UNIVERSIDAD NEBRIJA

HOJA

Derivadas

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3-ax^2, & \text{si } x\le 1 \\ 2/(ax), & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores del parámetro a es continua? b) ¿Para qué valores de a es derivable?

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\,\text{sen}\,x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de los parámetros a y b es continua la función $f(x)$?

b) Determina a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$.

3. Calcula, simplificando el resultado, la derivada de la función: $f(x)=\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

4. Deriva y simplifica: a) $y=\sqrt{(x^2+5x)^3}$ b) $y=\sqrt[3]{(5x^2-2x)^2}$

5. Para las funciones del problema anterior, indica los puntos en los que la derivada vale 0.

6. Deriva: a) $f(x)=x^2\ln(3x-4)$ b) $f(x)=(x-1)\ln(x^2-1)$ c) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^3}$

7. Deriva: a) $y=2^{3x^2-1}$ b) $y=e^{-x^2+3}$ c) $y=x^2e^{2x+1}$ d) $y=\dfrac{e^x}{x+2}$

8. Si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=senx^2$ halla la derivada de las funciones $F(x)=f(g(x))$ y $G(x)=g(f(x))$, aplicando la regla de la cadena.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^2+3x$ en el punto $x = -1$. Representa gráficamente la curva y la tangente.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$.

11. Halla los puntos de la curva $y=x^3-2x$ en los que su tangente tiene pendiente 1. Halla la ecuación de esas tangentes.

12. Comprueba que, en el punto $x = 1$, la función $y=\sqrt{x}$ puede aproximarse por la recta $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$. Utiliza ese resultado para hallar la raíz cuadrada de 1,1.

13. Calcula la diferencial de la función tag x en el punto $\dfrac{\pi}{4}$ para $\Delta x = dx = 0{,}01$.

14. Halla la derivada n-ésima de $f(x)=\ln x$.

15. Deriva: a) $y=2^{x^2-3}$ b) $y=3^{2x-x^2}$ c) $y=e^{-x+3}$ d) $y=2e^{5x}$ e) $y=(2x+1)e^{2x+1}$

16. Deriva: a) $y=\dfrac{e^x}{x}$ b) $y=\dfrac{x}{e^x}$ c) $y=\dfrac{3e^x}{2x+1}$ d) $y=\dfrac{xe^x}{1-x}$ e) $y=e^{\sqrt{x}}$ f) $y=\sqrt{e^x}$

17. Halla la diferencial de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+1$ b) $f(x)=x^2+3x$ c) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ d) $f(x)=x^3-2x$

¿Cuánto vale esa diferencial cuando, en $x = 1$, $dx=0{,}1$?

18. El coste de producción, en euros, de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $f(x)=30x+40\sqrt{x}+500$.

a) Si la empresa produce 100 unidades, ¿cuál es el incremento de coste de la unidad 101?

b) Compara dicho incremento con el coste marginal en $x = 100$.

19. Los costes de fabricación de un ordenador vienen dados por la función $C(x)=x^2+40x+30000$, siendo x el número de ordenadores fabricados.

Si cada ordenador se vende por 490 €, halla:

a) La función de beneficios.

b) Las funciones de coste, ingresos y beneficios marginales. ¿Qué valor toman cuando $x = 100$, 200 y 300? Interpreta esos resultados.

c) ¿Cuándo aumentan y disminuyen los beneficios? ¿Cuántos ordenadores se deben fabricar y vender para que los beneficios sean máximos?

20. Para las funciones definidas implícitamente, halla la derivada, $y´$, en los puntos que se indica:

a) $2x^2+6xy=0$, en (3, –1) b) $2x^2-xy^2+y^3=2$, en (1, 1)

Ejercicios de tipo test propuestos en exámenes anteriores

1. La función $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{para } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{para } x>0 \end{cases}$, en el punto $x = 0$ es:

a) Derivable pero no continua. **b)** Continua pero no derivable. c) Continua y derivable.

2. La función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ es derivable en $x = 2$ si:

a) $b = –2a$ **b)** Sólo si $a = –2$ y $b = 4$ c) Ninguna de las anteriores.

3. Dada la función $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$:

a) La recta $r_1: y=x+2$, es tangente a la curva $y=f(x)$ en algún punto.

b) La recta $r_2: y=7x-2$, es tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (1, 5).

c) Ninguna de las anteriores.

4. Dada $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$, los valores de $f´(1)$ y $f´´(1)$ son, respectivamente:

a) 1 y 14 b) –1 y 4 **c)** –1 y –21/4

5. La ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$ es:

a) $y=\dfrac{1}{2}x$ **b)** $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$ c) $y = 2x$

Soluciones:

1. a) 1 o 2; b) 1.

2. b = 5; a = 2.

3. $\frac{2}{senx}$

4. a) $y' = \frac{3}{2}(2x+5)\sqrt{x^2+5x}$. b) $y' = \frac{2(10x-2)}{3\sqrt[3]{5x^2-2x}}$.

5. a) Nunca; b) 1/5.

6. a) $2x\ln(3x-4)+\frac{3x^2}{3x-4}$; b) $\ln(x^2-1)+\frac{2x}{x+1}$; c) $\frac{2x^2-3(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^4(x^2-1)}$

7. a) $y' = 6x{\cdot}2^{3x^2-1}\ln 2$; b) $y' = -2xe^{-x^2+3}$; c) $y' = 2x(1+x)e^{2x+1}$; d) $y' = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$

8. l. $4xsenx^2\cos x^2$; $4x(x^2+1)\cos(x^2+1)^2$.

9. $y = x-1$.

10. $y = -\frac{1}{4}x+2$)

11. $y = x + 2$ e $y = x - 2$.

12. $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}05$.

13. 0,02.

14. $f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$

15. a) $2x{\cdot}2^{x^2-3}\ln 2$; b) $(2-2x){\cdot}3^{2x-x^2}\ln 3$; c) $-e^{-x+3}$; d) $10e^{5x}$ e) $(4x+4)e^{2x+1}$

16. a) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$; b) $\frac{1-x}{e^x}$; c) $\frac{(6x-3)e^x}{(2x+1)^2}$; d) $\frac{(1+x-x^2)e^x}{(1-x)^2}$; e) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$; f) $\frac{1}{2}e^{x/2}$

17. a) $df(x) = 2xdx$. b) $df(x) = (2x+3)dx$. c) $df(x) = \left(-\frac{4}{x^2}\right)dx$.

d) $df(x) = (3x^2-2)dx$. Respectivamente: 0,2; 0,5; –0,4; 0,1.

18. a) 31,995 €. b) $f'(100) = 32$.

19. a) $B(x) = -x^2+450x-30000$. b) $C'(x) = 2x+40$; $I'(x) = 490$; $B'(x) = -2x+450$. Para x = 100: C' = 240, I' = 490, B' = 250 → $B' > 0$ ⇒ es rentable aumentar la producción una unidad más. Para x = 200: C' = 440, I' = 490, B' = 50 → $B' > 0$ ⇒ es rentable aumentar la producción una unidad más. Para x = 300: C'= 640, I' = 490, B' = –150 → $B' < 0$ ⇒ no es rentable aumentar la producción.

c) Los beneficios aumentan hasta x = 225; disminuyen cuando x > 225.

20. a) $4x+6y+6xy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+3y}{3x} \to y'(3,-1) = -1/3$.

b) $4x-y^2-2xyy'+3y^2y'=0 \Rightarrow y' = -\frac{4x-y^2}{-2xy+3y^2} \to y'(1,1) = -3$.