Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra I. Curso 2017-18

Lunes 22 de enero.

APELLIDOS: ____________________

NOMBRE: ____________________ GRUPO: ____________________

Problema 1. (1 punto)

1. Determina las raíces reales o complejas del polinomio $x^6 + 2x^3 + 1$ indicando sus mutiplicidades.
2. Factoriza el polinomio anterior en polinomios reales irreducibles.

Problema 2. (2 puntos)

Encuentra una base y ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$ con los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0\}$ y $S_2 = \langle (-1, 1, 2, -2), (1, -1, 1, -1) \rangle$.

Problema 3. (2 puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por

$$f(1) = I, \; f(x) = A, \; f(x^2) = A^2$$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Encuentra bases del nucleo y de la imagen de f.

Problema 4. (2 puntos)

Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Donde a y b son parmetros reales

a) Halla los valores de a y b para los que f es diagonalizable.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado a), encuentra una base diagonalizante para f, la matriz de cambio entre ella y la canónica y escribe la fórmula que relaciona la matriz de f en la nueva base con la matriz de f en la base canónica a través de la matríz de cambio.

Problema 5. (1 punto)

Decide si existe o no una aplicaciión lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ que satisface

$$f(1,2,3) = (1,0,1,-1),\ f(-1,0,-1) = (-1,1,0,1),\ f(-1,2,1) = (-1,2,1,1),\ f(1,1,1) = (1,1,1,1).$$

Problema 6. (2 puntos)

Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sean U_1, U_2 y U_3 tres subespacios de V. Si
$$V = U_1 + U_2 + U_3 \text{ y } \dim_K V = \dim_K U_1 + \dim_K U_2 + \dim_K U_3.$$
entonces la suma $U_1 + U_2 + U_3$ es directa.
2. Sean $f : V \to U$ y $g : U \to W$ dos aplicaciones lineales. Entonces
$$\operatorname{rg}(f \circ g) = \min\{\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\}.$$
($\operatorname{rg}(f)$ denota el rango de la aplicación f)
3. Sean $f : V \to U$ y $g : U \to W$ dos aplicaciones lineales. Entonces
$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f).$$
4. Sea A una matriz cuadrada real. Suponemos que $A^2 + A + 1 = 0$. Entonces A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.