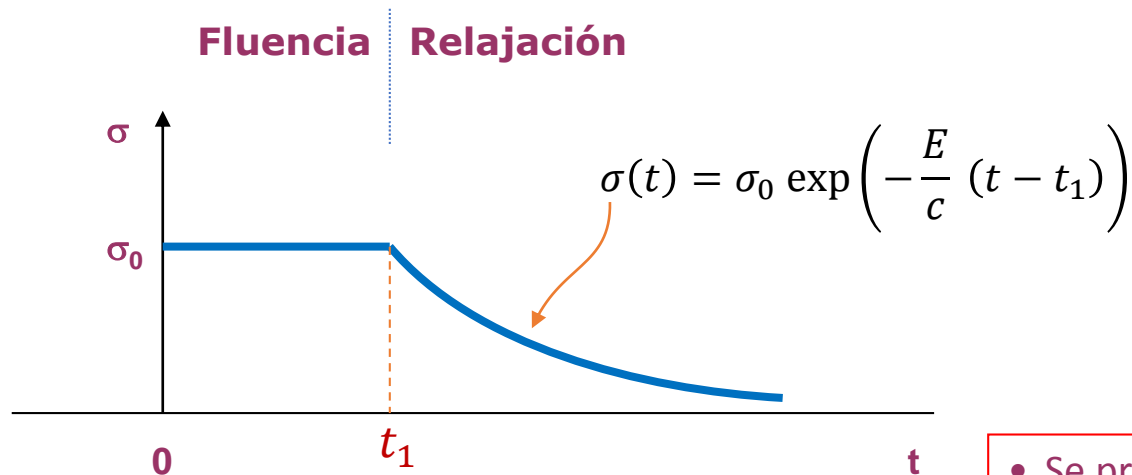
que predice la **Elasticidad Clásica**.

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Maxwell (Cont.)-

#### (d) Procesos consecutivos de fluencia y relajación: respuesta del modelo

Considérese una barra sometida a tracción en dos fases. En la primera se somete a una tensión constante  $\sigma_0$  y, cuando ha alcanzado una deformación  $\varepsilon_1$ , se fijan los extremos de la barra



$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{E}{c} t\right)$$

$\varepsilon$  ↑

- Se produce deformación elástica inicial.
- El material alcanza la

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

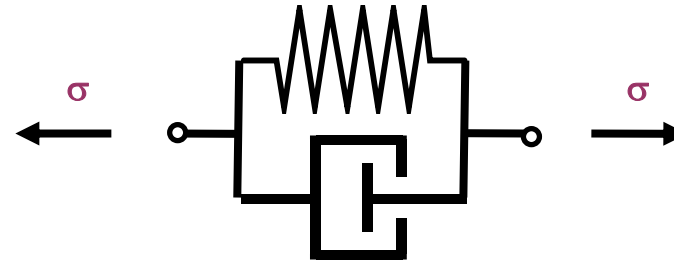
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Kelvin-Voigt.-

(a) Planteamiento del modelo :



Muelle:  $\sigma_m = E\varepsilon$  [1]

Amortiguador:  $\sigma_a = c\dot{\varepsilon}$  [2]

Elemento completo:  $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$  [3]

Sustituyendo [1] y [2] en [3]:

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon}$$

**Ecuación diferencial del  
modelo de Kelvin**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

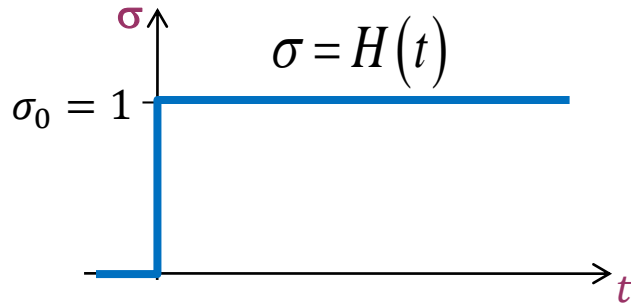
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.)-

(b) Función de Fluencia ( $\sigma_0 = 1$ ):



Ecuación diferencial  
del modelo:

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad H(t) = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \quad [1]$$

Aplicando la transformada de Laplace en [1], se obtiene:

$$\frac{1}{s} = E\bar{\varepsilon} + cs\bar{\varepsilon}$$

Re-escribiendo:  $\frac{1}{cs\left(\frac{E}{c} + s\right)} = \bar{\varepsilon}$

Aplicando la transformada inversa, se obtiene la Función de Fluencia:

$$I(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{c} \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{c}t\right) \right)$$

$\varepsilon \uparrow$   
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

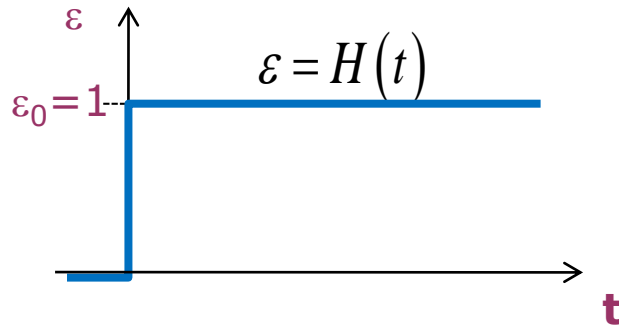
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.)-

(c) Módulo de Relajación ( $\varepsilon_0 = 1$ ):

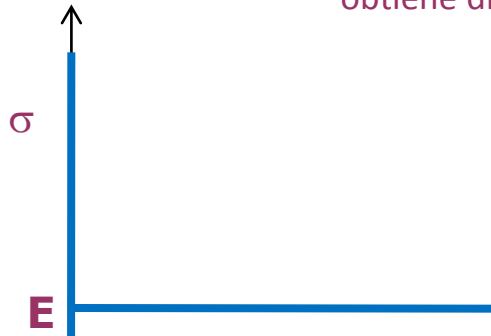


Ecuación diferencial  
del modelo:

$$\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \sigma = EH(t) + c\delta(t) \quad [1]$$

Como [1] ya no es una ecuación diferencial, sino una algebraica, se obtiene directamente el Módulo de Relajación:



$$Y(t) = \sigma(t) = E + c\delta(t) \quad \forall t \geq 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

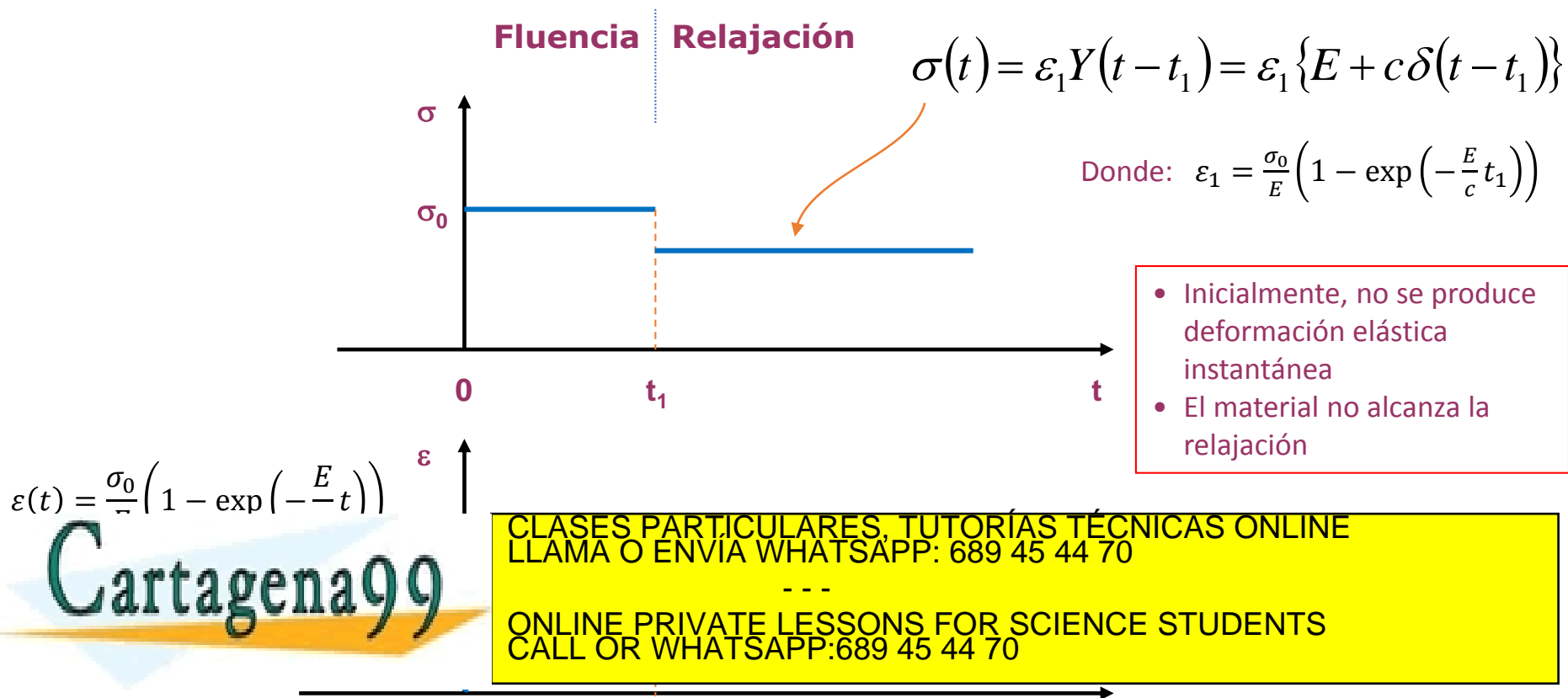
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

### Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.)-

#### (d) Procesos consecutivos de fluencia y relajación: respuesta del modelo

Considérese una barra sometida a tracción en dos fases. En la primera se somete a una tensión constante  $\sigma_0$  y, cuando ha alcanzado una deformación  $\varepsilon_1$ , se fijan los extremos de la barra



# Tema 4

## Viscoelasticidad

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ASPECTOS FENOMENOLÓGICOS
- 3 HERRAMIENTAS
- 4 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y MÓDULO DE RELAJACIÓN
- 5 MODELOS VISCOELÁSTICOS DE MAXWELL Y DE KELVIN-VOIGT
- 6 MODELOS VISCOELÁSTICOS GENERALIZADOS**
- 7 INTEGRALES HEREDITARIAS
- 8 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

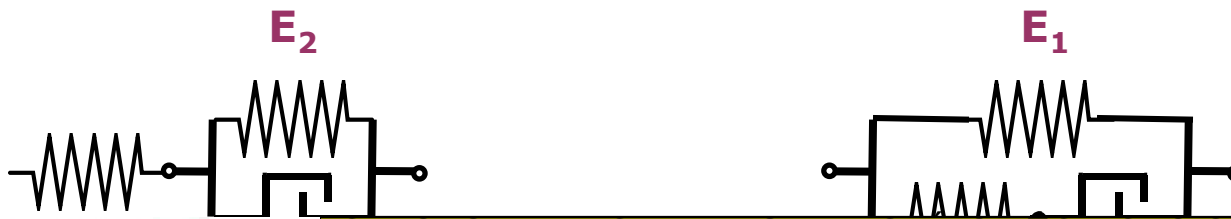
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

### Consideraciones sobre los modelos de Kelvin y Maxwell

- La mayoría de los polímeros no muestran el comportamiento fluido descrito por el modelo de Maxwell, aunque puede ser suficientemente aproximado para algunos compuestos orgánicos (brea caliente).
- Así mismo, el modelo de Kelvin no permite describir la respuesta instantánea del material.
- Por lo tanto, es necesario recurrir a modelos que presenten respuesta instantánea y saturación de la deformación.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

parametros

## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

### “Tiempo” de relajación.-

- El modelo de Maxwell, el de Kelvin-Voigt así como el “Sólido de tres parámetros” y “Sólido de Zener”, presentan un único “tiempo de relajación”  $k$ :

$$k = \frac{c}{E} \quad \Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{E}{c}t\right) = \exp\left(-\frac{1}{k}t\right)$$

- En la práctica, los polímeros muestran una distribución de tiempos de relajación, debido a la diferente longitud de sus cadenas poliméricas.

Por ello se emplean modelos viscoelásticos más complejos, formados por combinaciones de elementos muelle y amortiguador.

Cartagena99

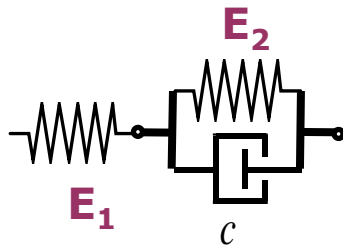
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Ejemplo: Sólido de tres parámetros



$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}$$

Ecuación diferencial

$$p_1 = \frac{c}{E_1 + E_2}$$

$$q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

$$q_1 = \frac{E_1 c}{E_1 + E_2}$$

Función de Fluencia

$$J(t) = \frac{1}{q_0} + \left\{ \frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right\} \exp\left(-\frac{t}{k}\right)$$

Donde:

$$k = \frac{q_1}{q_0} = \frac{c}{E_2}$$

Módulo de Relajación

$$v(t) = \frac{1}{q_1} + \left\{ \frac{q_0}{q_1} - \frac{1}{q_1} \right\} \exp\left(-\frac{t}{k}\right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

### Forme general del modelo constitutivo.-

Son del tipo:

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \dots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} + \dots$$



$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}$$

Si se considera  $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots = 0$  en  $t = 0^-$ , la relación entre tensiones, derivadas de tensión, deformaciones y derivadas de deformación, es del tipo:

$$P[\sigma(t)] = Q[\varepsilon(t)] \quad [1]$$

Siendo  $P[ ]$  y  $Q[ ]$  dos operadores diferenciales del tipo:

$$P[ ] = \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k [ ]}{dt^k} \quad ; \quad Q[ ] = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k [ ]}{dt^k} \quad [2]$$

Aplicando la **transformada de Laplace** en [1], teniendo en cuenta [2], así como las propiedades dadas en la diapositiva [21](#), se tiene:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\sum_{k=0}^m$

$\sum_{k=0}^n$

## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Obtención de  $J(t)$ .-

*Aplicación del modelo en un ensayo de fluencia* ( $\sigma_0 = 1$ )

$$\sigma = \sigma_0 H(t) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$

Para un valor unitario  $\sigma_0 = 1$  :  $\bar{\sigma} = \bar{H} = 1/s$   
 $\bar{\varepsilon} = \bar{J}(s)$

Así, se tiene que

$$\bar{P}(s)\bar{\sigma} = \bar{Q}(s)\bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{J}(s) = \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)} \frac{1}{s}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Obtención de  $Y(t)$ .-

*Aplicación del modelo en un ensayo de relajación*

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t) \rightarrow \sigma = \sigma(t)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) \quad Y(t) \text{ módulo de relajación}$$

$$\bar{P}(s)\bar{\sigma} = \bar{Q}(s)\bar{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}\bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon} = 1/s \quad \longrightarrow \quad \bar{\sigma} = \bar{Y}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)} \frac{1}{s}$$

Se comprueba que:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

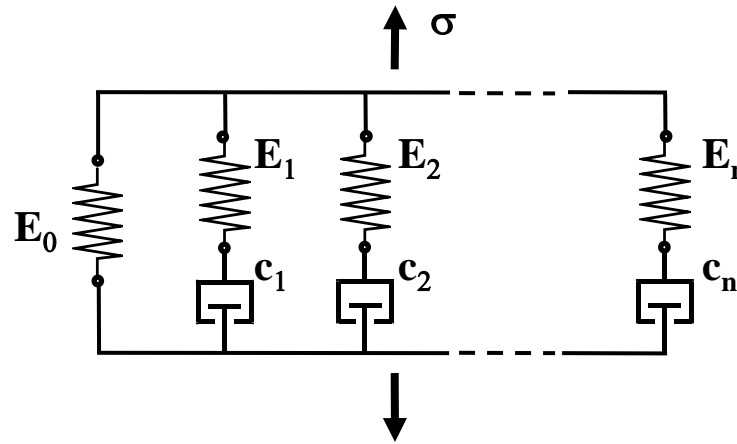
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

## Ejemplo: Modelo de Wiechert (Maxwell generalizado).-

Presenta una distribución más completa de tiempos de relajación



Sumando las tensiones de cada cadena:

$$\bar{\sigma}_e = E_0 \bar{\epsilon} \quad \text{Para el muelle.}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## 4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

### Ejemplo: Modelo de Wiechert (Maxwell generalizado).- (cont.)

Sustituyendo lo anterior, se obtiene:

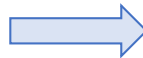
$$\bar{\sigma}(s) = \left\{ E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{E_i s}{(s + E_i/c_i)} \right\} \bar{\varepsilon}(s)$$

Transformada de la Ecuación Constitutiva

Módulo de relajación:

$$\varepsilon = H(t) \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}(s) = \bar{Y}(s)$$

$$\bar{Y}(s) = \frac{E_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{(s + E_i/c_i)}$$

$\mathcal{L}^{-1}[ \ ]$   


$$Y(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{E_i}{c_i} t\right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

---