Q.E.D.

4.3. Estabilidad de las soluciones de sistemas no lineales. Linealización. Sea el sistema $x' = f(t,x)$, sea z una solución del sistema, sea x una solución genérica y sea $y = x - z$. Sea $y' = Ay$ la primera aproximación del sistema:

$$y' = x' - z' = f(t,x) - f(t,z) = f(t, y+z) - f(t,z) = g(t,y) = Ay + h(t,y)$$

donde suponemos que la matriz A no depende de t. Entonces

Teorema 4.7. *Supongamos que*

1. *Todos los autovalores de A tienen parte real negativa.*
2. *La función $h(t,y)$ es continua y con derivadas primeras continuas respecto a $y_1, \dots, y_n$ en el conjunto $(\beta - \sigma, \infty) \times V$ con β, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y V un entorno de $y = 0$ en $\mathbb{R}^n$ y tal que $h(t,y) = o(y)$ cuando $\|y\| \to 0$, uniformemente con respecto a t para $t \in [\beta, \infty)$.*

Entonces, existe un entorno U de $y = 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

- *Si $y_0 \in U$, la solución $y(t; t_0, y_0)$ (de $y' = Ay + h(t,y)$) está definida y verifica $y(t; t_0, x_0) \in U$ para todo $t \geq t_0$.*
- *Si $c > 0$ es tal que $\mathcal{R}e\,\lambda < -c$ para todo autovalor λ de A, se tiene*

$$\|y(t; t_0, y_0)\| \leq M e^{-c(t-t_0)} \|y_0\|$$

para $y_0 \in U$ y $t \in [t_0, \infty)$, y para cierta constante M. En particular la solución $y \equiv 0$ de $y' = Ay + h(t,y)$ es asintóticamente estable. □

Además:

Teorema 4.8. *Supongamos que*

1. *La matriz A tiene al menos un autovalor λ con parte real positiva.*
2. *La función $h(t,y)$ satisface las mismas hipótesis que en el teorema 4.7.*

Entonces la solución $y \equiv 0$, de $y' = Ay + h(t,y)$ es inestable.

Si, en particular, $\mathcal{R}e\,\lambda > 0$ para todo autovalor λ de A, existe un entorno U de $y = 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que

- *Si $y_0 \in U$, la solución $y(t; t_0, y_0)$ sale definitivamente de U, i.e. existe $t^* = t^*(t_0, y_0)$ tal que $y(t; t_0, y_0) \notin U$ para todo $t > t^*$.*
- *Si $c > 0$ es tal que $\mathcal{R}e\,\lambda > c$ para todo autovalor λ de A, tenemos*

$$\|y(t; t_0, y_0)\| \geq M e^{c(t-t_0)} \|y_0\|$$

mientras $y(t; t_0, y_0)$ permanezca en U, para cierta constante $M > 0$. □

Cuando el sistema inicial es autónomo, $x' = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces los teoremas anteriores llevan al siguiente enunciado:

Corolario 4.9. *Sea z un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ (i.e. $f(z) = 0$).*

1. *Sea Df la matriz jacobiana de f, i.e. $Df = \partial f_i/\partial z_j)$. Si todos los autovalores λ de $Df(z)$ tienen $\mathcal{R}e\,\lambda < 0$, existe un entorno U de z en Ω tal que*
   - *Si $x_0 \in U$, la solución $x(t; t_0, x_0)$ de $x' = f(x)$ está definida y verifica $x(t; t_0, x_0) \in U$ para todo $t \geq t_0$.*
   - *Si $c > 0$ es tal que $\mathcal{R}e\,\lambda < -c$ para todo autovalor λ de $Df(z)$, entonces, para cierta constante $M > 0$ se verifica*

     $$\|x(t; t_0, x_0) - z\| \leq Me^{-c(t-t_0)}\|x_0 - z\|$$

     para $x_0 \in U$ y $t \in [0, \infty)$. En particular z es asintóticamente estable.
2. *Si la matriz $Df(z)$tiene al menos un autovalor con parte real positiva el punto de equilibrio z es inestable. Si, en particular todos los autovalores de $Df(z)$ tienen parte real positiva, existe un entorno $U \subseteq \Omega$ de z tal que*
   - *Si $x_0 \in U$, la solución $x(t; t_0, x_0)$ de $x' = f(x)$ sale definitivamente de U i.e. existe $t^* = t^*(t_0, x_0) \geq t_0$ tal que $x(t; t_0, x_0) \notin U$ para todo $t > t^*$.*
   - *Si $c > 0$ es tal que $\mathcal{R}e\lambda > c$ para todo autovalor λ de $Df(x)$, entonces, para cierta constante $M > 0$ se verifica*

     $$\|x(t; t_0, x_0) - z\| \geq Me^{c(t-t_0)}\|x_0 - z\|$$

     mientras $x(t; t_0, x_0)$ permanezca en U. $\square$