

## Fundamentos de Matemáticas.

### *Nota sobre relaciones de congruencia*

Fijado un número  $n \neq 0$  de  $\mathbb{Z}$ , se dice que  $x, y \in \mathbb{Z}$  son congruentes módulo  $n$ , y se escribe  $x \approx y$ , si  $x - y$  es divisible por  $n$ . La relación "x congruente con y módulo n" es una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$  (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), y por tanto determina en  $\mathbb{Z}$  una partición, cuyos elementos, es decir, las clases de equivalencia, constituyen el conjunto cociente  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ . Es obvio que al dividir por  $n$  cualquier elemento perteneciente a una determinada clase, el resto de la división es el mismo y por tanto podemos representar la clase por el resto. Por ejemplo, si  $n = 4$ , la relación define en  $\mathbb{Z}$  cuatro clases que podemos representar por 0, 1, 2, 3.

Además es claro que si  $x \approx y$  y  $x' \approx y' \pmod{n}$ , entonces  $x \pm x' \approx y \pm y'$  y  $xx' \approx yy' \pmod{n}$ , entonces, si representamos por  $C(x)$  la clase de equivalencia a la que pertenece  $x$ , resulta que

$$C(a) + C(b) = C(a + b) \quad \text{y} \quad C(a) \cdot C(b) = C(ab)$$

Como consecuencia de las propiedades del anillo  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  se obtiene

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

tiene tres elementos  $[0]$ ,  $[1]$ ,  $[2]$  que se pueden "identificar", cada uno, con los conjuntos de números que tienen igual resto al dividir por 3. Más específicamente como aquellos elementos cuya diferencia es múltiplo de 3

- $[0] = \{3z : z \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$
- $[1] = \{3z + 1 : z \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 4, \pm 7, \pm 10, \pm 13, \pm 16, \dots\}$
- $[2] = \{3z + 2 : z \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 2, \pm 5, \pm 8, \pm 11, \dots\}$

Así la clase de equivalencia  $[0]$  se corresponden con aquellos números  $\{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$  que tienen resto 0 al dividir por 3. Como es una relación binaria de equivalencia <sup>1</sup> cualquier elemento del conjunto puede ser un representante del mismo. Es decir

$$[0] = [3] = [6] = \dots$$

$$[1] = [4] = [7] = \dots$$

Teniendo en cuenta esto, para dicho conjunto se puede definir una operación "suma" sin más que sumar directamente los representantes

$$[m] + [n] := [m + n],$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

mismo resto que el número  $m + n$  . Un ejemplo

$$[1] + [2] = [1 + 2] = [3] = [0]$$

Lo que quiere decir que la suma de dos números que tiene resto 1 sumado por otro que tenga resto 2 al dividir por 3 da necesariamente un número que tiene resto 0 al dividir por 3. Por ejemplo  $1+11 = 12$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**