1. Diagrama de fases de los sistemas lineales

En esta sección estudiaremos las trayectorias de los sistemas

$$X' = A\,X$$

para matrices $A \in I\!R^{2\times 2}$ donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Suponemos que A es no singular, i.e. el único punto de equilibrio del sistema es $(0,0)$. El caso de las matrices singulares se deja como ejercicio.

Notaremos P la matriz no singular de paso a la forma de Jordan (real):

$$J = P^{-1}\,A\,P.$$

La matriz J podrá adoptar 4 formas distintas según los autovalores de A.

1. A tiene dos autovalores reales distintos $\lambda_1 > \lambda_2$, entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

   (Suponer $\lambda_1 > \lambda_2$ no es una retricción, sólo depende de la elección adecuada de la matriz P.)

2. A tiene un único autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $dim\,\mathbf{N}(A - \lambda I) = 2$, entonces $P = I$ y:

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. A tiene un único autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $dim\,\mathbf{N}(A - \lambda I) = 1$, entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. A tiene 2 autovalores complejos conjugados: $\lambda_1 = a + ib$, con $b > 0$, y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - ib$, entonces

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

   (Suponer $b > 0$ no es una restricción, sólo depende de la elección adecuada de la matriz P.)

Si $P = (P^1, P^2)$ y si

1.1. A tiene dos autovalores reales distintos. Si A tiene dos autovalores reales distintos, $\lambda_1 > \lambda_2$, su forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y las soluciones del sistema $Y' = JY$ son de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad \text{con } Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

El origen es un punto de equilibrio luego es una trayectoria estacionaria. Además los semi-ejes positivos y negativos son trayectorias correspondientes a $(c_1, c_2) = (c_1, 0)$ con $c_1 > 0$ para el semi-eje horizontal positivo y $c_1 < 0$ para el semi-ele horizontal negativo, y $(c_1, c_2) = (0, c_2)$ con $c_2 > 0$ para el semi-eje vertical positivo y $c_2 < 0$ para el semi-eje vertical negativo. Luego, las trayectorias no pueden cortar los ejes y se tienen que circunscribir al cuadrante en el que se ubica el punto de partida $(y_1(0), y_2(0)) = (c_1, c_2)$.

Para $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, despejando t de y_i para $i = 1, 2$ se tiene

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{y_1}{c_1} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{y_2}{c_2}$$

luego

$$y_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \tag{1}$$

y, dado que $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{c_2}{c_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1} \tag{2}$$

y

$$\frac{d^2 y_2}{dy_1^2} = \frac{c_2}{c_1^2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2}. \tag{3}$$

1$^{\text{er}}$ caso: $\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$

El origen es inestable cuando $t \to \infty$ pero es globalmente asintóticamente estable cuando $t \to -\infty$, luego todas las trayectorias "proceden" del origen.

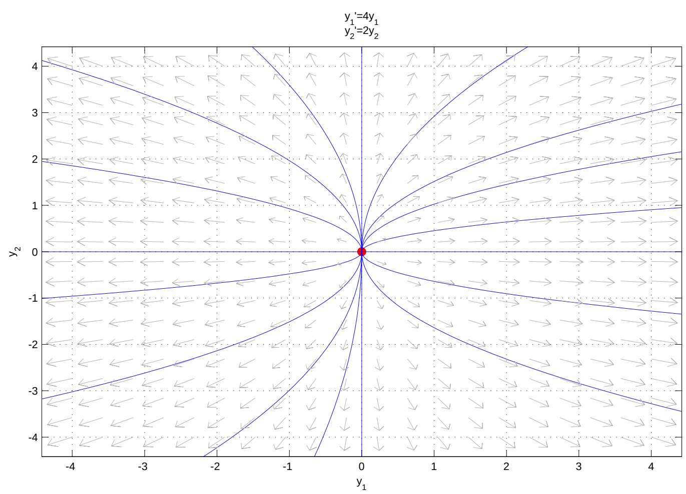


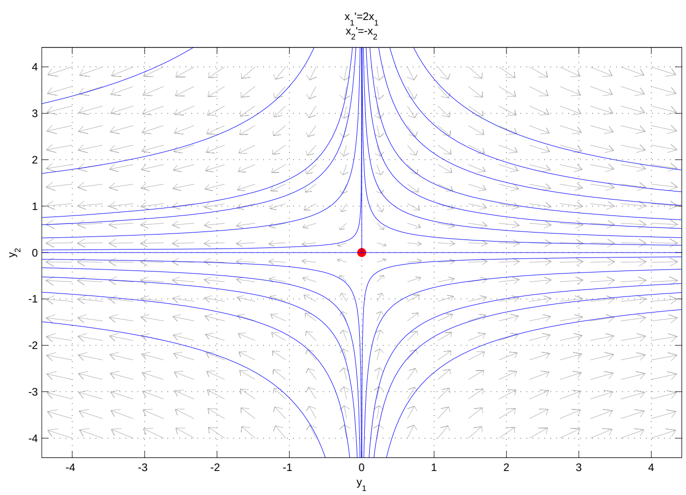
FIGURA 1. Nodo inestable-Sistema $Y' = JY$.

- si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e y_2 es una función creciente y convexa de y_1;

por lo que todas las trayectorias (correspondientes a $c_2 \neq 0$) son tangentes al eje vertical en el origen.

En este caso ***el origen es un nodo inestable***.

2^{o} caso: $\boldsymbol{\lambda_1 > 0 > \lambda_2}$



El origen es inestable. Dado que $\lambda_2/\lambda_1 < 0$ de (1) deducimos que las trayectorias en el interior de los 4 cuadrantes tienen aspecto de hipérbola con los correspondientes semi-ejes como asíntotas.

Dado que $\lambda_2/\lambda_1 < 0$ y teniendo en cuenta (1), (2) y (3):

- si $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el primer cuadrante e y_2 es una función decreciente y convexa de y_1;
- si $c_1 < 0$ y $c_2 > 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el segundo cuadrante e y_2 es una función creciente y convexa de y_1;
- si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e y_2 es una función decreciente y cóncava de y_1;
- si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el cuarto cuadrante e y_2 es una función creciente y cóncava de y_1.

El recorrido se hace en el sentido indicado por el campo de direcciones de la figura2 y 12.

El origen es un punto de silla.

3$^{\mathbf{er}}$ **caso:** $\mathbf{0} > \boldsymbol{\lambda_1} > \boldsymbol{\lambda_2}$

En este caso el origen es globalmente asintóticamente estable. El cociente $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ y las trayectorias tienen aspecto de parábolas.

Dado que $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ y teniendo en cuenta (1), (2) y (3):

- si $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el primer cuadrante e y_2 es una función creciente y convexa de y_1;
- si $c_1 < 0$ y $c_2 > 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el segundo cuadrante e y_2 es una función decreciente y convexa de y_1;
- si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el tercer cuadrante e y_2 es una función creciente y cóncava de y_1;
- si $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$ la correspondiente trayectoria se circunscribe en el cuarto cuadrante e y_2 es una función decreciente y cóncava de y_1.

Además, de (2) deducimos que

$$\lim_{y_1 \to 0} \frac{dy_2}{dy_1} = 0$$

por lo que las trayectorias (correspondientes a $c_1 \neq 0$) son tangentes al eje horizontal en el origen.

En este caso ***el origen es un nodo estable***.

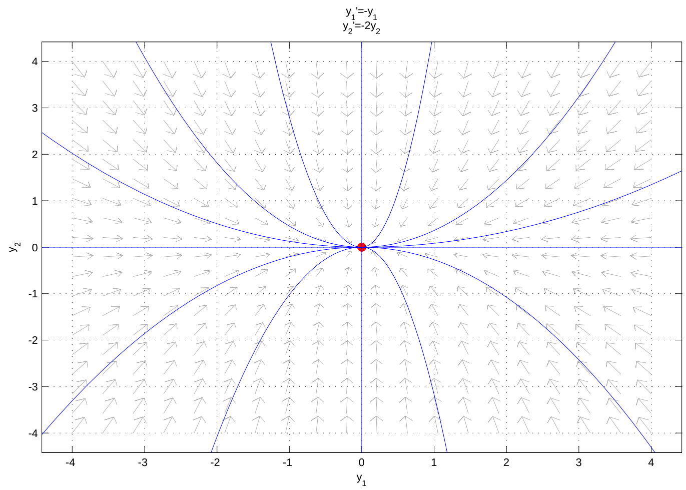


Figura 3. Nodo estable - Sistema $Y' = JY$.

globalmente asintóticamente estable cuando $t \to -\infty$) y el recorrido se hace en el sentido opuesto al origen (ver figuras 4 y 5).

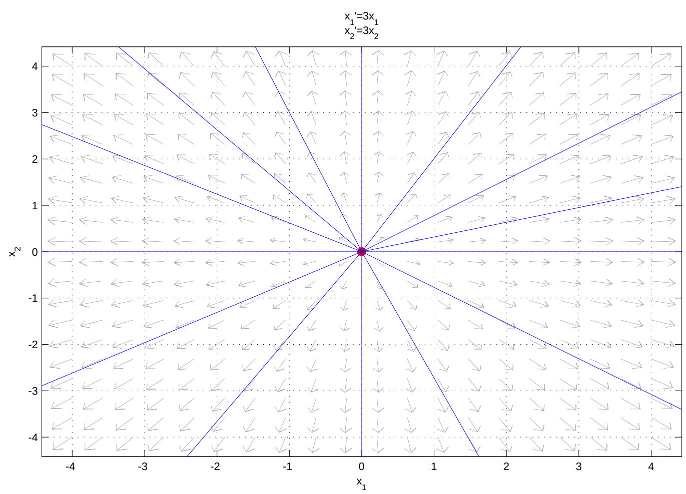


FIGURA 4. Punto estrella inestable $\lambda = 3$.

y las soluciones del sistema $Y' = JY$ son de la forma

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ \end{pmatrix} \quad \text{con } Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \end{pmatrix}$$

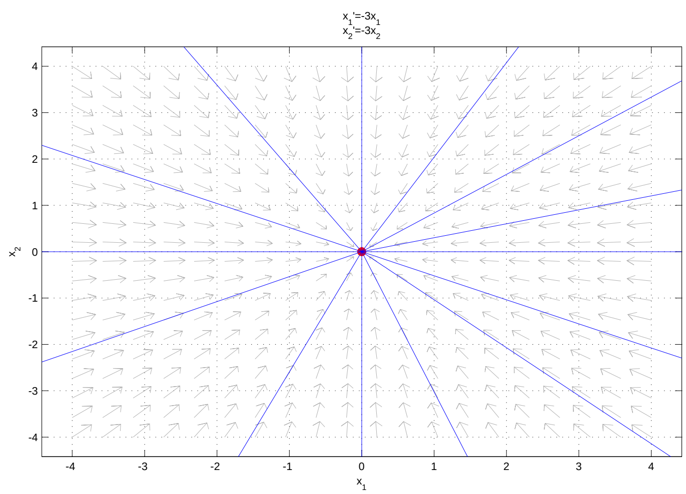


FIGURA 5. Punto estrella estable $\lambda = -2$.

$$y_1 = (c_1 + c_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2}) \frac{y_2}{c_2} = (\frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{c_2}) y_2. \tag{4}$$

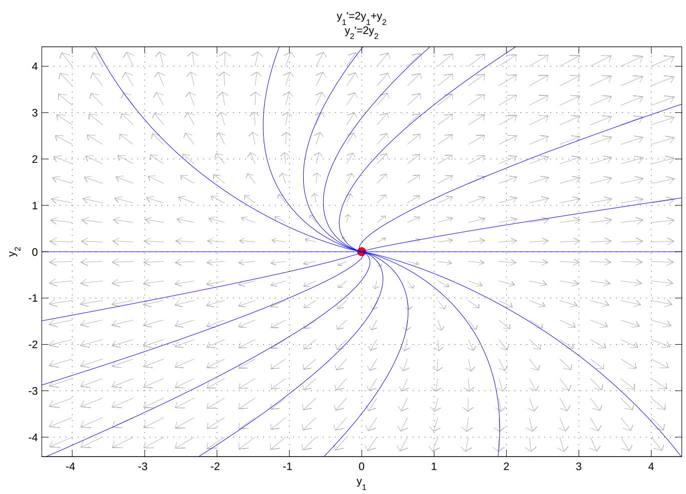


Figura 6. Nodo impropio inestable.

Entonces ***el origen es un nodo impropio inestable***.

Si $\lambda < 0$ el origen es globalmente asintóticamente estable i.e.

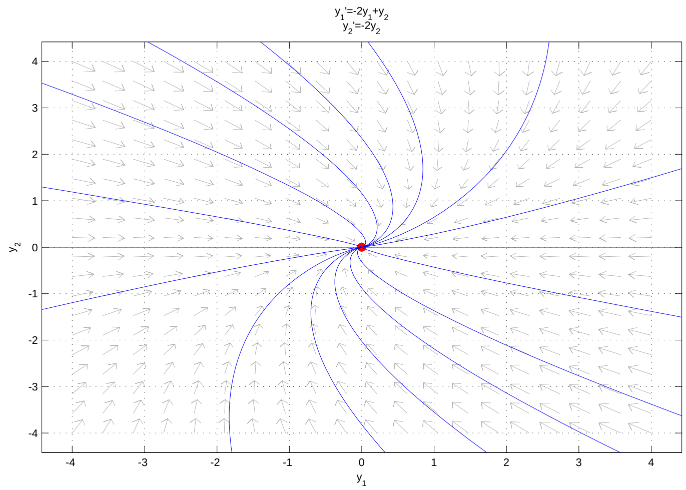


Figura 7. Nodo impropio estable.

luego las trayectorias cruzan esta recta con tangente vertical.

Finalmente, Para $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$ tenemos

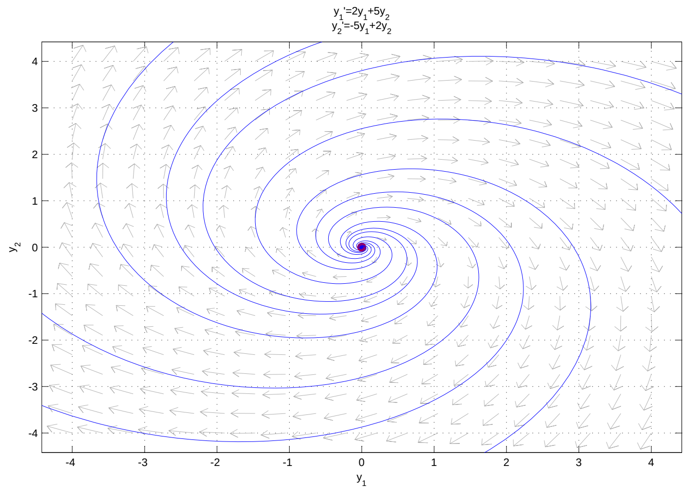


FIGURA 8. Foco inestable.

1.4. A tiene 2 autovalores complejos conjugados, λ y $\bar{\lambda}$. Entonces

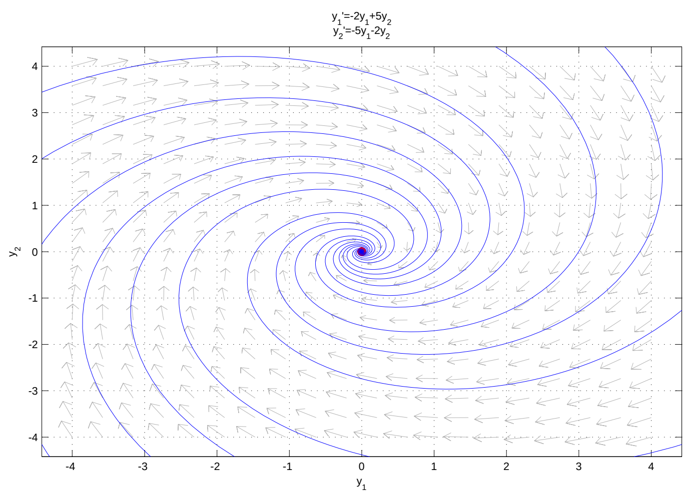


Figura 9. Foco estable.

La matriz fundamental Φ_J del sistema $Y' = JY$ que verifica $\Phi_J(0) = I$ es

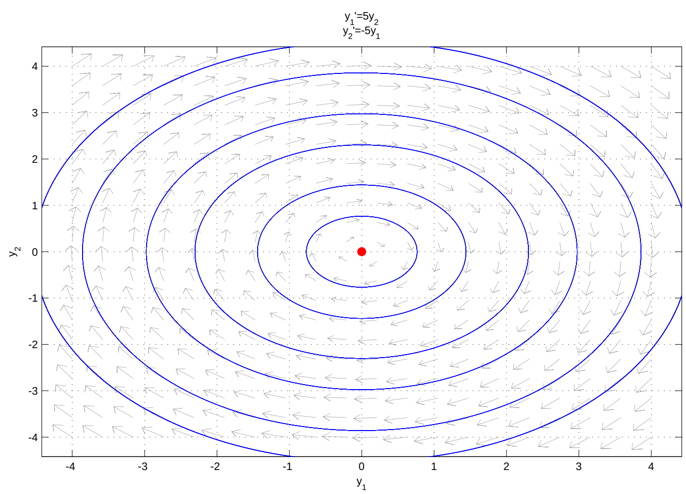


Figura 10. Centro.

es la solución de $Y' = JY$ que satisface

$$Y(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Definimos

$$\left[\begin{array}{l} r = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos\theta \\ \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \operatorname{sen}\theta. \end{array}\right.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{at} r(\cos\theta\ \cos bt + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} bt) &&= e^{at} r\cos(\theta - bt) \\ y_2(t) &= e^{at} r(-\cos\theta\ \operatorname{sen} bt + \operatorname{sen}\theta\cos bt) &&= e^{at} r\operatorname{sen}(\theta - bt). \end{aligned}$$

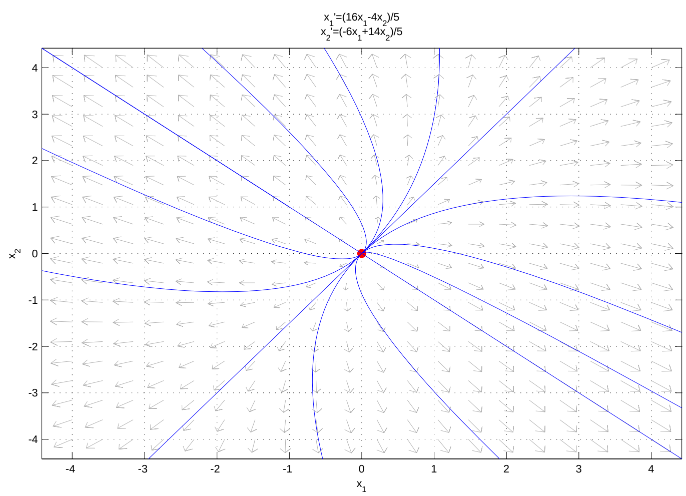
Luego las trayectorias giran alrededor del origen con velocidad angular $-b < 0$ (i.e. en sentido del giro de las agujas del reloj)

- acercándose si $a < 0$, ***el origen es un foco estable*** (es globalmente asintóticamente estable);
- manteniendo la distancia si $a = 0$, entonces ***el origen es un centro*** (es estable);
- alejándose si $a > 0$, ***el origen es un foco inestable***.

Si $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ representa la solución del sistema $Y' = J\,Y$, las soluciones del sistema $X' = A\,X$ vienen dadas por la transformación lineal

$$\mathbf{X(t) = P\,Y(t) = y_1(t)P^1 + y_2(t)P^2}$$

donde P^i son las columnas de P, matriz de paso de A a J.



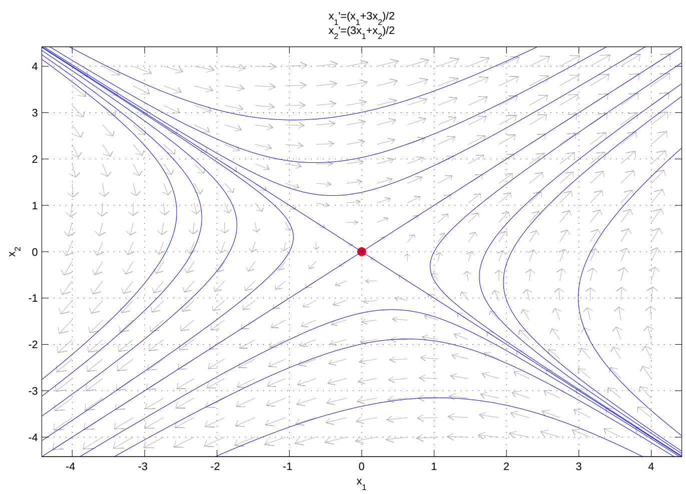


Figura 12. Punto de silla $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

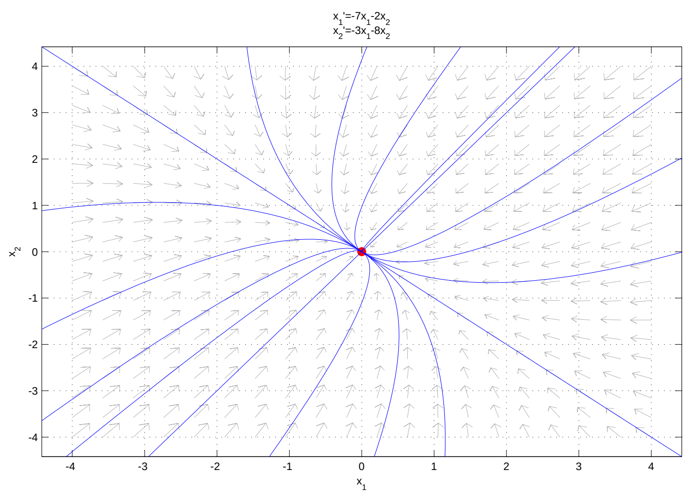


FIGURA 13. Nodo estable $0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

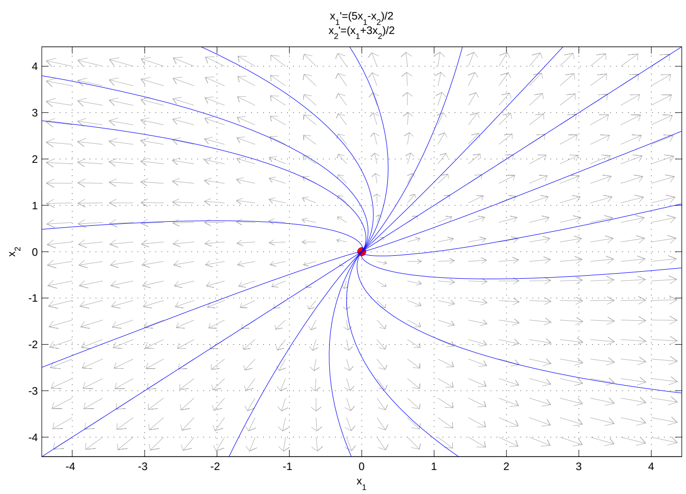


Figura 14. Nodo impropio inestable.

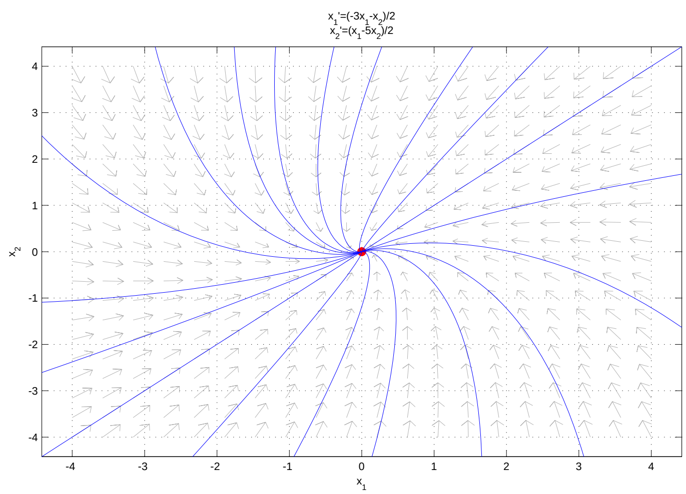


Figura 15. Nodo impropio estable.

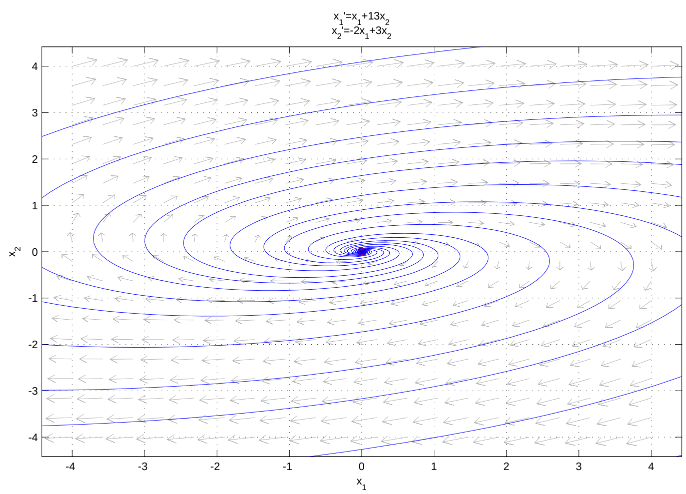


Figura 16. Foco inestable.

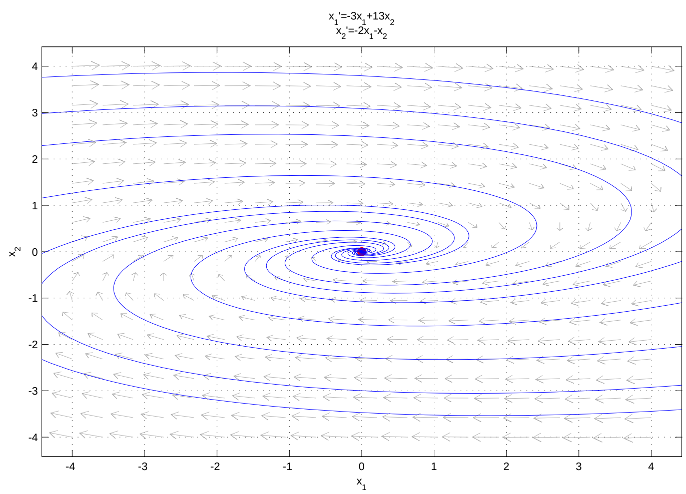


Figura 17. Foco estable.

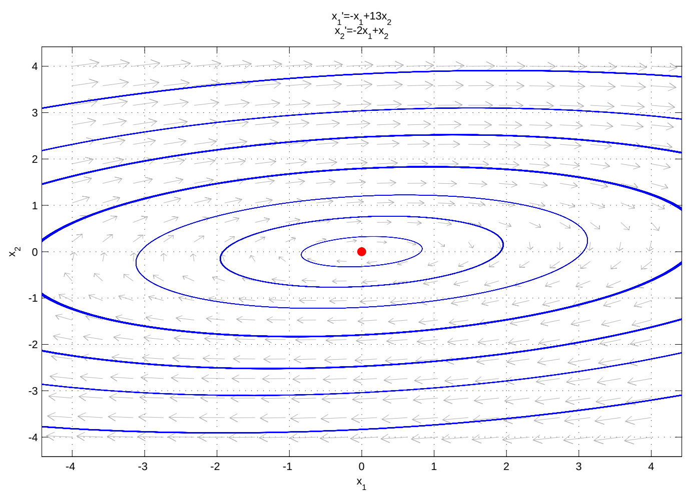


Figura 18. Centro.