Límites y continuidad

1. Calcula, por métodos elementales, los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-3}{x^2+1}$ g) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{9+9x}{x-10}}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(px-q)^2}{(p-x)(q-x)}$

2. Para cada una de las funciones del ejercicio anterior, determina los puntos de discontinuidad. ¿Hay algún caso de discontinuidad evitable? ¿Cómo se evitaría?

3. Determina todas las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ c) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ d) $f(x)=\ln(x^2-4)$

e) $f(x)=e^{-x}$ f) $f(x)=e^{1/x}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}$

4. (Sydsaeter, ej 6.8, p. 149) ¿Para qué valores de a es continua en todo punto la siguiente función?

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+4x-1 & \text{si } x\le 1 \\ -x+3 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

5. Determina el valor que ha de tener k para que la función $f(x)=\dfrac{2x^2-3kx+5}{x-2}$ tenga límite cuando x tiende a 2 (es decir, existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$) y calcula el valor que tendrá ese límite.

6. ¿Para qué valores de a es continua en todo punto la siguiente función?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3}, & \text{si } x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

7. Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es ($f(x)$ representa el importe, en euros, de un pedido de x litros de aceite):

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } 0<x<30 \\ 2x+30 & \text{si } 30\le x \end{cases}$$

a) ¿Cuánto cobra por un pedido de 10, 20 y 40?
b) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido?
c) ¿A cuánto sale el litro cuando el pedido es de muchos litros?

8. El coste de producción, en euros, de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $f(x)=100x+500$. Determina la función de coste unitario. ¿A cuánto tiende el coste unitario si el número de unidades fabricadas es muy grande?

Matemáticas para la Empresa. 2018-2019

TEMA 1
Funciones Reales de una variable.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

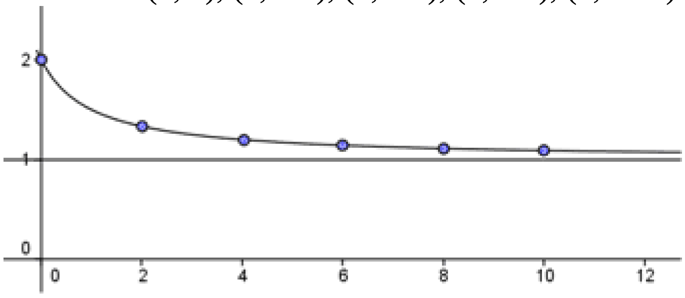
9. La función $P(t)=\dfrac{t+2}{t+1}$, $t \geq 0$, describe la evolución a lo largo del tiempo t (en meses) del precio $P(t)$ (en miles de euros) de cierto aparato electrónico, desde que se puso a la venta ($t = 0$):
a) Representa esa función estudiando sus asíntotas y dando algunos valores. ¿Qué puede deducirse de su gráfica?
b) Halla el precio inicial del aparato y los que alcanzó al cabo de 9 meses y a los 2 años de estar en el mercado. ¿Tiende a estabilizarse el precio alrededor de alguna cantidad con el paso del tiempo?

10. Aplicando el teorema de Bolzano halla un intervalo en el que las siguientes funciones corten al eje de abscisas:
a) $f(x)=x^3+2x+1$ b) $g(x)=x-4\cos x$ c) $h(x)=e^x-3x$

11. Dada la función $f(x)=x^3-3x^2+5$. ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]?

12. Aplicando el teorema de Bolzano, encuentra en el intervalo (2, 3) una raíz aproximada hasta el orden de milésimas de la ecuación $x^3-5x^2+2x+9=0$.

Soluciones:
1. a) 3/5. b) 5/2. c) ∞. d) 1/3. e) –1/2. f) 0. h) 3. i) p^2.
2. a) $x = –3$; $x = 2$. Evitable en 2: $f(2)=3/5$. b) $x = –1$; $x = 1$. Evitable en 1: $f(1)=5/2$.
c) $x = 0$. d) $x = –2/3$; $x = 1$. Evitable en 1: $f(1)=0$. e) $x = 0$; $x > 1$. Evitable en 0: $f(0)=-1/2$.
f) Continua siempre. g) $x \in (–1, 10]$. h) $x = p$; $x = q$.
3. a) AV: $x=-\sqrt{3}$; $x=+\sqrt{3}$. AH: $y = 0$. b) AH: $y = 0$. c) No. d) AV: $x = –2^-$; $x = 2^+$. e) AH: y = 0, hacia +∞. f) AH: $y = 1$, hacia ±∞. AV: $x = 0^+$. g) AV: $x = –1$. AO: $y = x – 1$. h) AO: $y = x + 2$.
4. $a = –1$
5. k = 13/6; 3/2.
6. $a=\dfrac{4}{3}$.
7. a) 30, 60, 110 €. b) Si. c) 2 €.
8. $u(x)=100+\dfrac{500}{x}$. A 100 €.
9. a) AH: $y = 1$. Algunos valores: (0, 2); (2, 4/3); (4, 6/5); (6, 8/7); (8, 10/9).



b) $P(0) = 2$; esto es, 2000 euros. $P(9) = 11/10 = 1,1$: 1100 euros. Tiende a 1000 €.
10. a) (–1, 0); b) (0, π/2); c) (0, 1).
11. Si. (*Sugerencia*: Considera la función $g(x)=f(x)-\sqrt{2}$). 10. x_0 = 2,175
12. x_0 = 2,175

Preguntas de tipo test propuestas en exámenes anteriores

1. El dominio de $f(x) = \dfrac{x \cdot senx}{2 - \cos 2x}$ es:

a) (-4, 0)∪(0, +4).
b) (-4, π/2)∪(π/2, +4). **c) R**.

2. La función $f(x) = 6x + \dfrac{a}{(3-x)^2}$, $a \neq 0$, tiene:
a) Una asíntota oblicua y una horizontal.
b) Una asíntota vertical y una oblicua.
c) Ninguna de las anteriores.

3. (S/98). La función $f(x) = 2x + \ln(5 + x)$, tiene una asíntota:
a) Oblicua b) Horizontal. **c)** Vertical.

4. (E/03) La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8}$ es discontinua en $x = 1$. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:
a) $f(1) = 2/9$; b) $f(1) = 1$
c) Ninguna de las anteriores.

5. (S/00). La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq a \\ a + 2 & x > a \end{cases}$

a) Es discontinua en $x = a$, para cualquier valor de a.
b) Es continua en $x = a$ sólo si $a = 2$.
c) Ninguna de las anteriores.

6. (F/02) La función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x - 1}$ tiene y:
a) Una asíntota vertical y otra horizontal.
b) Una asíntota oblicua: la recta $y = 2x + 3$.
c) Ninguna de las anteriores.

7. (S/02) Para la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ puede afirmarse que:
a) Tiene una asíntota horizontal y otra vertical.
b) Tiene una asíntota horizontal y otra oblicua.
c) Ninguna de las anteriores.

8. (S/02) La función $f(x) = e^{-x} + 2x + p$ corta dos veces al eje OX en el intervalo [–2, 1]:
a) Si p es negativo.
b) Si $p = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

9. (E/03) 6. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]:
a) Cualquiera que sea el valor de p.
b) Si $p = 5$.
c) Ninguna de las anteriores.

10. La ecuación $e^{\cos x} - \text{sen}\, x + x - 3{,}2 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo:
a) Entre 0 y π/2 radianes.
b) Entre 0 y π radianes.
c) Ninguna de las anteriores.