E1: Dos superficies esféricas conductoras concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El conductor 1 está cargado con Q_1 mientras que el 2 está cargado con Q_2. Se pide calcular:

a) El potencial de cada uno de los conductores.
b) El trabajo que se ha efectuado al cargar el conductor 1 con Q_1 y el conductor 2 con Q_2

Solución: $V_1 = k(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2})$ $\quad V_2 = k(Q_1 + Q_2)\frac{1}{R_2}$ $\quad W = \frac{1}{2}k\left(\frac{Q_1^{\ 2}}{R_1} + \frac{2Q_1Q_2}{R_2} + \frac{Q_2^{\ 2}}{R_2}\right)$

E2: En el plano *XY*, se tiene un disco de radio *R* cargado con densidad superficial de carga uniforme σ centrado en el origen.

a) Calcular el potencial del disco en un punto genérico del eje Z, a partir del potencial que crea un anillo de carga q_{anillo} de radio *r* en un punto del eje Z.
b) Calcular el campo del disco en un punto genérico del eje Z deduciéndolo a partir del potencial hallado en el apartado anterior.

Solución: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(R^2+z^2)^{1/2} - z\right]$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]\vec{k}$

E3: Si el campo eléctrico es $\vec{E} = 6x^2\,\vec{i}$ (el campo en *V/m* y la posición en *m*), calcular la diferencia de potencial $\Delta V = V_2 - V_1$ entre los puntos $\vec{r}_1 = 1\,\vec{i}$ y $\vec{r}_2 = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ (coordenadas en *m*)

Solución: $V_2 - V_1 = -52V$

E4: Se tiene una distribución de carga con simetría esférica, centrada en el origen de coordenadas. Se sabe que el potencial depende de la distancia al origen según la expresión $V(r) = r^2 + 4$ (el potencial en V y la distancia en *m*). Se pide calcular:

a) el campo eléctrico en todos los puntos del espacio, indicando si es saliente o entrante.
b) la carga encerrada por una superficie esférica de radio $r = 5m$, indicando si es positiva o negativa.

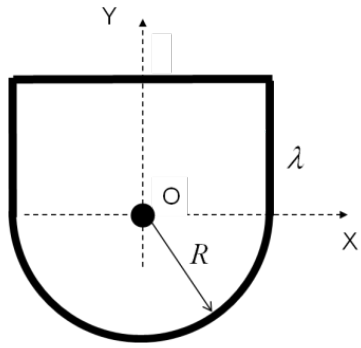
Solución: $E_r = -2r$ (entrante) $\quad q = 27nC$

E5: Dos superficies esféricas concéntricas de radios *3m* y *5m* están cargadas con cargas $-Q$ y $3Q$, respectivamente. Se pide calcular:

a) diferencia de potencial entre las superficies, indicando cuál está a un potencial mayor.
b) energía electrostática del conjunto.
c) carga que debe tener una tercera superficie de radio $r = 4m$ para que la diferencia de potencial entre las dos superficies originales sea cero.

Solución: $V_3 - V_5 = -kQ\frac{2}{15}$ $\quad U = kQ^2\frac{7}{15}$ $\quad q = \frac{8}{3}Q$

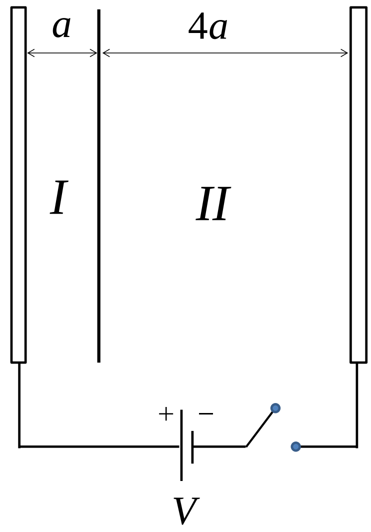
E6: La figura muestra un cable no conductor cerrado cargado con densidad lineal de carga uniforme λ. El cable está formado por un semicírculo de radio *R* y medio cuadrado de lado *2R*.
Calcular el trabajo que cuesta traer una carga *Q* desde el infinito hasta el centro del cable cerrado O.



Datos: $\varepsilon_o, \lambda, R, Q$

Solución: $$W = \frac{Q\lambda}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

E7: La figura muestra dos placas planas <u>conductoras</u>
de grosor despreciable y área *S*, separadas una distancia *5a*, cargadas inicialmente, cada una de ellas, con una carga *Q*.
Entre las mismas se ha situado una lámina <u>no conductora</u> cargada con una carga *-Q*.
La batería que se muestra se encuentra inicialmente desconectada, con el interruptor abierto.
Las dimensiones de las placas y de la lámina son muy grandes comparadas con la distancia *a*, de tal forma que pueden considerarse como superficies planas infinitas.
Se pide calcular el campo eléctrico en las regiones *I* y *II* en las siguientes condiciones:



a) Con el interruptor abierto.
b) Con el interruptor cerrado.

<u>**Nota**</u>**:** Expresar las dos respuestas en función de los siguientes datos

Datos: $a, \sigma = Q/S, V, \varepsilon_0$

Solución: a) $\vec{E}_I = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$ $\quad \vec{E}_{II} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$ b) $\vec{E}_I = \frac{1}{5}\left(\frac{V}{a} + \frac{4\sigma}{\varepsilon_0}\right)\vec{i}$ $\quad \vec{E}_{II} = \frac{1}{5}\left(\frac{V}{a} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\vec{i}$

E8: Una esfera maciza conductora de radio R_1, se rodea de una superficie esférica no conductora concéntrica de radio R_S y cargada con una carga Q_S. Ambas están a su vez rodeadas de una corteza esférica conductora con espesor no despreciable, de radio interno R_2 y externo R_3.

$$R_1 < R_S < R_2 < R_3$$

a) Se carga la esfera conductora con una carga *Q* y la corteza conductora con –*Q*. Calcular el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.

b) Partiendo de la distribución indicada en el apartado anterior, se conectan eléctricamente la esfera y la corteza (se conectan ambos conductores mediante un cable que pasa por un pequeño orificio practicado en la superficie no conductora y que no altera la simetría del problema). ¿Cuál es la nueva distribución de cargas? Justifica tu respuesta.

Solución: $E = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r^2} & R_1 < r < R_S \\ \dfrac{k(Q+Q_S)}{r^2} & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{kQ_S}{r^2} & R_3 < r \end{cases}$ carga $\begin{cases} Q' \quad en \quad R_1 \\ -Q'-Q_S \quad en \quad R_2 \\ Q_S \quad en \quad R_3 \\ con \quad Q' = -\dfrac{(R_2-R_S)R_1}{(R_2-R_1)R_S}Q_S \end{cases}$

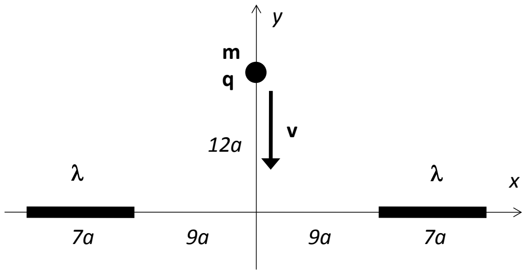
E9: Se tiene una esfera conductora de radio *R* cargada con una carga *Q*.

Calcular:

a) El potencial de la esfera tomando como referencia el infinito.
b) El trabajo gastado en cargar la esfera.
c) El trabajo adicional necesario para duplicar la carga

Solución: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ $\quad W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ $\quad W^{adicional} = \dfrac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

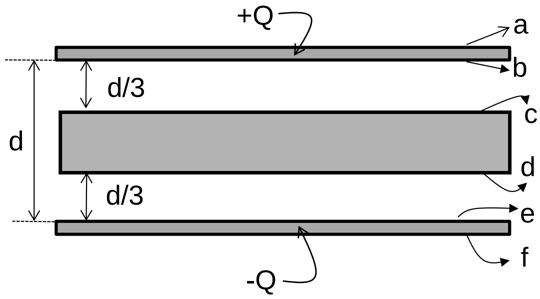
E10: En la figura se muestra una partícula de masa *m* y carga *q*, que se encuentra sobre el eje *y*, a una distancia *12a* del origen de coordenadas. Sobre el eje *x* y dispuestos de forma simétrica con sus extremos a una distancia *9a*, hay dos hilos de longitud *7a*, cargados uniformemente con una densidad de carga λ (del mismo signo que la de la carga). ¿Con qué velocidad mínima hay que lanzar la partícula hacia el origen para que llegue a alcanzarlo? (Considerar que no hay gravedad)



<u>Datos</u>: *a*, *m*, *q*, λ, *k* (constante electrostática).

Solución: $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2q\Delta V}{m}} \quad \Delta V = k\lambda \cdot 0,34$

E11: Se dispone de un condensador de placas planas de área *S* y separación *d*, que está cargado con cargas +*Q* y –*Q*. Las dimensiones transversales son mucho mayores que la separación *d*, pudiéndose el condensador considerar como infinito.
Se introduce dentro del condensador un conductor **descargado** de anchura *d/3*, tal y como se indica en la figura.
Se pide:

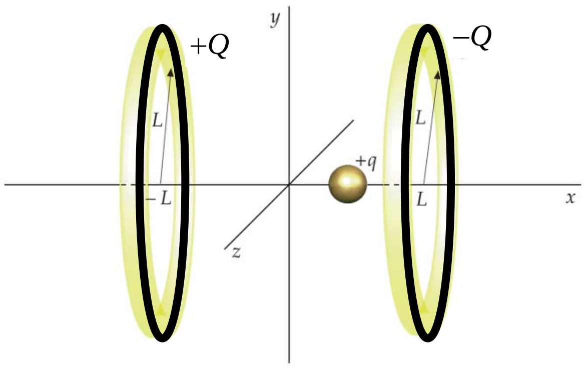


a) Indicar la carga que se acumula en cada una de las seis superficies a, b, c, d, e y f de la figura.
b) Calcular la diferencia de potencial entre el conductor superior y el inferior

Datos: Q, S, ε_0, d

Solución: $a) \quad Q_a = Qf = 0 \quad Q_b = Q_d = -Q_c = -Q_e = Q \qquad b) \quad \Delta V = \frac{2}{3} d \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

E12: La figura muestra una partícula carga con carga *q* positiva, obligada a moverse sobre el eje *x* que coincide con el eje de dos anillos delgados.
Los anillos están cargados uniformemente con cargas *Q* y -*Q*, como se muestra.
Los anillos tienen un radio de valor *L* y sus centros, que equidistan del origen, están separados una distancia *2L*.



a) La partícula se abandona en reposo desde el centro del anillo cargado positivamente. Calcular su energía cinética cuando pasa por un punto genérico *x>0*.

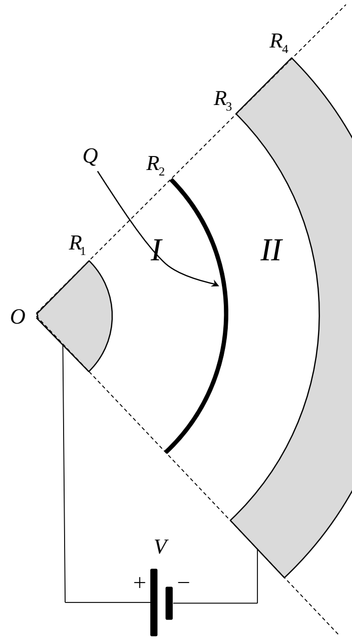
b) Calcular el campo eléctrico de los anillos en un punto genérico del eje *x>0*.

Datos: Q, q, L, x, k

Solución: $$EC = kQq\left[\left(\frac{1}{\sqrt{L^2}} - \frac{1}{\sqrt{5L^2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{(L+x)^2 + L^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L-x)^2 + L^2}}\right)\right]$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{x+L}{\left(x^2 + 2Lx + 2L^2\right)^{3/2}} - \frac{x-L}{\left(x^2 - 2Lx + 2L^2\right)^{3/2}}$$

E13: La figura, que no respeta escala, es un esquema de un dispositivo formado por dos conductores (esfera de radio R_1 y corteza esférica de radios R_3 y R_4), y una superficie esférica no conductora de radio R_2 . Los tres elementos están centrados en el punto O.



La capa no conductora está cargada uniformemente con una carga *Q*.

Los dos conductores, que inicialmente estaban descargados, se han conectado a una batería que mantienen entre ellos una diferencia de potencial *V*.

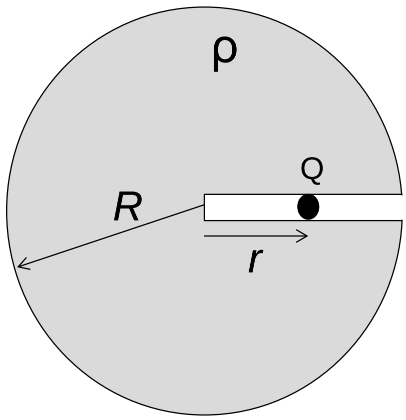
Se pide calcular:

a) Potencial en el punto O (referencia nula en infinito).
b) Carga neta en cada uno de los dos conductores.

Datos:
$$R_1 = 0,2m \quad ; \quad R_2 = 0,25m \quad ; \quad R_3 = 0,5m \quad ; \quad R_4 = 1m$$
$$Q = 30 \cdot 10^{-9} C \quad ; \quad V = 270V \quad ; \quad k = 9 \cdot 10^9 Nm^2 / C^2$$

Solución: $a) \quad V_O = 540V \qquad b) \quad q_{esfera} = -10 \cdot 10^{-9} C \qquad q_{corteza} = -q_{esfera}$

E14: Se tiene una esfera no conductora de radio *R* cargada uniformemente con densidad volumétrica de carga ρ. En dicha esfera se ha practicado un taladro muy fino coincidente con uno de sus radios de tal manera que se puede considerar que no distorsiona el campo de la esfera.



Una carga positiva *Q* de masa *m* se encuentra en el interior del taladro.

Inicialmente la carga *Q* está situada en el centro de la esfera.
Despreciar el peso de la carga.

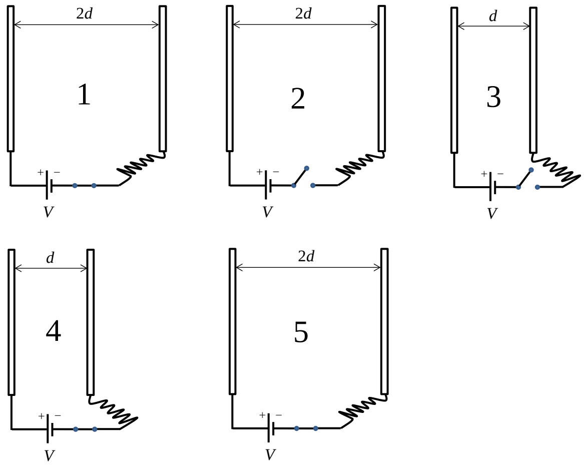
Se pide:

a) Calcular la fuerza que sufre la carga en el interior del taladro en función de la distancia al centro *r*.
b) Calcular la velocidad con que la carga saldría de la esfera ($r=R$) si se la separase ligeramente de su posición inicial.

Datos: ε_0, *R, ρ, m, Q*

Solución: $a) \quad f(r) = \dfrac{\rho Q}{3\varepsilon_0} r \qquad b) \quad v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2Q\Delta V}{m}} \quad \Delta V = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$

E15: Dos placas conductoras paralelas cuadradas de lado *L*, están separadas una distancia 2*d*, (*d*<<*L*). La placa de la izquierda es fija, y la de la derecha móvil.
Estando las placas descargadas, se las conecta a una batería, tal y como muestra la figura 1. A continuación, se abre el interruptor, tal y como muestra la figura 2.



a) Calcular, en la posición 1, la fuerza electrostática que la placa de la izquierda ejerce sobre la de la derecha, indicando su sentido.
b) Calcular el trabajo que debe realizarse para desplazar la placa móvil desde la posición 2 hasta la posición 3, manteniendo abierto el interruptor.

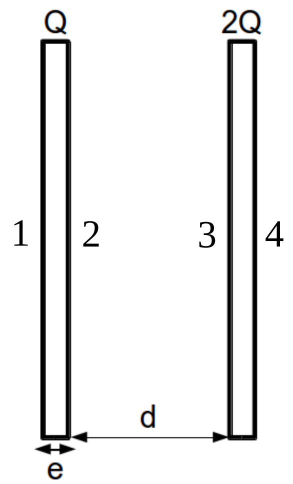
Ahora se cierra el interruptor (figura 4).

c) Calcular el trabajo que debe realizarse para desplazar la placa móvil desde la posición 4 hasta la posición 5, manteniendo cerrado el interruptor.

Datos: L, d, V, ε_0

Solución: $a) \quad f = \dfrac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{8d^2} \leftarrow \quad b) \quad W = -\dfrac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{8d} \quad c) \quad W = \dfrac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{4d}$

E16: La figura muestra una vista de perfil de un sistema formado dos placas conductoras cuadradas de área *S* y grosor e, separadas una distancia *d*. Las dimensiones verifican las relaciones $\mathrm{e} < d << \sqrt{S}$.
La placa de la izquierda tiene una carga total *Q* y la de la derecha *2Q*.



Calcular:

a) Vector campo eléctrico a la izquierda de la cara 1 y a la derecha de la cara 4.
b) La densidad de cargas superficiales en las cuatro superficies del sistema.
c) La diferencia de potencial entre las placas.
d) La fuerza ejercida por la placa izquierda sobre la derecha, indicando el sentido de la misma.

Datos: $Q, S, d, \mathrm{e}, \varepsilon_0$. Expresar los resultados mediante la cantidad $\sigma = \dfrac{Q}{S}$.

Solución:
$a) \quad \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \quad b) \quad \sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{3\sigma}{2} \quad \sigma_2 = -\dfrac{\sigma}{2} \quad \sigma_3 = \dfrac{\sigma}{2} \quad c) \quad V_2 - V_3 = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \quad d) \quad \vec{f} = \dfrac{\sigma Q}{\varepsilon_0} \vec{i}$

E17: Se desea diseñar un condensador formado por dos capas esféricas delgadas conductoras concéntricas.
La diferencia de potencial entre las placas del condensador es *V*, y se mantiene constante mediante una batería conectada de forma permanente entre ambos conductores. La capa interna está a mayor potencial que la externa.
El radio de la capa exterior es conocido y fijo y vale R_2, mientras que el radio de la capa interior R_1 es la variable que se desea optimizar.

a) Escribir la expresión (sin sustituir valores numéricos) del campo eléctrico en el espacio comprendido entre las capas, en función de las siguientes variables: *r* (distancia al centro de las capas), R_1, R_2 *y* *V*.
b) Determinar el valor (numérico) de R_1 que sea lo más pequeño posible, pero sin que en ningún punto del espacio se produzca la ruptura dieléctrica del aire, cuya rigidez dieléctrica es E_{max}

Datos: $R_2 = 25$ *cm*, $E_{max} = 30$ *kV/cm*, $V = 100$ *kV*, $k = 8.99x10^9$ *m/F*

Solución: $E = \frac{VR_1R_2}{(R_2-R_1).r^2}$ R_1 =3.96 cm

E18: Se tiene una corteza esférica no conductora de radios R_1 y R_2, cargada uniformemente con densidad volumétrica de carga ρ, según muestra la figura.

En dicha corteza se ha practicado un taladro muy fino de tal manera que se puede considerar que no distorsiona el campo de la corteza original.

ρ

R_1

v_0 q

R_2

Desde un punto muy lejano, se lanza una carga *q* de masa *m* con velocidad inicial v_0 en una dirección alineada con el eje del taladro.

¿Cuál es la velocidad mínima v_0 con la que debe lanzarse para que la carga *q* atraviese el taladro y llegue al hueco esférico?

Datos: ε_0, R_2, R_1, ρ, *m*, *q*

Solución: $v_{\min} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$ $V_0 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$

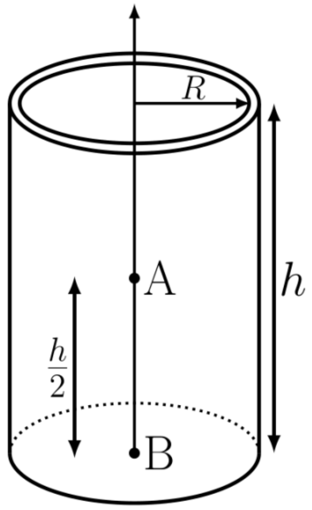
E19: Se tiene una superficie cilíndrica de radio R y altura h, cargada con $\sigma>0$ uniforme.

a) Calcular el potencial que crea la superficie en el punto medio del eje (punto A).

Desde el punto B se suelta una carga puntual $q<0$ con velocidad nula.

b) Despreciando la acción de la gravedad, calcular su energía cinética cuando pasa por el punto A.

Datos: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, q, R, h, σ



Solución:

$$V_A = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} ln\left(\frac{h/2+\sqrt{h^2/4+R^2}}{R}\right) \qquad V_B = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2+R^2}}{R}\right) \qquad v = \sqrt{\frac{2q(V_B - V_A)}{m}}$$

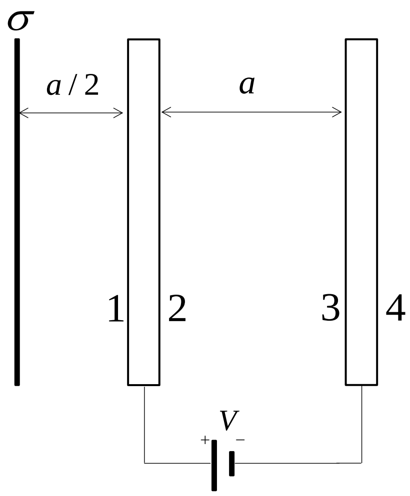
E20: Se tienen dos placas planas conductoras conectadas a una batería que mantiene una diferencia de potencial V, como se muestra. Antes de ser conectada la batería, las placas estaban descargadas.

Las placas son cuadradas y están separadas por una distancia a que es mucho menor que la longitud de sus lados.

Junto a las placas se ha dispuesto una superficie cuadrada no conductora cargada con densidad de carga superficial σ .

Calcular las densidades superficiales de carga de las cuatro caras de las placas.

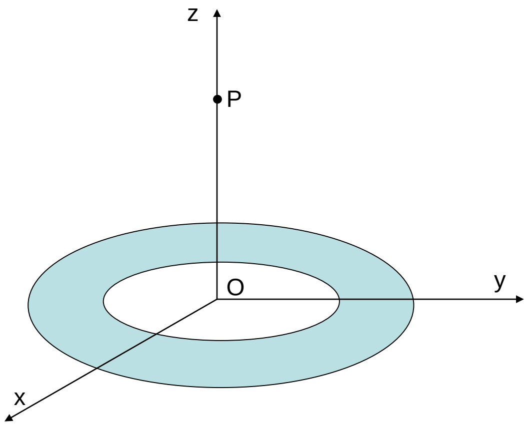
Datos: $a, V, \sigma, \varepsilon_0$



Solución: $\sigma_1 = -\sigma_4 = -\frac{\sigma}{2} \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{V\varepsilon_0}{a}$

E21: La figura muestra una corona circular de radios *a*, *b* (a<b). Está cargada con una densidad superficial de carga uniforme $\sigma > 0$.
Se pide:

a) Potencial eléctrico $V_P(z)$ en el punto P, a una altura *z* sobre el origen de coordenadas
b) ¿Con qué velocidad ha de lanzarse desde P una partícula con carga $q > 0$ y masa *m* para que llegue a O con velocidad nula? Despreciar el peso de la partícula.



Datos: $a, b, z, \sigma, q, m, \varepsilon_0$

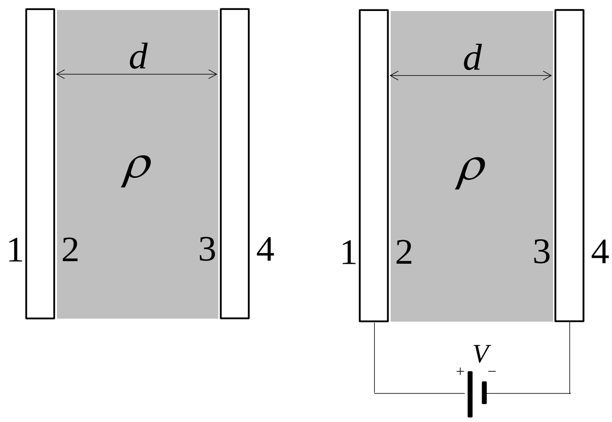
Solución:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right) \qquad v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \qquad \Delta V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(b - a - \sqrt{b^2+z^2} + \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

E22: Se tienen dos placas planas conductoras separadas por un material aislante cargado uniformemente con densidad volumétrica ρ .

Las placas son cuadradas y están separadas por una distancia *d* que es mucho menor que la longitud de sus lados.
Inicialmente, las placas están descargadas.

a) Calcular las densidades de carga de las cuatro caras de las placas.



Ahora se conecta una batería que mantiene una diferencia de potencial V , como se muestra en la figura.

b) Calcular las densidades de carga de las cuatro caras de las placas.

Datos: $\rho, d, V, \varepsilon_0$

Solución:

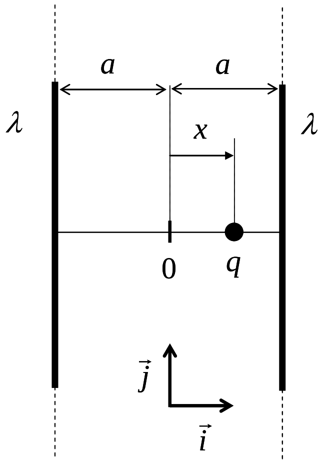
$$a)\quad \sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{\rho d}{2} \qquad b)\quad \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{\rho d}{2} \quad \sigma_2 = -\frac{\rho d}{2} + \frac{V\varepsilon_0}{d} \quad \sigma_3 = -\frac{\rho d}{2} - \frac{V\varepsilon_0}{d}$$

E23: Cuatro cargas idénticas de valor *q* están situadas en los vértices de un cuadrado de lado *a*.
En el centro del mismo hay una carga de valor –*q*.

a) Calcular el trabajo que hay que realizar para mover la carga central una distancia *a* a lo largo de la perpendicular al cuadrado.
b) Partiendo de la configuración original, calcular el trabajo que hay que realizar contra las fuerzas electrostáticas para comprimir el cuadrado reduciendo sus lados a su tercera parte, manteniendo la carga negativa en su centro.

Solución: $a) \quad W = 2,4\frac{kq^2}{a} \qquad b) \quad W = -0,48\cdot\frac{kq^2}{a}$

E24: Dos hilos rectos muy largos están dispuestos paralelamente y separados por una distancia *2a*. Los hilos están cargados uniformemente con densidad lineal de carga λ.
Una carga puntual *q* se libera desde el reposo en la posición que se indica en la figura, a una distancia *x* del origen de coordenadas (punto medio entre los hilos). Calcular la energía cinética de dicha carga cuando pasa por el origen O.
Datos: $\lambda, q, a, x, \varepsilon_0$

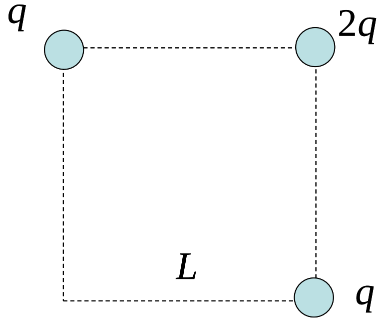


Solución: $K = -\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(1-\frac{x^2}{a^2})$

E25: **U**n cilindro conductor de radio R está rodeado coaxialmente por dos cortezas conductoras delgadas, de radios $2R$ y $3R$. El cilindro está cargado con carga neta Q, mientras que las cortezas poseen una carga neta $2Q$ y $3Q$, respectivamente.
La longitud L de los tres conductores es mucho mayor que sus radios y puede considerarse que el problema posee simetría cilíndrica.
Calcular la diferencia de potencial entre el cilindro y la corteza exterior.
Datos: R, L, Q, ε_0

Solución: $V_{cilindro} - V_{corteza} = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 L}\left(\ln(2) + 3\ln(1,5)\right)$

E26: Tres cargas están dispuestas sobre los vértices de un cuadrado, como se muestra.
Calcular el trabajo que hay que realizar para intercambiar una de las cargas q y la carga $2q$.



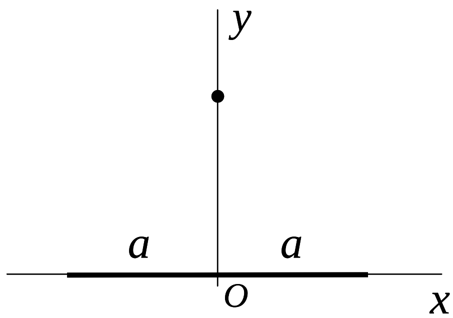
Solución: $W = \frac{kq^2}{L}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)$

E27: Se tiene una esfera conductora de radio R_1 rodeada por una corteza esférica conductora delgada de radio R_2. Las tres superficies de los conductores están en contacto con el aire.
Calcular la máxima diferencia de potencial que se puede aplicar a los conductores sin que se produzca la ruptura dieléctrica del aire.
Datos: $E_{ruptura}, R_1, R_2$

Solución: $V_{max} = E_{ruptura} R_1 \left(1 - \dfrac{R_1}{R_2}\right)$

E28: Se tiene un hilo recto de longitud *2a* cargado uniformemente con densidad lineal de carga λ. Se pide:

a) Calcular el potencial eléctrico en un punto genérico de su mediatriz.
b) Utilizando el resultado anterior, calcular el campo eléctrico.



Solución: $V(y) = 2k\lambda \ln\left(\dfrac{a + (a^2 + y^2)^{1/2}}{y}\right)$; $E(y) = 2k\lambda \dfrac{a}{y(a^2 + y^2)^{1/2}}$