PEC AI 2016-17

1. Expresar en forma de intervalos el siguiente conjunto de números reales $\{x \in \mathbb{R} : |(x^2 + 6x - 1)/(x + 3)^2| < 1\}$.
(v. 1p)

2. Sea $z \in \mathbb{C}$ el punto del plano complejo $z = (24 + 23i)/(10 - 5i) + (1/5)i$. Calcular $z^{2/3}$.
(v 1p)

3. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} sen(x)/|x| & \text{si} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right\}$$

(v. 2p)

4. Un terreno está delimitado en el sur por la parábola $x^2 = 4y$ y por el norte por la recta $y = 6$. Si hay un pozo en el punto $(0, 3)$ dar los puntos del perímetro más cercanos y los más alejados del pozo (indicación: si $(f(x))^2$ tiene un extremo en $x = x_0$, entonces la función $f(x)$ también tiene un extremo en $x = x_0$).
(v. 2p)

5 Calcular el área de la región limitada por $y = x^{1/3}$ y la componente de $y = tan(\pi x/4)$ que pasa por el origen.
(v. 2p)

6. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\cos(x)|dx$.
(v.1p)

7- Supongamos que la ecuación de van der Waals para un gas específico es $(P + 5/V^2)(V - 0.03) = 9.7$ considerando el volumen V como función de la presión P, usar la derivación implícita para hallar la derivada dV/dP en $(V, P) = (5, 1)$.
(v. 1p)

PEC AI 2016-17

1) $\{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2} \right| < 1 \}$

$\left|\frac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x^2+6x-1| < (x+3)^2 \Leftrightarrow -(x+3)^2 < x^2+6x-1 < (x+3)^2$

$-x^2-6x-9 < x^2+6x-1 \Leftrightarrow 2x^2+12x+8 > 0 \quad \begin{cases} x < -3-\sqrt{5} \\ x > -3+\sqrt{5} \end{cases}$

$x^2+6x-1 < x^2+6x+9$

$x \in \boxed{\begin{cases} (-\infty, (-3-\sqrt{5})) \\ ((-3+\sqrt{5}), \infty) \end{cases}}$

2) $z = \frac{24+23i}{10-5i} + \frac{1}{5}i \quad , \quad z^{2/3}$

$z = \frac{24+23i}{10-5i} + \frac{1}{5}i = \frac{(24+23i)(10+5i)}{125} + \frac{1}{5}i = 1+3i = \sqrt{10}\,e^{i\theta}$

con $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{1}\right)$.

$z^2 = 10\,e^{i2\theta}$. Las raíces cúbicas de z^2 son

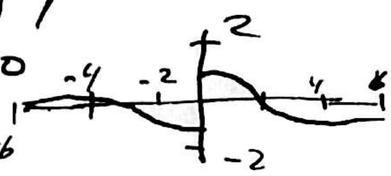
$z_0 = \sqrt[3]{10}\,e^{i\frac{2\theta}{3}}$, $z_1 = \sqrt[3]{10}\,e^{i\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$, $z_2 = \sqrt[3]{10}\,e^{i\left(\frac{2\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

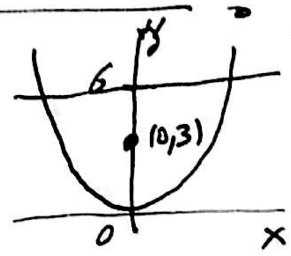
Si $x \neq 0$ la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$ es continua, por estar definida como cociente de funciones continuas.
Para $x=0$, se tiene $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, si es continua

pero en este caso $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-x} = -1 \end{cases}$

Luego no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y por lo tanto f presenta una discontinuidad de salto en $x=0$



4) $x^2=4y$
$y=6$



$$f(x,y)=d((x,y),(0,3))=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Se busca los máximos y mínimos de la función $f(x)^2$ con las condiciones $y=\frac{x^2}{4}$ y $y=6$

En la recta $f(x,6)=x^2+3^2=x^2+9=g(x)$

$$g'(x)=2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (x,y)=\boxed{(0,6)}$$

En la parábola

$$f\left(x,\frac{x^2}{4}\right)=x^2+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)^2=h(x)$$

$$h'(x)=2x+2\left(\frac{x^2}{4}-3\right)\frac{2x}{4}=2x+\left(\frac{x^2}{4}-3\right)x$$

$$=x\left(2+\frac{x^2}{4}-3\right)=x\left(\frac{x^2}{4}-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0,\ x=\pm 2 \Rightarrow \boxed{(0,0),\ (2,1),\ (-2,1)}$$

puntos de intersección

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{4} \\ y=6 \end{array}\right\} x^2=24,\ x=\pm\sqrt{24}=\pm 2\sqrt{6} \Rightarrow y=6$$

Luego $f(0,6)=f(0,0)=9$

$f(2,1)=f(-2,1)=8$

$f(2\sqrt{6},6)=f(-2\sqrt{6},2)=33$

Luego $(2,1)$ y $(-2,1)$ son los puntos más cercanos al foco y los puntos $(2\sqrt{6},2)$ y $(-2\sqrt{6},2)$ los más lejanos

5)

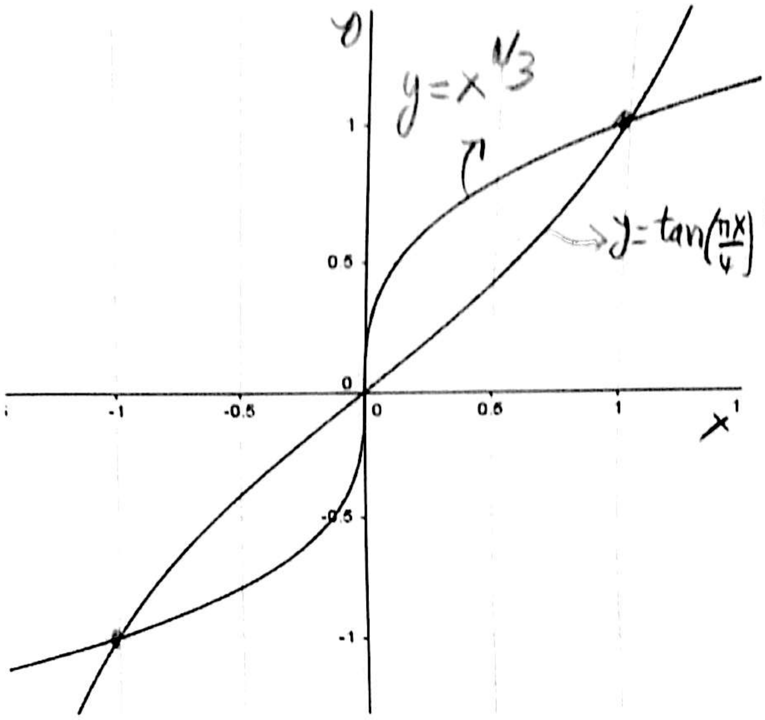
$x^{1/3} = \tan(\pi x/4) \Rightarrow$

$x = \pm 1$

Area $A = 2\int_0^1 \left(x^{1/3} - \tan\frac{\pi x}{4}\right)dx$

$= 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{4}{\pi}\ln\left|1+\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)^2\right|\right)\Big|_0^1$

$= \boxed{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\ln 2}$



---

6) $\int_0^{3\pi/2} |\cos(x)|\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(x)\,dx$

$= \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} - \sin(x)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \boxed{3}$

---

7) $(P+5/V^2)(V-0.03) = 9.7$

$\frac{dV}{dP}(5,1) = \frac{0.03 - V}{-10V^{-3}(V-0.03)+P+5V^{-2}}\Bigg|_{(\cancel{5,1})} = \boxed{-\frac{0.97}{0.3}}$

$V(P)$

$V=1,\ P=5,\ (1,5)$
