4. Estabilidad

En las secciones anteriores hemos estudiado la existencia de soluciones, su unicidad y su dependencia continua respecto de los datos del problema: datos iniciales, función f, parámetros. También hemos visto herramientas que nos permiten estimar el intervalo de definición de las soluciones de una ecuación. En lo que queda de capítulo (y en el siguiente capítulo en lo concerniente a sistemas autónomos planos) vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, es decir, suponiéndolas definidas en todo $I\!R$ estudiaremos cómo se comportan las soluciones cuando $t \to +\infty$ o cuando $t \to -\infty$. De hecho, en la mayor parte de los resultados se obviará estudiar el caso en que $t \to -\infty$ observando que si $x(t)$ es una solución de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

entonces la función $y(t) = x(-t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt}(t) = -f(-t, y(t))$$

por lo que el estudio del comportamiento de x cuando $t \to -\infty$ es el estudio del comportamiento de y cuando $t \to +\infty$. En definitiva el estudio del comportamiento de una solución cuando $t \to +\infty$ o cuando $t \to -\infty$ son problemas similares.

4.1. Definiciones. En lo sucesivo consideraremos una ecuación $x' = f(t, x)$ donde f es una función continua sobre un dominio $(\alpha, \infty) \times \mathcal{O} \subset I\!R \times I\!R^{\mathrm{n}}$ (podriamos considerar un dominio más general $\mathcal{D} \subset I\!R^{n+1}$). Consideramos que $0 \in \mathcal{O}$ (o más generalmente que $(\alpha, \infty) \times \{0\} \subset \mathcal{D}$).

Notaremos $x(t; t_0, x_0)$ la única solución de la ecuación anterior que pasa por el punto x_0 en el instante t_0.

Definición 4.1. *Sea $\beta > \alpha$ y sea $y(t)$ una solución de la ecuación $x' = f(t, x)$ definida en el intervalo $[\beta, \infty)$.*

1. *Se dice que y es estable si dados $t_0 \geq \beta$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que para todo x_0 que verifique $\|x_0 - y(t_0)\| \leq \delta$, la solución $x(t; t_0, x_0)$ está definida y verifica $\|x(t; t_0, x_0) - y(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.*
2. *Se dice que $y(t)$ es asintóticamente estable si es estable y si, además, existe $\mu = \mu(t_0) > 0$ tal que $\|x_0 - y(t_0)\| \leq \mu$ implica:*
$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_0) - y(t)\| = 0.$$
3. *Se dice que $y(t)$ es globalmente (en $\mathcal{O}$) asintóticamente estable si es estable y si, además,*
$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_0) - y(t)\| = 0$$
para todo $x_0 \in \mathcal{O}$.
4. *Una solución que no es estable se denomina inestable.* □

Definición 4.2. *Las soluciones estacionarias (o constantes) del sistema*

$$x' = f(t, x(t))$$

son denominadas puntos de equilibrio del sistema (diferencial).

Nota 5. *Un punto $z \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema si y sólo si para todo $t \in (\alpha, \infty)$ es un cero de la función f i.e.*

$$f(t, z) = 0 \quad \textit{para todo } t \in (\alpha, \infty).$$

Nota 6. *Sea A una matriz $n \times n$ y sea el sistema lineal*

$$x' = A\,x,$$

entonces, si A es no singular, $x = 0$ es el único punto de equilibrio del sistema. Si A es una matriz constante no singular y b es un vector constante de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$x = -A^{-1}\,b$$

es él único punto de equilibrio del sistema

$$x' = A\,x\,+\,b.$$

4.2. Estabilidad de un sistema lineal.

Proposición 4.3. *Una solución de un sistema lineal homogéneo es estable (resp. asintóticamente estable, resp. globalmente asintóticamente estable) si y sólo si la solución $x \equiv 0$ lo es. En este caso diremos que el sistema es estable (resp. asintóticamente estable, resp. globalmente asintóticamente estable).*

Teorema 4.4. *Consideremos el sistema $x' = A(t)x$, $t \geq \beta$.*

1. *El sistema es estable si, y sólo si, cada una de sus soluciónes está acotada en $[\beta, \infty)$,*
2. *El sistema es asintóticamente estable si, y sólo si, todas sus soluciones convergen a 0 cuando $t \to \infty$.* □

Demonstración:

1. **Supongamos que el sistema es estable.** Sea $\varepsilon = 1$ en la definición anterior, entonces existe δ tal que cualquier solución que en el instante $t_0 \geq \beta$ esté en la bola de radio δ centrada en el origen, $\|x(t_0)\| \leq \delta$ permanecerá en la bola de radio 1 a lo largo del tiempo: $\|x(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq t_0$. Consideremos entonces una solución y, cualquiera, del sistema, (podemos suponer que $y(t_0) \neq 0$ dado que sino $y(t) = 0$ está trivialmente acotada) dado que el sistema es lineal, la función (vectorial)

$$z(t) = \frac{\delta}{\|y(t_0)\|} y(t)$$

es también una solución y, como $z(t_0) = \delta$ deducimos que $z(t)$ está acotada, para alguna constante C se tiene $z(t) \leq C$ luego deducimos que $y(t)$ también está acotada:

$$\|y(t)\| = \|z(t)\| \frac{\|y(t_0)\|}{\delta} \leq C \frac{\|y(t_0)\|}{\delta} \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Reciprocamente, supongamos que todas las soluciones del sistema están acotadas. Entonces, si Φ es la matriz fundamental del sistema que verifica $\Phi(t_0) = I$, dado que las columnas de Φ son soluciones del sistema, existe una constante C tal que $\|\Phi(t)\| \leq C$ para $t \geq t_0$. Cualquier solución del sistema verifica $x(t) = \Phi(t)x(t_0)$ luego $\|x(t)\| \leq C\|x(t_0)\|$ para $t \geq t_0$. Entonces el sistema es estable dado que para tener $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ para $t \geq t_0$ bastará elegir $x(t_0)$ tal que $\|x(t_0)\| \leq \varepsilon/C$.

2. **Supongamos que el sistema es asintóticamente estable.** Entonces existe μ tal que toda solución que verifica $\|x(t_0)\| \leq \mu$ satisface $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Consideremos una solución cualquiera y con $y(t_0) \neq 0$ y construimos

$$z(t) = \frac{\mu}{\|y(t_0)\|} y(t)$$

entonces $z(t)$ también es solución y verifica $\|z(t_0)\| = \mu$ luego satisface $z(t) \to 0$ para $t \to \infty$. Como $y(t) = z(t)\|y(t_0\|/\mu)$ deducimos que, para cualquier solución y del sistema, $\|y(t)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Reciprocamente, Si todas las soluciones del sistema tienden a 0 cuando $t \to \infty$ entonces toda solución del sistema está acotado, luego el sistema es estable. Además, como toda solución tiende a 0, es (globalmente) asintóticamente estable. **Q.E.D.**

Corolario 4.5. *Sea el sistema $x' = Ax$, con A matriz de coeficientes constantes.*

1. *El sistema es estable si, y sólo si, $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\lambda \leq 0$ para todo autovalor λ de A y $\dim \mathrm{N}(A-\lambda I)$ coincide con la multiplicidad (algebraica) de λ para todo autovalor λ que tenga parte real nula.*
2. *El sistema es asintóticamente estable si, y sólo si, todos los autovalores de A tienen parte real negativa.* □

Demonstración: Consideremos la matriz A de coeficientes constantes. Sea P la matriz no singular que nos permite pasar a la forma de Jordan $P^{-1}AP = J$. Entonces, si y es solución de $y' = Jy$ $x = Py$ es solución del sistema $x' = Ax$; recíprocamente, si x es solución de $x' = Ax$, $y = P^{-1}x$ es solución de $y' = By$ luego el sistema $y' = By$ es estable (respectivamente asintóticamente estable) si, y sólo si, el sistema $x' = Ax$ es estable (respectivamente asintóticamente estable). Recordemos que la matriz J es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_q \end{pmatrix}$$

donde las matrices B_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, son matrices $n_j \times n_j$, con $1 \leq n_j \leq n$ y $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} n_j = n$, de la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema $y' = Jy$ se descompone en q sistemas

$$y'_{(j)} = B_j y_{(j)}$$

donde $y_{(j)}(t) \in I\!R^{n_j}$ corresponde a las componentes $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} n_i + 1$ hasta $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} n_i$ (acordando que $n_0 = 0$) de la solución y de $y' = By$ i.e.

$$y = \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \\ \vdots \\ y_{(q)} \end{pmatrix}$$

y

$$y' = \begin{pmatrix} y'_{(1)} \\ y'_{(2)} \\ \vdots \\ y'_{(q)} \end{pmatrix} = Jy = \begin{pmatrix} B_1 y_{(1)} \\ B_2 y_{(2)} \\ \vdots \\ B_q y_{(q)} \end{pmatrix}$$

luego el sistema $y' = Jy$ se descompone en los q sistemas independientes $y'_{(j)} = B_j y_{(j)}$ para $j = 1, 2, \ldots, q$, de la forma

$$\begin{pmatrix} y'_{(j),1} \\ y'_{(j),2} \\ \vdots \\ y'_{(j),n_j-1} \\ y'_{(j),n_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{(j),1} \\ y_{(j),2} \\ \vdots \\ y_{(j),n_j-1} \\ y_{(j),n_j} \end{pmatrix}.$$

La solución general de tal sistema es:

$$\left[\begin{array}{lcl} y_{(j),1}(t) & = & e^{\lambda t}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-1)!}t^{k-1} \\ y_{(j),2}(t) & = & e^{\lambda t}\displaystyle\sum_{k=2}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-2)!}t^{k-2} \\ & \cdots & \\ y_{(j),i}(t) & = & e^{\lambda t}\displaystyle\sum_{k=i}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-i)!}t^{k-i} \\ & \cdots & \\ y_{(j),n_j-1}(t) & = & e^{\lambda t}(c_{(j),n_j}t+c_{(j),n_j-1}) \\ y_{(j),n_j}(t) & = & e^{\lambda t}c_{(j),n_j}\,. \end{array}\right.$$

Luego, se tiene que

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{R}e\lambda<0 & \Longrightarrow & |y_{(j),i}(t)| = e^{\mathcal{R}e\lambda\, t}\left|\displaystyle\sum_{k=i}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-i)!}t^{k-i}\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0 \\ \mathcal{R}e\lambda=0 \text{ y } n_j=1 & \Longrightarrow & |y_{(j),1}(t)| = |c_{(j),1}| \quad \text{permanece acotado cuando } t\to\infty \\ \mathcal{R}e\lambda=0 \text{ y } n_j>1 & \Longrightarrow & |y_{(j),i}(t)| = \left|\displaystyle\sum_{k=i}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-i)!}t^{k-i}\right| \xrightarrow{t\to\infty} \infty \\ \mathcal{R}e\lambda>0 & \Longrightarrow & |y_{(j),i}(t)| = e^{\mathcal{R}e\lambda\, t}\left|\displaystyle\sum_{k=i}^{n_j}\frac{c_{(j),k}}{(k-i)!}t^{k-i}\right| \xrightarrow{t\to\infty} \infty \end{array}\right.$$

de donde se deduce trivialmente el corolario 4.5.

Corolario 4.6. *Consideremos el sistema $x' = B(t)x$, $t \geq \beta$, donde $B = A + C(t)$ siendo A una matriz de coeficientes constantes y $C(t)$ una matriz con coeficientes dependientes de t.*

1. *Si el sistema $x' = Ax$ es estable, $C(t)$ es continua en $[\beta, \infty)$ y*

$$\int_\beta^\infty \|C(s)\|\, ds < \infty,$$

entonces el sistema $x' = (A + C(t))x$ es estable.

2. *Si el sistema $x' = Ax$ es asintóticamente estable, $C(t)$ es continua en $[\beta, \infty)$ y $\|C(t)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces el sistema $x' = (A+C(t))x$ es asintóticamente estable.* □

Demostración: Consideremos el primer caso. Aplicando el Teorema 1.10 del segundo fichero de repaso (fichero ”sistemas de ecuaciones lineales”del Campus Virtual) la solución de $x' = Ax + C(t)x$ se puede escribir

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}C(s)x(s)\,ds \quad \forall\, t_0 \geq \beta \text{ y } \forall\, t \geq \beta.$$

Dadas las hipótesis sobre A, la matriz fundamental (cuyas columnas son soluciones linealmente independientes del sistema $x' = Ax$) está acotada, i.e. existe M tal que

$$\|e^{A\tau}\| \leq M \quad \text{para todo } \tau \geq \beta.$$

De ello deducimos que

$$\|x(t)\| \leq M\|x(t_0)\| + M\int_{t_0}^{t} \|C(s)\|\|x(s)\|\,ds \quad \forall\, t_0 \geq \beta \text{ y } \forall\, t \geq \beta.$$

Entonces el lema de Gronwall nos dice que

$$\|x(t)\| \leq M\|x(t_0)\|e^{M\int_{t_0}^{t}\|C(s)\|\,ds} \quad \forall\, t_0 \geq \beta \text{ y } \forall\, t \geq \beta$$

de donde deducimos que el sistema $x' = (A + C(t))x$ es estable.

Para la demostración del segundo punto representamos cualquier solución x del sistema $x' = (A + C(t))x$ como anteriormente:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}C(s)x(s)\,ds \quad \forall\, t_0 \geq \beta \text{ y } \forall\, t \geq \beta.$$

Dado que el sistema asociado a la matriz A es asintóticamente estable, de la demostración del anterior corolarior podemos ver que existen dos constantes $M > 0$ y $\mu > 0$ tales que

$$\|e^{A\tau}y\| \leq Me^{-\mu\tau}\|y\| \quad \forall\, y \in I\!R^{\mathrm{n}} \text{ y } \forall \tau > 0.$$

Luego

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\mu(t-t_0)}\|x(t_0)\| + M\int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)}\|C(s)\|\|x(s)\|\,ds \quad \forall\, t_0 \geq \beta \text{ y } \forall\, t \geq t_0.$$

Multiplicando por $e^{\mu t}$ y teniendo en cuenta que (dado que $C(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$) para cualquier $\nu > 0$ existe $t_0 = t_0(\nu)$ tal que $C(t) \leq \nu$ para $t \geq t_0(\nu)$ tengamos

$$\|x(t)\|e^{\mu t} \leq Me^{\mu t_0(\nu)}\|x(t_0(\nu))\| + M\nu\int_{t_0(\nu)}^{t} e^{\mu s}\|x(s)\|\,ds \quad \forall t \geq t_0(\nu).$$

La desigualdad de Gronwall establece que

$$\|x(t)\|e^{\mu t} \leq K_1 e^{K_2(t-t_0(\nu))}$$

donde $K_1 = Me^{\mu t_0(\nu)}\|x(t_0(\nu))\|$ y $K_2 = M\nu$, luego tenemos

$$\|x(t)\| \leq K_1 e^{-M\nu t_0(\nu)}e^{(M\nu-\mu)t}.$$

Elegimos $\nu = \mu/2M$ para establecer

$$\|x(t)\| \leq K_1 e^{-M\nu t_0(\nu)}e^{-\mu t/2} \quad \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$