2. Soluciones maximales

Hemos visto que un problema de valor inicial de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{29}$$

tiene solución única en un entorno de t_0 cuando f es una función de $\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$ y (t_0,x_0) es un punto de $(a,b)\times\mathcal{O}$. En esta sección vamos a intentar estudiar el intervalo más amplio para el cual la solución de (29) está definida.

Definición 2.1. *Sea y una solución de la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ definida sobre un intervalo I_y. Se dice que z es una prolongación de y si es una solución de $x' = f(t,x)$ en un intervalo $I_z \supsetneq I_y$ y si $y(t) = z(t)$ para todo $t \in I_y$.*

Una solución x de la ecuación $x' = f(t,x)$ definida en I_x es una solución maximal (en el dominio $(a,b)\times\mathcal{O}$) si no admite ninguna prolongación (en el dominio $(a,b)\times\mathcal{O}$). □

Proposición 2.2. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$ y sean y y z dos soluciones del problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

definidas respectivamente en $I_y \ni t_0$ y $I_z \ni t_0$. Entonces:

- *$y(t) = z(t)$ para todo $t \in I_y \cap I_z$*
- *Suponiendo que $I_y \nsubseteq I_z$ y $I_z \nsubseteq I_y$ entonces la función x definida por*

$$\left[\begin{array}{ll} x(t) = y(t) & \forall\, t \in I_y \\ x(t) = z(t) & \forall\, t \in I_z \end{array}\right.$$

es una prolongación de y y de z. □

La demostración de esta proposición es consecuencia inmediata de la unicidad de la solución establecida en el teorema 1.7 (y el corolario 1.8). **Q.E.D.**

Entonces tenemos:

Teorema 2.3. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$. Entonces el problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{30}$$

tiene una única solución maximal definida en un intervalo abierto $(\alpha,\omega)\subseteq(a,b)$. □

Demostración: Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones de (30) y sea

$$I = \bigsqcup_{z\in\mathcal{S}} I_z,$$

siendo I_z el intervalo de definición de la solución z. Definimos

$$x(t) = z(t) \quad \text{para todo } t \in I_z.$$

Según la anterior proposición la función x está bien definida. Además $x(t_0) = x_0$ y $x' = f(t, x)$ en I dado que para todo $t \in I$ existe $I_z \ni t$ y $x \equiv z$ en I_z. Finalmente I es abierto, de otro modo supongamos que uno de sus extremos pertenezca a I: $I = [\alpha, \omega) \subset (a, b)$ entonces el punto $(\alpha, x(\alpha)) \in (a, b) \times \mathcal{O}$ luego existe un entorno de α: $(\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0)$ y una función y tal que

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & \text{en } (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0) \\ y(\alpha) = x(\alpha). \end{cases}$$

Sea entonces z definida por

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \forall\, t \in I \\ y(t) & \forall\, t \in (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0) \end{cases}$$

es una prolongación de x en $I \cup (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0)$ lo que contradice el que x sea solución maximal.

Obviamente la solución maximal es única. **Q.E.D.**

También tenemos:

Teorema 2.4. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a, b) \times \mathcal{O}; I\!R^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a, b) \times \mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $I\!R^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0, x_0) \in (a, b) \times \mathcal{O}$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α, ω). Entonces, para cualquier compacto $\mathcal{K} \subset (a, b) \times \mathcal{O}$ existen $t_1 \in [t_0, \omega)$ y $t_2 \in (\alpha, t_0]$ tales que $(t_i, x(t_i)) \notin \mathcal{K}$ para $i = 1, 2$. En otros términos la trayectoria de la solución: $\gamma_{(t_0, x_0)} = \{(t, x(t))/\, t \in (\alpha, \omega)$ sale de cualquier subconjunto compacto de $(a, b) \times \mathcal{O}$. $\square$

Demostración: Supongamos que $(t, x(t)) \in \mathcal{K}$ para todo $t \in [t_0, \omega)$. Sea

$$M = \max_{(t,x) \in \mathcal{K}} \|f(t, x)\|$$

entonces, para t, $t' \in [t_0, \omega)$ tenemos

$$\|x(t) - x(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t'}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \right| \leq M|t - t'|. \tag{31}$$

Consideremos una sucesión $(\tau_k)_{k \in N}$, $\tau_k \in [t_0, \omega)$ tal que

$$\tau_k \xrightarrow{k \to \infty} \omega.$$

dado que $(\tau_k)_{k \in N}$ es una sucesión de Cauchy, de (31) deducimos que $(x(\tau_k))_{k \in N}$ también es de Cauchy luego $x(\tau_k)$ tiene un límite cuando $\tau_k \to \omega$. Por otra parte este límite no depende de la sucesión $(\tau_k)_{k\in N}$ elegida. En efecto, consideremos otra sucesión de Cauchy $(\theta_m)_{m\in N}$, entonces por (31) tenemos

$$\|x(\tau_k) - x(\theta_m)\| \leq M|\tau_k - \theta_m| \overset{\tau_k,\theta_m\to\omega}{\longrightarrow} 0.$$

Luego, por continuidad, podemos definir

$$x(\omega) = \lim_{t\to\omega} x(t),$$

y dado que $\mathcal{K}$ es cerrado tenemos

$$(\omega, x(\omega)) \in \mathcal{K} \subset (a,b)\times\mathcal{O}.$$

Además, x es continua en $[t_0,\omega]$ y $s \mapsto f(s,x(s))$ también es continua en $[t_0,\omega]$ luego

$$x(\omega) = \lim_{t\nearrow\omega}\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right) = \int_{t_0}^{\omega} f(s,x(s))\,ds$$

por lo tanto

$$x'(\omega) = f(\omega, x(\omega)).$$

Entonces, existirá un entorno de ω: $(\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon)$ tal que $(\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon)\times\mathcal{O}\subset(a,b)\times\mathcal{O}$ en el que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(\omega) &= x(\omega) \end{aligned}$$

tenga definida una solución única. La unicidad implica que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0,\omega]\cap[\omega-\varepsilon,\omega]$ luego la función

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } t\in[t_0,\omega] \\ y(t) & \text{para } t\in[\omega,\omega+\varepsilon] \end{cases}$$

es una prolongación de la solución x lo que contradice el hecho de que x es solución maximal. **Q.E.D.**

Corolario 2.5. *Sea $f\in\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^n)$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α,ω). Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{O}$ tal que $x(t)\in\mathcal{A}$ para todo $t\in(\alpha,t_0]$ (respectivamente $t\in[t_0,\omega)$ entonces $\alpha=a$ (respectivamente $\omega=b$). $\square$

Corolario 2.6. *Sea $f\in\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathbb{R}^n$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathbb{R}^n$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α, ω)*. Suponemos que existe una función continua* $\varphi \in \mathcal{C}^0((a,b); I\!R)$ *tal que* $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$ *para todo* $t \in [t_0, \omega)$ *(respectivamente* $(\alpha, t_0]$*) entonces* $\omega = b$ *(respectivamente* $\alpha = a$*).* $\square$

finalmente

Corolario 2.7. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}$*. Supongamos que* f *está acotada sobre* $(a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b)*.* $\square$

Corolario 2.8. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}$*. Supongamos que existen dos funciones* h*,* $g \in \mathcal{C}(a,b)$ *tales que* $\|f(t,x)\| \leq g(t)\|x\| + h(t)$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b)*.* $\square$

Corolario 2.9. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}$*. Supongamos que existen una función* $k \in \mathcal{C}(a,b)$ *tales que* $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t)\|x - y\|$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b)*.* $\square$

Teorema 2.10. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times \mathcal{O}$*, siendo* $\mathcal{O}$ *un dominio abierto de* $I\!R^{\mathrm{n}}$*.*

Si $\mathcal{O}$ *es acotado se tiene:*

$$\lim_{t \to \omega} d(x(t), I\!R^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o } \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t \to \alpha} d(x(t), I\!R^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o } \alpha = a\textbf{.}$$

Si $\mathcal{O}$ *no es acotado se tiene:*

$$\lim_{t \to \omega} d(x(t), I\!R^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o } \lim_{t \to \omega} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o } \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t \to \alpha} d(x(t), I\!R^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o } \lim_{t \to \alpha} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o } \alpha = a\textbf{.}$$

En particular, si $\mathcal{O} = I\!R^{\mathrm{n}}$ *se tiene*

$$\lim_{t \to \omega} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o } \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t \to \alpha} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o } \alpha = a\textbf{.} \ \square$$

(Dejamos como problemas las demostraciones de los corolarios 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 y del teorema 2.10.)