4. Conjuntos límites - Teorema de Poincaré-Bendixson

Ocurre a menudo que una trayectoria tenga un comportamiento asintótico complejo. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Pasando a coordenadas polares tenemos:

$$rr' = xx' + yy' = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = r^2(1 - r^2)$$

luego

$$r' = r(1 - r^2)$$

y

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

luego

$$\frac{\theta'}{\cos^2\theta} = (\tan\theta)' = \frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Expresado en coordenadas polares nuestro sistema se convierte en

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

cuya solución, que pasa por el punto (r_0, θ_0), es

$$\begin{cases} r(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t} + \dfrac{1}{r_0^2} e^{-2t}}} \\ \theta(t) = t + \theta_0. \end{cases}$$

En coordenadas cartesianas tenemos:

$$(5) \qquad \left[\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t} + \dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2} e^{-2t}}} \cos(t + \arctan(y_0/x_0)) \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t} + \dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2} e^{-2t}}} \sin(t + \arctan(y_0/x_0)) \end{array} \right.$$

El dominio de definición de la solución es:

$$\left[\begin{array}{lll} (\alpha,\omega) = & I\!R & \text{para } \sqrt{x_0^2+y_0^2} = r_0 \leq 1, \\ (\alpha,\omega) = & \left(\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\dfrac{1}{r_0^2}\right),+\infty\right) & \\ \quad = & \left(\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}\right),+\infty\right) & \text{para } \sqrt{x_0^2+y_0^2} = r_0 > 1. \end{array}\right.$$

El sistema tiene un punto de equilibrio en el origen y una trayectoria cerrada: $\{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2+y^2 = 1\}$ que corresponde a las soluciones periódicas $(x(t),y(t)) = (\cos(t+\theta_0),\sin(t+\theta_0))$. Las demás soluciones se acercan al círculo de radio 1 cuando $t \to +\infty$ pero no tienen un límite puntual. Más aun, dado cualquier punto (x_0,y_0) fuera del círculo de radio 1 ($x_0+y_0 \neq 1$) y sea $(x(t),y(t)) = (x(t;(x_0,y_0)),y(t;(x_0,y_0)))$ la solución del sistema que verifica $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$ (ver (5)). Si fijamos cualquier $t_0 \geq 0$ y definimos la sucesión $t_k = t_0 + 2k\pi$, teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones sin y cos, tenemos:

$$\left[\begin{array}{l} x(t_k) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2t_k}+\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}e^{-2t_k}}}\cos(t_0+\arctan(y_0/x_0)) \\ y(t_k) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2t_k}+\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}e^{-2t_k}}}\sin(t_0+\arctan(y_0/x_0)) \end{array}\right.$$

luego $(x(t_k),y(t_k)) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} (\cos(t_0+\arctan(y_0/x_0)),\sin(t_0+\arctan(y_0/x_0)))$ que es un punto del círculo de radio 1. De hecho, si t_0, x_0 e y_0 varían, el punto $(\cos(t_0+\arctan(y_0/x_0)),\sin(t_0+\arctan(y_0/x_0)))$ recorre todo el circulo de radio 1, luego cualquier punto del círculo es punto de acumulación de la solución $(x(t),y(t))$.

En la práctica una solución que no tenga su trayectoria en el círculo de radio 1 girará infinitas veces en sentido positivo (opuesto a las agujas del reloj) acercándose al círculo.

4.1. Conjuntos límites. En el anterior ejemplo hemos visto como una solución puede tener un comportamiento asintótico relevante sin que ello se limite a acercarse o alejarse de un punto de equilibrio. Para poder estudiar esos comportamiento es necesario ampliar el concepto de límite de una trayectoria.

Volveremos a la notación de principio donde estudiamos un sistema $x' = f(x)$ con $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; I\!R^2)$.

Definición 4.1. *Sea $x_0 \in \Omega$, se dice que un conjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ atrae la semi-órbita positiva $\gamma^+(x_0)$ (o atrae x_0) si*

$$d(x(t;x_0),\mathcal{O}) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Se dice que $\mathcal{O}$ repele la semi-órbita negativa $\gamma^-(x_0)$ (o repele x_0) si

$$d(x(t;x_0),\mathcal{O}) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\ . \square$$

Más aun

Definición 4.2. *Sea $x_0 \in \Omega$ y supongamos que $\overline{\gamma^+(x_0)}$ es un subconjunto* ***acotado*** *de Ω. Un punto $y \in \Omega$ es omega-límite de $\gamma^+(x_0)$ si existe una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\in N}$ con $t_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que*

$$y = \lim_{k\to+\infty} x(t_k; x_0).$$

El conjunto de todos los puntos omega-límite de $\gamma^+(x_0)$ se denomina conjunto omega-límite de $\gamma^+(x_0)$ o conjunto omega-límite de x_0 y se denota $\omega(x_0)$ o $\omega(\gamma^+(x_0))$. $\square$

Nota 9. *De una forma similar se definen los conjuntos alfa-límite: un conjunto es alfa-límite si, cambiando t por $-t$ el conjunto es omega-límite i.e. dado $x_0 \in \Omega$, un conjunto es alfa-límite de x_0 o de $\gamma^-(x_0)$ para el sistema $x' = f(x)$ si, y sólo si, este conjunto es el conjunto omega-límite de x_0 o de $\gamma^+(x_0)$ del sistema $x' = -f(x)$.* $\square$

Los conjuntos límites satisfacen las siguientes propiedades:

Teorema 4.3. *Sea $x_0 \in \Omega$ y supongamos que $\overline{\gamma^+(x_0)}$ es un subconjunto acotado de Ω entonces, $\omega(x_0)$ es no vacío, acotado, cerrado, conexo, invariante y atrae a $\gamma^+(x_0)$.* $\square$

Exceptuando el último ejemplo, los conjuntos omega-límites con los que nos hemos encontrados eran conjuntos formados por un único punto, un punto de equilibrio del sistema. En el anterior ejemplo hemos visto que la trayectoria cerrada de las soluciones periódicas es un conjunto omega-límite de todos los puntos salvo el origen que es un punto de equilibrio.

4.2. Ciclos límites - Criterios de existencia.

Definición 4.4. *Un conjunto límite (omega o alfa) que conste de una única órbita periódica se denomina ciclo límite.* $\square$

A continuación veremos algunos criterios que permiten saber si existe o no existe un ciclo límite.

Teorema 4.5. *Sea Ωun dominio abierto de $I\!R^2$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; I\!R^2)$, entonces una trayectoria cerrada del sistema $x' = f(x)$ rodea siempre un punto de equilibrio.* $\square$

La demostración de este teorema es relativamente sencilla y se basa en el concepto de "índice de una curva" (ver[**?**]).

El teorema plantea una condición necesaria para la existencia de una trayectoria cerrada del sistema: la existencia de un punto de equilibrio. **¡Si no hay punto de equilibrio no hay trayectoria cerrada!**

El siguiente teorema nos proporciona un criterio negativo:

Teorema 4.6. *Sea Ω un dominio abierto de $I\!R^2$ y sea $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; I\!R^2)$, Si en un subconjunto $\mathcal{O}$ de Ω $\mathrm{div} f = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$ no cambia de signo, entonces no existe solución periódica.* $\square$

La demostración se basa en la fórmula de Green.

De todos los resultados expuestos en esta sección, sinduda el más importante es el siguiente teorema de ***Poincaré-Bendixson***:

Teorema 4.7. *Sea* $x_0 \in \Omega$ *y supongamos que* $\overline{\gamma^+(x_0)}$ *es un subconjunto acotado de* Ω*. Entonces, si* $\omega(x_0)$ *no contiene ningún punto de equilibrio,* $\gamma^+(x_0)$ *es una solución periódica oconverge a una solución periódica i.e.* $\omega(x_0)$ *es una curva simple cerrada trayectoria de una solución periódica.* $\square$

Para terminar esta sección enunciamos el teorema de ***Levinson-Smith***:

Teorema 4.8. *Consideremos la ecuación escalar* $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ *con* $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$*, con* f *par y con* g *es impar siendo* $xg(x) > 0$ *si* $x \neq 0$*; sean* $F(s) \stackrel{def}{=} \int_0^s f(r)\,dr$ *y* $G(s) \stackrel{def}{=} \int_0^s g(r)\,dr$ *tales que* $F(s), G(s) \stackrel{s\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*; suponemos que existe* $s_0 > 0$ *tal que* $F(s_0) = 0$*,* $F(s) < 0$ *para todo* $0 < s < s_0$ *y* $F(s) > 0$ *para todo* $s > s_0$*. Entonces, la ecuación* $x''+f(x)x'+g(x) = 0$ *tiene un único ciclo límite que atrae a todas las trayectorias excepto el origen (que es un punto de equilibrio).* $\square$