Grado en Ingeniería de Telecomunicaciones, curso 2018-19
Probabilidad y Estadística — Hoja 4

Varias variables aleatorias y teorema central del límite

Cálculos con varias variables aleatorias

1. La función de masa conjunta de dos variables X e Y viene dada por

	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	c	$4c$
$X=0$	$2c$	$8c$
$X=1$	$3c$	$12c$

a) Calcula el valor de c.
b) Calcula $\mathbf{P}(X<Y)$ y $\mathbf{E}(X)$.
c) Decide y justifica si las variables X e Y son independientes o no.

2. Se tiran dos dados. Consideramos las variables aleatorias X, que es el número de puntos del primer dado, e Y, que es el número mayor de puntos de los dos obtenidos.
a) Halla la función de masa conjunta y las marginales.
b) Calcula las probabilidades de los distintos valores de X si sabemos que $Y=4$.

3. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias. Calcula la varianza de $X+Y+Z$ (en términos de las varianzas de cada variable y las posibles covarianzas).

4. Dos sustancias A y B se encuentran en la sangre en cantidades X e Y respectivamente. Estas cantidades varían de un individuo a otro. La densidad conjunta de estas cantidades es

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{81}\,xy^2, & \text{si} \quad x,y\in(0,3);\\ 0, & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

(a) Halla la densidad marginal, la media y la desviación típica de Y.
(b) Halla la probabilidad de que, en un individuo tomado al azar, haya más sustancia A que B.

5. Un vector aleatorio (X,Y) tiene función de densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} C\,(x^2+y^2) & \text{si } x\in[0,1] \text{ e } y\in[0,2];\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Halla la probabilidad de que $X<Y$.

6. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad |y|<x<1;\\ 0, & \text{en caso contrario}\,.\end{cases}$$

(a) Comprueba que f es una función de densidad.
(b) Halla las medias de X e Y. Calcular las funciones de densidad marginales.
(c) Halla $\mathbf{P}(X < 0.5, Y < 0)$, $\mathbf{P}(X > 0.5, -0.5 < Y < 0.5)$, $\mathbf{P}(X < 0.5)$ y $\mathbf{P}(Y < 0.5)$.

7. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x+xy) & \text{si } (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(a) Calcula las esperanzas $\mathbf{E}(X)$ y $\mathbf{E}(Y)$.
(b) Calcula la covarianza entre X y Y. ¿Son incorreladas?

8. El vector aleatorio (X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcula $\mathbf{P}(Y > X^2)$.

9. Se sortean (uniformemente) puntos en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y se miden sus distancias (al cuadrado) al origen. ¿Cuál será la media de esas medidas?

Cálculos con el TCL

10. Tiramos 400 veces una moneda.
(a) Halla la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 160 y 190.
(b) Halla el intervalo de la forma $(200 - a, 200 + a)$, tal que la probabilidad de que el número de caras obtenido esté en dicho intervalo sea del 95%.

11. Una compañía de seguros tiene 10 000 asegurados. Ha estimado que el pago anual X a cada uno de ellos es una variable aleatoria con valores 0, 1 y 100 (euros) y probabilidades 70%, 25% y 5%, respectivamente. ¿Cuál es el montante de pago que espera hacer al cabo del año? Calcula (aproximadamente) la probabilidad de que ese pago total no supere los 80 000 euros.

12. Se lanza un dado (regular) 12 000 veces. Sea S el número de veces que aparece el 6. Calcula la probabilidad de que S esté entre 1900 y 2200.

13. Se lanza 10000 veces un dado (regular). En cada lanzamiento ganamos 1 euro si sale una puntuación impar, 2 euros si sale 2 ó 4; y 5 euros si sale un 6. ¿Cuál es la probabilidad que acabemos el juego con una fortuna de 22000 euros o más?

14. Disponemos de un dado en el que la probabilidad de cada cara es proporcional al número de puntos inscrito en ella. Lo lanzamos n veces y llamamos T_n al promedio de puntos obtenidos. Usando el teorema central del límite, determina el mínimo número de lanzamientos n para el que la probabilidad de que T_n esté entre $116/27$ y $118/27$ sea del 95%. Dato: $\Phi^{-1}(97.5\%) = 1.96$.