Universidad Rey Juan Carlos

Tema 6: Recorridos en grafos

Matemáticas Aplicadas al Marketing

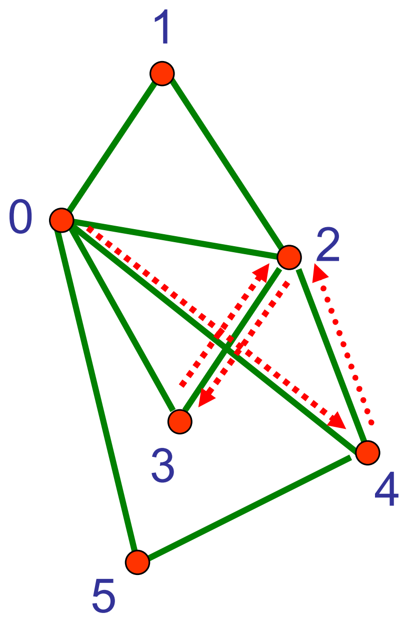
Grado en Marketing

Universidad Rey Juan Carlos

Recorridos en un grafo

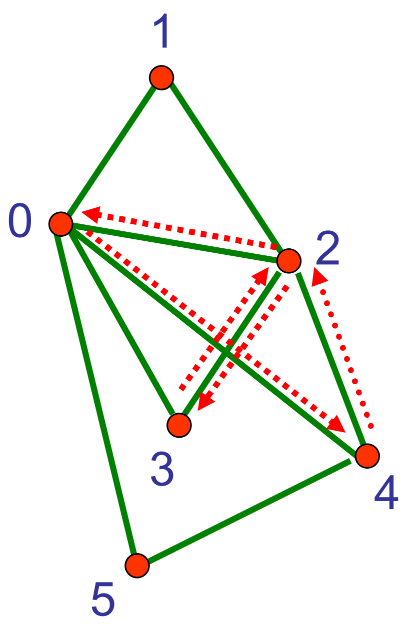
- **Definición: Sea G = (V,E) un grafo. Un <u>recorrido</u> es una sucesión de vértices $v_0,v_1,\ldots,v_n$ de modo que v_i y v_{i+1} son adyacentes.**
  - El recorrido <u>visita</u> los vértices $v_0,v_1,\ldots,v_n$
  - v_0v_1, v_1v_2 ,…, $v_{n-1}v_n$ son las <u>aristas</u> del recorrido
  - <u>Longitud</u> del recorrido = número de aristas del recorrido
  - Camino: recorrido con $v_0,v_1,\ldots,v_n$ distintos entre sí
  - "Recorrido circular": recorrido con $v_0 = v_n$
  - "Camino circular" o "ciclo": recorrido circular ($v_0=v_n$) con $v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}$ distintos entre sí

- **Ejemplo**



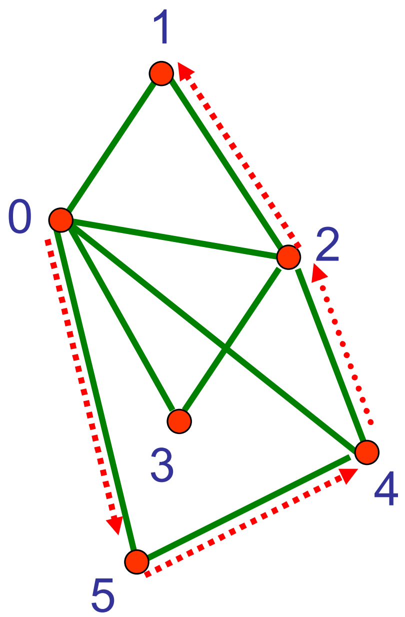
04232 es un recorrido

- **Ejemplo**



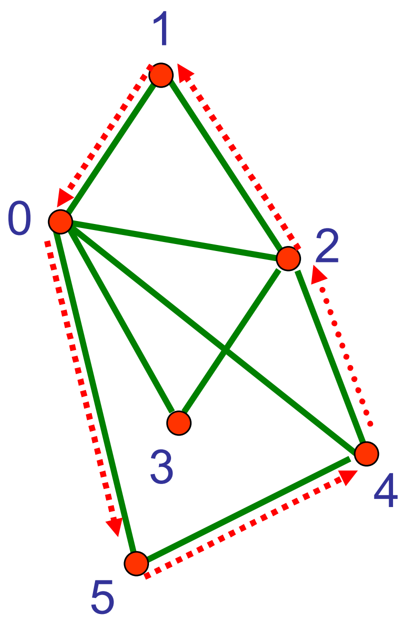
042320 es un recorrido circular

- **Ejemplo**



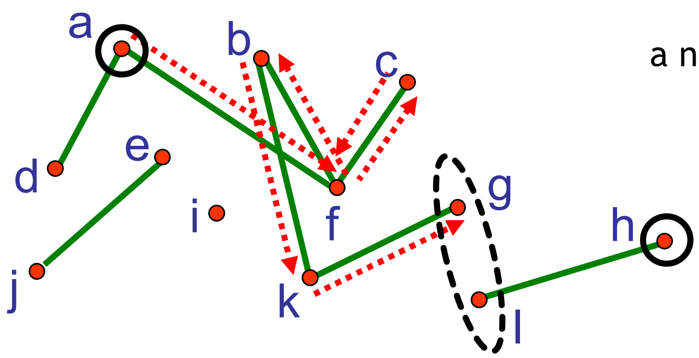
05421 es un camino

- **Ejemplo**



054210 es un camino circular (ciclo)

- **Definición: Sea G = (V,E) grafo, x,y vértices. Decimos que x e y están <u>conectados por un recorrido</u> si existe un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_n$ de modo que v_0 = x y v_n = y.**
- **Ejemplo:**



a conectado con g

a no conectado con h

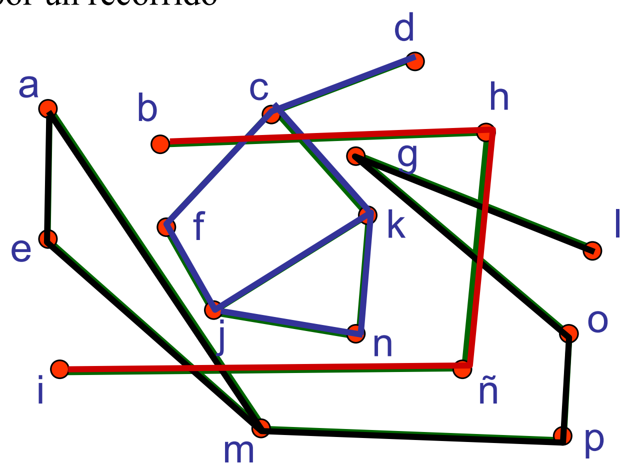
- **Definición: Sea G = (V,E) grafo, x vértice, definimos:**
- **[x] = {vértices y conectados con x } = <u>componente conexa</u> de x**
  - i.e. los vértices conectados con x por un recorrido
- **Ejemplo:**

Componentes conexas:

{a, e, m, p, o, g, l}

{b, h, ñ, i}

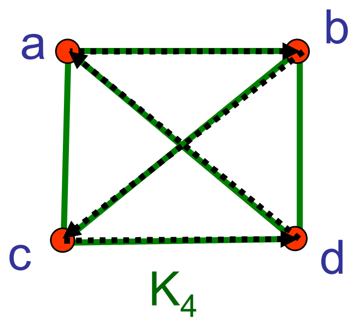
{c, d, f, k, j, n}



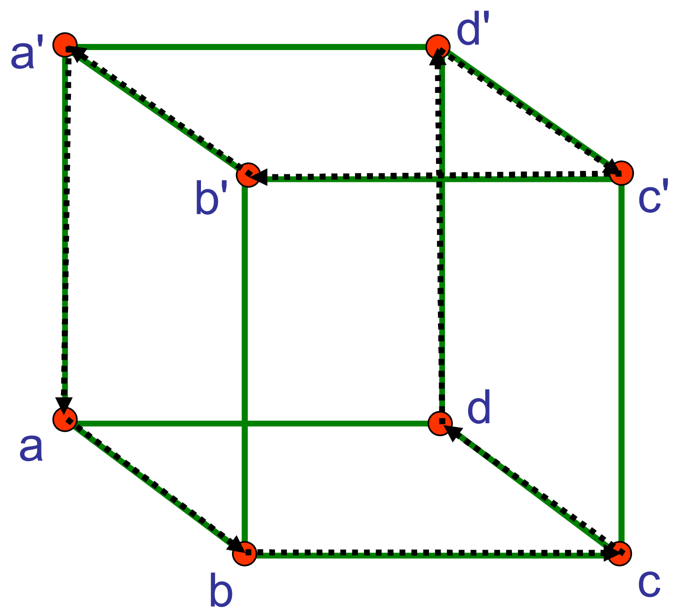
- <u>Definición</u>: Decimos que un grafo es <u>conexo</u> si tiene sólo una componente conexa

- **Definición: Un <u>ciclo hamiltoniano</u> es un ciclo que visita todos los vértices del grafo.**
- **Definición: Un <u>grafo hamiltoniano</u> es un grafo que tiene un ciclo hamiltoniano**
- **Ejemplo:**

Ciclo Hamiltoniano: abcda



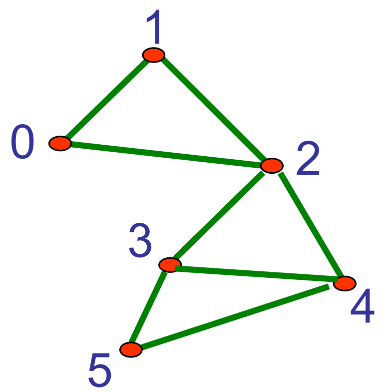
- **Ejemplo:**



Ciclo hamiltoniano: abcdd'c'b'a'a

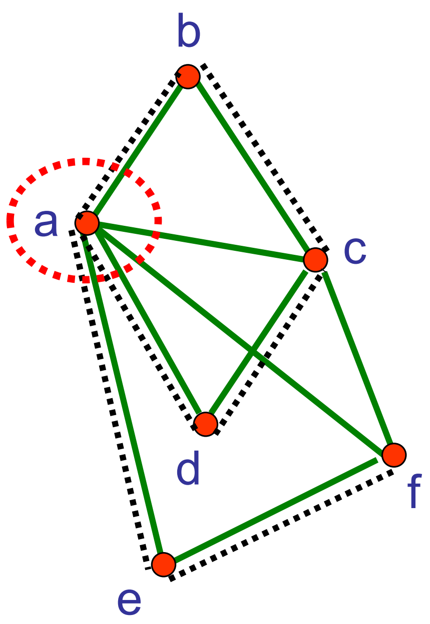
Universidad Rey Juan Carlos

- **Observación:**
  - Hamiltoniano $\Rightarrow$ Conexo
    - no conexo $\Rightarrow$ no hamiltoniano
- **Definición: Sea G = (V,E) grafo conexo, un vértice de G es un <u>vértice de corte</u> si al quitar x (y sus aristas) obtenemos un grafo con dos componentes conexas**
- **Ejemplo:**
  - 2 es un vértice de corte



- **Teorema:**
  - Hamiltoniano $\Rightarrow$ Conexo sin vértices de corte
    - Si tiene vértices de corte entonces NO es hamiltoniano

- **Problema del viajante**



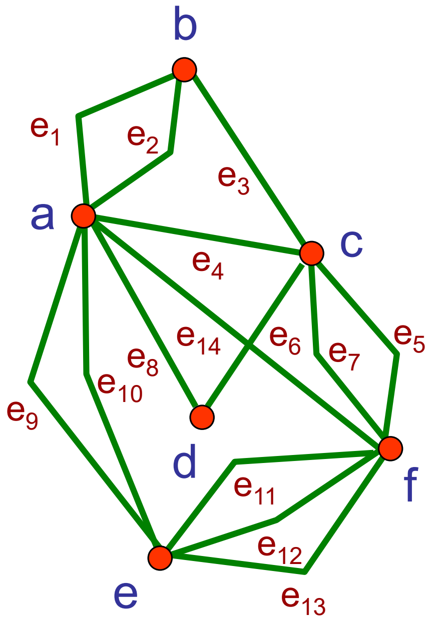
líneas de tren

- Un representante comercial vive en d
- ¿Puede hacer su recorrido diario por todas las ciudades sin pasar dos veces por la misma ciudad?

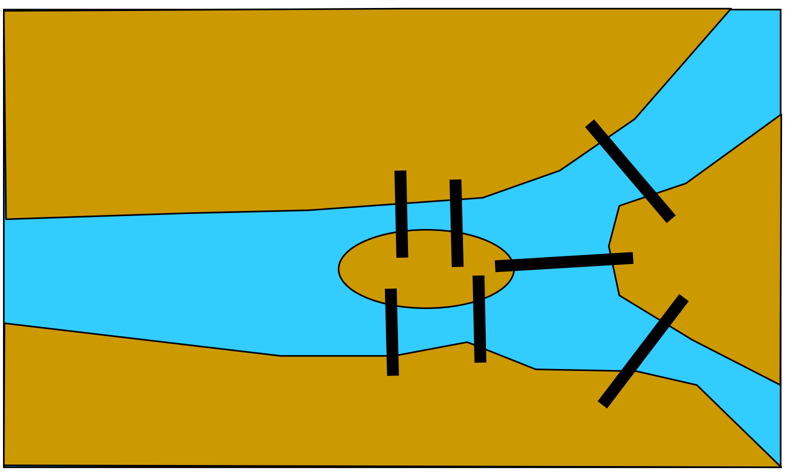
i.e. ¿es el grafo hamiltoniano?

- En este caso no
- Si lo fuese, tendría que tener un ciclo Hamiltoniano
- Este ciclo tendría aristas: ba, bc, ea, ef, da, dc
- Pasaría entonces varias veces por a !¡

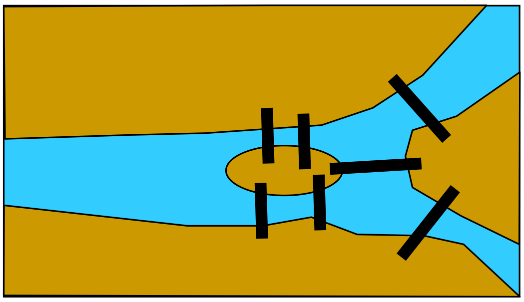
- **Interesante: vértices conectados por varias aristas**
  - pueblos y carreteras
- **Definición: Un <u>multigrafo</u> es un grafo en el que dos vértices pueden estar conectados por varias aristas.**
- **Ejemplo:**
  - Las aristas no quedan determinas por los vértices
  - Necesitan nombres

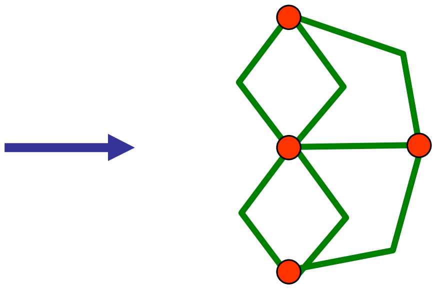


- **El problema de los puentes de Könisberg**
  - Siglo XVIII, Euler visita Könisberg



- Juego: ¿se pueden atravesar los 7 puentes sin repetir?



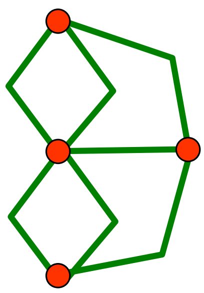


- Juego: ¿se pueden atravesar todas las aristas sin repetir?
- punto "de paso": grado par (pares de llegada+salida)
- al menos dos puntos "de paso"
- todos los vértices grado impar: imposible atravesarlos sin repetir

Grafos eulerianos

- **Definición: Un recorrido en un multigrafo G es euleriano si recorre todas las aristas sin repetir**
  - G semieuleriano si tiene recorrido euleriano
    - No se exige acabar donde empezamos
  - G euleriano si tiene circuito euleriano
    - acabando donde empezamos
- **Observación:**
  - euleriano => semieuleriano

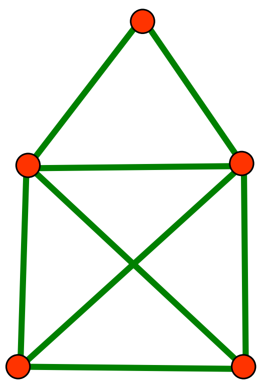
- **Decidir si un grafo es hamiltoniano: muy difícil**
  - no hay algoritmos que operen “en tiempo polinomial”
- **Decidir si un multigrafo es (semi) - euleriano: muy fácil**
- **Teorema: Si G es un multigrafo, entonces**
  - G euleriano <-> todos vértices tienen grado par
  - G semieuleriano <-> o todos vértices tienen grado par o todos los vértices tienen grado par excepto dos
- **Ejemplo:**



– ni euleriano ni semieuleriano

– imposible cruzar puentes sin repetir

- **Ejemplo:**



– ¿Podemos dibujar “la casita” sin levantar el lápiz?

– ¿Empezando y acabando en el mismo vértice?

– Grados: 2, 4, 4, 3, 3

– no euleriano, sí semieuleriano

– se puede, pero no acabando donde empezamos