3. Sistemas conservativos-Integrales primeras

3.1. Sistema mecánico conservativo. La segunda ley de Newton o ley fundamental de la física establece que la fuerza aplicada a un sistema mecánico es igual al producto de su masa por la aceleración:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f$$

donde $f = f(t, x, \frac{dx}{dt})$. Se dice que un sistema es conservativo si la fuerza aplicada sólo depende de la posición x: $f = f(x)$. Normalizando la masa (hacemos $m = 1$) la ecuación de la segunda ley de Newton da lugar a una ecuación diferencial de segundo orden del tipo:

$$x'' = f(x).$$

Suponemos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ para un intervalo $I \subseteqq I\!\!R$. La ecuación se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) \end{cases}$$

definido en el subconjunto $\Omega = I \times I\!\!R \subseteqq I\!\!R^2$. Los puntos de equilibrio son los puntos $(\bar{x}, 0)$ para $f(\bar{x}) = 0$. Obviamente los puntos de equilibrio están situados sobre el eje de las abscisas. Si x es la posición del sistema, $x' = y$ representa su velocidad entonces los puntos de equilibrio son los puntos con velocidad (y) nula y con aceleración $(f(x))$ nula.

Las trayectorias distintas de los puntos de equilibrio satisfacen la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$$

de variable separable cuya integración lleva a

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E$$

donde E es una constante y

$$U(x) = -\int_{x_m}^{x} f(s)\,ds.$$

Volviendo a la interpretación física, el término $\frac{1}{2}y^2$ representa la energía cinética del sistema de masa $m = 1$ y $U(x)$ representa la energía potencial (definida salvo una constante aditiva). La ecuación de la trayectoria significa que cada trayectoria corresponde a un nivel de energía constante E i.e. la energía total se **conserva** a lo largo de cada trayectoria.

De la ecuación anterior podemos deducir las trayectorias:

$$y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$$

por lo que vemos que estas son simétricas con respecto al eje de las abscisas.

3.2. Integrales primeras.

Definición 3.1. *Dado un sistema $x' = f(x)$ en un abierto $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^n$, con $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sea $E \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ tal que*

- *E no es constante sobre ningún abierto (no vacío) de Ω;*
- *E es constante sobre cada trayectoria del sistema: $E(x(t; x_0)) = E(x_0)$ para todo t del intervalo de definición de la solución.*

Entonces se dice que E es una integral primera del sistema. □

Y

Definición 3.2. *Un sistema que tenga una integral primera se llama sistema conservativo.* □

En el sistema depredador-presa de Lotka -Volterra la función

$$V(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

es una integral primera del sistema. Así mismo, en los sistemas mecánicos conservativos la función de energía total:

$$E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + U(x)$$

constituye también una integral primera del sistema.

Si un sistema $x' = f(x)$ tiene integral primera E, entonces, para todo $x_0 \in \Omega$ tendremos:

$$0 = \frac{dE(x(t; x_0))}{dt} = \nabla E(x(t; x_0)) \cdot x'(t; x_0) = \nabla E(x(t; x_0)) \cdot f(x(t; x_0))$$

para la solución $x(t; x_0)$ en todo t del dominio de definición de la solución, en particular par $t = 0$. Luego tenemos:

Proposición 3.3. *$E \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$ es integral primera del sistema $x' = f(x)$ si, y sólo si,*

$$\nabla E \perp f \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i}(\bar{x}) f_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \Omega. \quad \square$$

Además tenemos

Proposición 3.4. *Si $x' = f(x)$ es un sistema conservativo, entonces no tiene puntos de equilibrio asintóticamente estable, ni completamente inestable ($\Leftrightarrow$ asintóticamente estable cuando $t \to -\infty$).* □

Demostración: Supongamos que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema. Sea E una integral primera del sistema, entonces para algún $\varepsilon > 0$ toda trayectoria que parte de la bola $B(\bar{x}, \varepsilon)$ termina en $\bar{x}$: $x(t; x_0) \to \bar{x}$ cuando $t \to \infty$ para cualquier $x_0 \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ luego dadas las propiedades de E tenemos $E(x_0) = E(x(t; x_0)) \to E(\bar{x})$ cuando $t \to +\infty$, luego, por la continuidad de E tenemos $E(x_0) = E(\bar{x})$ para todo $x_0 \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ lo que contradice la hipótesis de que E no puede ser constante sobre ningún abierto no vacío de Ω.

El caso completamente inestable se trata con el mismo argumento. **Q.E.D.**

Nota 8. *Cuando más adelante veamos los ciclos límite el argumento empleado en la anterior demostración permitirá concluir que un sistema conservativo no puede tener un ciclo límite porque la existencia de un ciclo límite implicaría la existencia de una zona anular en la que la integral primer sería constante.* □

3.3. Integrales primeras y ecuaciones exactas. Supongamos $n = 2$ y sea E una integral primera del sistema conservativo

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

entonces

$$\frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g = 0.$$

Un *condición suficiente* (pero no necesaria) para que esto se cumpla es que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -g, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = f$$

lo cual equivale a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Entonces el cálculo de la integral primera se hace como sigue:

$$E(x,y) = \int f(x,y)dy + h(x) \quad \text{fijando } h \text{ mediante la condición:} \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -g$$

o

$$E(x,y) = \int g(x,y)dx + k(y) \quad \text{fijando } k \text{ mediante la condición:} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = f.$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x' = -y + x^2 + y^2 \\ y' = x - 2xy. \end{cases}$$

Se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

luego el sistema es conservativo y su integral primera se calcula como sigue:

$$E(x,y) = \int f(x,y)dy + h(x) = \int (-y + x^2 + y^2)\, dy + h(x) = -\frac{y^2}{2} + x^2 y + \frac{y^3}{3} + h(x)$$

y, por la otra parte

$$2xy + h'(x) = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = -g(x,y) = 2xy - x$$

por lo que $h(x) = -x^2/2 + c$ *luego*

$$E(x, y) = -\frac{y^2}{2} + x^2 y + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

es una integral primera del sistema.

Si el sistema (3) verifica la condición (4) entonces la ecuación diferencial de las trayectorias,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

da lugar a una ecuación exacta:

$$0 = f(x, y)dy + g(x, y)dx = \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial x}dx.$$

los sistemas que cumplen la condición (3) son llamados sistemas hamiltonianos. Estos tiene entonces la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial E(x, y)}{\partial y} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial E(x, y)}{\partial x}. \end{cases}$$

La función E es entonces la integral primera, se llama hamiltoniano del sistema.

Un sistema conservativo no siempre es un sistema hamiltoniano. Veamos por ejemplo el sistema de Lotka-Volterra estudiado anteriormente:

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx). \end{cases}$$

si calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a - by \neq c - dx = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

lo que deja claro que no tenemos un sistema hamiltoniano con una ecuación diferencial exacta para las trayectorias:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

luego

$$x(a - by)y' + y(c - dx)x' = 0.$$

Sin embargo si introducimos el factor integrante $1/xy$ en la anterior ecuación obtenemos

$$\frac{a - by}{y}y' + \frac{c - dx}{x}x' = 0$$

o lo que es equivalente

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}y' + \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}x' = 0$$

donde
$$V(x,y) = by - a\ln y + dx - c\ln x.$$
En este caso, el sistema de lotka-Volterra no es hamiltoniano pero hemos hallado otro sistema hamiltoniano distinto de Lotka-Volterra pero cuyas trayectorias coinciden.

Ante un sistema no hamiltoniano
$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$$
se puede pues plantear la posibilidad de hallar un “factor integrante”, $\mu(x,y)$, que convierta el sistema en un sistema hamiltoniano:
$$\left\{\begin{array}{l} x' = \mu(x,y)f(x,y) \\ y' = \mu(x,y)g(x,y) \end{array}\right.$$
Este sistema tendrá distintas soluciones pero las mismas trayectorias.