5. El método directo de Liapunov

En esta última parte vamos a considerar un método directo para el estudio de la estabilidad de un punto de equilibrio: el método de Liapunov debido a este matemático ruso. En algunos casos el método de Liapunov nos permitirá estudiar, más allá de la estabilidad de los puntos de equilibrio, el comportamiento asintótico de las soluciones en casos en los que no podemos concluir, en particular cuando uno de los autovalores del sistema linealizado es 0 o tiene parte real nula. Como ejemplo estudiemos el sistema:

$$\begin{cases} x' = y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Comprobamos que el único punto de equilibrio del sistema es el origen. En efecto, supongamos que $x' = 0$ e $y' = 0$ entonces tenemos que $x'x + y'y = 0$ pero multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y sumando obtenemos que

$$x'x + y'y = \alpha(x^2 + y^2)^2 \tag{6}$$

por lo que deducimos que $x'x + y'y = 0$ implica que $x = 0$ e $y = 0$. Calculando la matriz jacobiana en $(0, 0)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspondiente al sistema lineal

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Los autovalores de la matriz jacobiana son i y $-i$, luego el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema linealizado pero estamos ante un caso crítico, autovalores con parte real nula, que no permite equiparar el caso no lineal con el caso linealizado.

Para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones en el entorno del origen observemos que (6) equivale a

$$(r^2)' = 2\alpha r^4$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 = V(x, y)$. Luego, si $\alpha > 0$ r^2 crece y si $\alpha \leq 0$ r^2 decrece por lo que podemos deducir que si $\alpha > 0$ el origen es inestable y si $\alpha \leq 0$ el origen es estable, en particular para $\alpha < 0$ será asintóticamente estable.

Consideremos el siguiente ejemplo procedente de la mecánica:

$$m\, x'' + \nu\, x' + k\, x = 0$$

donde x representa el movimiento del centro de gravedad de un cuerpo de masa $m > 0$ sujeto a un muelle de rigidez" $k > 0$ moviendose en un medio de viscosidad $\nu \geq 0$. En este caso el correspondiente sistema de primer orden es:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{\nu}{m}y. \end{cases}$$

En este caso el sistema es lineal y la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\nu}{m} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $det(A) = k/m > 0$ por lo que el único punto de equilibrio del sistema es el origen, $(0,0)$. En este caso la estabilidad se puede deducir del cálculo de las raices del polinomio característico,

$$det(A_\lambda I) = \lambda^2 + \frac{\nu}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

que son

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{\nu}{m} + \sqrt{\frac{\nu^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-\frac{\nu}{m} - \sqrt{\frac{\nu^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

que serán reales o complejas conjugadas, según que $\nu^2/m^2 \geq 4k/m$ o que $\nu^2/m^2 < 4k/m$, ambas negativas o con parte real negativa, excepto en el caso $\nu = 0$ en el que los dos autovalores tienen parte real nula (este corresponde a una vicosidad nula del medio es decir que el medio no frena el movimiento). Es decir que si $\nu^2/m^2 > 4k/m$ tenemos dos autovalores reales negativos distintos, luego el origen es un nodo estable; si $\nu^2/m^2 = 4k/m$ tenemos un autovalor negativo doble, luego el origen es un punto estrella estable; si $0 < \nu^2/m^2 < 4k/m$ tenemos dos autovalores complejos conjugados con parte real negativa, luego el origen es un foco estable; finalmente si $\nu = 0$ el origen es un centro. En definitiva para $\nu > 0$ el origen es asintóticamente estable y para $\nu = 0$ es estable.

Estos resultados cualitativos pueden obtenerse del estudio directo. En el sistema la energía cinética, E_c y la energía potencial, E_p, vienen dadas por

$$E_c = \frac{1}{2} m\, y^2 \quad \text{y} \quad E_p = \int_0^x k\, s\, ds = \frac{1}{2} k\, x^2;$$

luego la energía global será

$$E(x,y) = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\, y^2 + \frac{1}{2} k\, x^2.$$

Es obvio que E es siempre positiva excepto en el origen donde alcanza el mínimo 0. Si derivamos la energía $E(x,y)$ a lo largo de las trayectorias obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dE(x(t),y(t))}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial E}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \\
&= kxx' + myy' = kxx' + my\left(-\frac{k}{m}x - \frac{\nu}{m}y\right) \\
&= -\nu y^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Calculando la matriz hesiana de E

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

constatamos que la función E es convexa luego sus curvas de nivel son curvas cerradas. Entonces para $\nu = 0$ tenemos trayectorias cerradas correspondientes a soluciones periódicas luego el origen es estable. Para $\nu > 0$ se comprueba fácilmente que

$$\frac{1}{2}(my(t)^2 + kx(t)^2 = E(x(t), y(t)) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

luego

$$(x(t), y(t)) \xrightarrow{t\to\infty} (0, 0).$$

Tanto la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ del primer ejemplo como la función $E(x, y) = my^2 + kx^2$ del ejemplo anterior son funciones de Liapunov.

Consideremos un sistema autónomo plano definido por

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{array}\right. \tag{7}$$

donde f y $g \in \mathcal{C}^1(\Omega; I\!R)$, siendo Ω un abierto conexo de $I\!R^2$. Supondremos que el sistema tiene un punto de equilibrio aislado. Sin que sea ninguna restricción podemos suponer que el punto de equilibrio es el origen $(0, 0)$. *Si el punto crítico es un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ distinto del origen nos situamos en el origen mediante una translación de coordenadas: $\hat{x} = x - \bar{x}$, $\hat{y} = y - \bar{y}$.* Por el mismo procedimiento siempre podemos considerar que el origen está en Ω.

Sea $\mathcal{O} \subset \Omega$ un entorno del origen y sea $E \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}; I\!R)$. Consideremos un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ y la trayectoria $\gamma(x_0, y_0)$ que pasa por ese punto. Sea $(x(t), y(t))$ una solución maximal del sistema (7) definida sobre un intervalo (α, ω) que pasa por (x_0, y_0) en $t = 0$: $(x(0), y(0) = (x_0, y_0)$. Sea $C = \mathcal{O} \cap \gamma(x_0, y_0)$ entonces definimos $\mathcal{E} : \ t \mapsto E(x(t), y(t)) = \mathcal{E}(t)$ es una función de $\mathcal{C}^1$ en cualquier t tal que $(x(t), y(t)) \in C$, que verifica:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g \end{aligned} \tag{8}$$

Definición 5.1. *E es una función de Liapunov de (7) en un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}$ si*

$$\nabla E \cdot (f, g) \leq 0$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{S}$. E es una función de Liapunov estricta de (7) en un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}$ si

$$\nabla E \cdot (f, g) < 0$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{S}$ que no sea punto de equilibrio.

Definición 5.2. *Sea un entorno $\mathcal{O}$ de $(0, 0)$ y sea E una función definida en $\bar{\mathcal{O}}$, con $E(0, 0) = 0$. Entonces*

- *E es semi-definida positiva si $E(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{O}$.*
- *E es definida positiva si $E(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{O}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.*

- *E es semi-definida negativa si* $E(x, y) \leq 0$ *para todo* $(x, y) \in \mathcal{O}$.
- *E es definida negativa si* $E(x, y) < 0$ *para todo* $(x, y) \in \mathcal{O}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.
- *E es indefinida si toma tanto valores positivos como negativos en cualquier entorno de* $(0, 0)$.

□

Teorema 5.3. *Consideremos el sistema (7) con un punto de equilibrio en el origen.*

- *Supongamos que E es una función de Liapunov para un entorno* $\mathcal{S}$ *del origen. Entonces si E es definida positiva en* $\mathcal{S}$, *el origen es un punto de equilibrio estable.*
- *Supongamos que E es una función de Liapunov estricta para un entorno* $\mathcal{S}$ *del origen. Entonces si E es definida positiva en* $\mathcal{S}$, *el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*