Del teorema 1.2 podemos deducir

Corolario 1.5. *Sea* $(\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo no necesariamente acotado*[1] *y sea* f *una función de* $\mathcal{C}^0((\alpha, \omega) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *lipschitziana sobre* $(\alpha, \omega) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$*. Entonces, para todo* $(t_0, x_0) \in (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \textit{para } t \in (\alpha, \omega), \\ x(t_0) = x_0. & \square \end{cases}$$

Demostración. Consideremos dos sucesiones $(\alpha_k)_{k \in N}$ y $(\omega_k)_{k \in N}$ tales que

$$\left[\begin{array}{lll} \alpha < \alpha_{k+1} < \alpha_k < t_0 & \forall\, k \in \mathbb{N}, & \alpha_k \overset{k\to\infty}{\to} \alpha, \\ \omega > \omega_{k+1} > \omega_k > t_0 & \forall\, k \in \mathbb{N}, & \omega_k \overset{k\to\infty}{\to} \omega. \end{array} \right.$$

Aplicando el teorema 1.2 sabemos que el problema

$$(\mathrm{PVI(k)}) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \text{para } t \in (\alpha_k, \omega_k), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

posee una única solución que notamos x_k. Es obvio comprobar que para cualquier $m \leq k$ la restricción de x_k a $[\alpha_m, \omega_m]$ es solución de (PVI(m)) luego, por la unicidad de la solución de (PVI(m)) tenemos

$$x_k(t) = x_m(t) \quad \text{para todo } k,\, m \in \mathbb{N} \text{ tales que } k \geq m \text{ y para todo } t \in [\alpha_m, \omega_m].$$

Luego, teniendo en cuenta que

$$(\alpha, \omega) = \bigcup_{k \in N} [\alpha_k, \omega_k]$$

definimos la función x como:

$$\text{para todo } t \in [\alpha, \omega] \quad x(t) = x_k(t) \quad \text{siendo } k \text{ cualquier entero tal que } t \in [\alpha_k, \omega_k].$$

Se comprueba trivialmente que x es solución del problema de valor inicial (11). **Q.E.D.**

Con alguna ligera modificación se puede demostrar que

Corolario 1.6. *Sea* $\alpha > -\infty$ *(respectivamente* $\omega < +\infty$*), sea* $I = [\alpha, \omega) \subseteq \mathbb{R}$ *(respectivamente* $I = (\alpha, \omega] \subseteq \mathbb{R}$*) un intervalo no necesariamente acotado y sea* f *una función de* $\mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *lipschitziana sobre* $I \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$*. Entonces, para todo* $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \textit{para } t \in I, \\ x(t_0) = x_0. & \square \end{cases}$$

[1]Abusando de la notación incluimos la posibilidad que $\alpha = -\infty$ o que $\omega = +\infty$.

1.3. Existencia local y unicidad.

Teorema 1.7. *Sea $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times \mathcal{O}; I\!R^{\mathrm{n}})$ donde $[a,b]$ es un intervalo cerrado de $I\!R$ y $\mathcal{O}$ es un abierto de $I\!R^n$. Suponemos que f es lipschitziana, de constante L, respecto a x en el dominio $[a,b] \times \mathcal{O}$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathcal{O}$ existe un intervalo $[a_0, b_0]$ con $t_0 \in [a_0, b_0] \subseteq [a,b]$ tal que el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \quad \text{para todo } t \in [a_0, b_0] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{13}$$

tenga una única solución $x \in \mathcal{C}^1[a_0, b_0]$.

Además, podemos establecer la siguiente estimación para el intervalo $[a_0, b_0]$. Sean

$$\begin{cases} \delta_0 > 0 \quad \text{tal que la bola cerrada } B_0 = \{x \in I\!R^{\mathrm{n}} / \|x - x_0\| \leq \delta_0\} \subset \mathcal{O}, \\ M = \max\limits_{t \in [a,b]} \|f(t, x_0)\|, \end{cases} \tag{14}$$

entonces

$$\left[\begin{array}{ll} a_0 = \max(a, t_0 - \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) & \left(= t_0 - \min(t_0 - a, \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) \right) \\ b_0 = \min(b, t_0 + \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) & \left(= t_0 + \min(b - t_0, \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) \right). \end{array} \right. \tag{15}$$ □

Demostración:

Nota 3. *Como primer paso en la demostración de este teorema intentaremos dar una idea del por qué de esta estimación de $[a_0, b_0]$.*

En primer lugar veamos que el término $(M + L\delta_0)(t - t_0)$ constituye una estimación o cota a priori del crecimiento de una eventual solución dentro de la bola B_0. En efecto, supongamos que en el entorno (t_1, t_2) de t_0 la solución $x(t)$ se mantenga en la bola B_0, entonces, como

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{16}$$

para $t \in (t_1, t_2)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0) + f(s, x(s)) - f(s, x_0)\|\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\|\, ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\|\, ds \right| \\ &\leq M|t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - x_0\|\, ds \right| < (M + L\delta_0)|t - t_0|. \end{aligned} \tag{17}$$

Por otra parte, si notamos t_1 el último instante antes de t_0 en el que $x(t_1)$ estuvo en el borde de B_0 y t_2 el primer instante después de t_0 en el que $x(t_2)$ estará en el borde de B_0, entonces, para todo $t \in (t_1, t_2)$ tendremos $\|x(t) - x_0\| < \delta_0$ y, según (17),

$$\delta_0 = \|x(t_i) - x_0\| < (M + L\delta_0)|t_i - t_0| \quad \textit{para } i = 1, 2,$$

de lo que obtenemos:

$$\left[\begin{array}{l} t_2 - t_0 > 0 : \quad M(t_2 - t_0) + L\delta_0(t_2 - t_0) > \delta_0 \quad \Rightarrow \quad t_2 > t_0 + \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0} \geq b_0 \\ \\ t_1 - t_0 < 0 : \quad M(t_0 - t_1) + L\delta_0(t_0 - t_1) > \delta_0 \quad \Rightarrow \quad t_1 < t_0 - \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0} \leq a_0. \end{array}\right.$$

Luego, en el intervalo (a_0, b_0), delimitado por las cotas establecidas en el teorema, una eventual solución del problema de valor inicial (13) permanecería dentro de la bola B_0. $\diamond$

En lo sucesivo a_0 y b_0 son las cotas definidas en el teorema. Llamaremos χ a la aplicación definida por:

$$\chi : I\!R^n \mapsto B_0, \quad \chi(y) = x_0 + (y - x_0) \min\left(1, \frac{\delta_0}{\|y - x_0\|}\right).$$

Comprobamos fácilmente que χ es lipschitziana y que:

$$\|\chi(y) - \chi(z)\| \leq \|y - z\| \quad \text{para todo par } (y, z) \in I\!R^{\mathrm{n}} \times I\!R^{\mathrm{n}}.$$

Definimos la función $F \in \mathcal{C}^0([a, b] \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ como

$$F(t, y) = f(t, \chi(y)) \quad \text{para todo } (t, y) \in [a, b] \times I\!R^{\mathrm{n}},$$

luego esta función es lipschitziana sobre $[a, b] \times I\!R^{\mathrm{n}}$ y su constante es L, la misma que la de f dado que

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| = \|f(t, \chi(y)) - f(t, \chi(z))\| \leq L\|\chi(y) - \chi(z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Nota 4. *Atendiendo a la nota 3 del principio de esta demostración, cualquier eventual solución del problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = F(t, x) \quad \textit{para todo } t \in [a_0, b_0], \\ x(t_0) = x_0, \end{array}\right. \tag{18}$$

estará contenida en la bola B_0 por lo que $x(t) = \chi(x(t))$ y $F(t, x(t)) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [a_0, b_0]$, resultando ser también solución del problema de valor inicial (13). Del mismo modo cualquier solución del problema de valor inicial (13) será solución del problema de valor inicial (18).

Dado que el teorema 1.2 garantiza la existencia y unicidad de la solución de (18) deducimos la existencia y unicidad de solución de (13). **Q.E.D.**

Uno comprueba trivialmente que

Corolario 1.8. *Las conclusiones del teorema 1.7 siguen siendo válidas si en su enunciado sustituimos* $[a, b]$ *y* $[a_0, b_0]$ *por* $[a, b)$ *y* $[a_0, b_0)$*, por* $(a, b]$ *y* $(a_0, b_0]$ *o por* (a, b) *y* (a_0, b_0)*.*

1.4. Existencia sin condición de Lipchitz: Teorema de Peano. Aún sin la condición de Lipchitz podemos demostrar la existencia de soluciones.

Teorema 1.9. (Teorema de existencia local de Peano) *Sea* $f(t, x)$ *una función continua en un conjunto abierto* $\mathcal{D}$*. Entonces, para cualquier* (t_0, x_0) *de* $\mathcal{D}$ *existe* $a > 0$ *tal que el problema de valor inicial*

$$x' = f(t, x) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{19}$$

tenga, al menos, una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$*.* □

Demostración. Sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y sean τ_0 y δ_0 tales que el conjunto $\mathcal{A} = [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \{x \in I\!R^n \,/\, \|x - x_0\| \le \delta_0$ esté contenido en $\mathcal{D}$. Sea

$$M = \max_{\mathcal{A}} \|f(t, x)\|.$$

Definimos

$$a = \min\left(\tau_0, \frac{\delta_0}{M}\right).$$

Nos damos $0 < h_0 < a$ y construimos una familia de funciones $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$.

Para cada $h \in (0, h_0)$, para $i = 0, 1, 2, \cdots, k_h, k_h+1$, tal que $k_h h < a \le (k_h+1)h$ definimos

$$t^h_{\pm i} = t_0 \pm ih$$

y construimos

$$\varphi^h_{\pm(i+1)} = \varphi^h_{\pm i} \pm hf(t^h_{\pm i}, \varphi^h_{\pm i}), \quad \text{fijando } \varphi^h_0 = x_0 \text{ para todo } h \tag{20}$$

y obtenemos las poligonales de Euler:

$$\varphi_h(t) = \varphi^h_i + \frac{t - t^h_i}{h}\left(\varphi^h_{i+1} - \varphi^h_i\right) \tag{21}$$

para $t \in [t^h_i, t^h_{i+1}] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ y para $i = -k_h - 1, -k_h, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k_h$.

Veamos que $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia uniformemente acotada y equicontinua sobre el intervalo $[t_0-a, t_0+a]$. Dado que M es la cota superior de $\|f(t, x)\|$ sobre $\mathcal{A}$, se comprueba fácilmente que

$$\|\varphi_h(t) - \varphi_h(t')\| \le M|t - t'| \quad \text{para todo } t \text{ y } t' \in [t_0 - a, t_0 + a], \tag{22}$$

por lo que $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia equicontinua sobre el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

De (22), teniendo en cuenta que $\varphi_h(t_0) = x_0$, deducimos también que

$$\|\varphi_h(t)\| \le \|x_0\| + M|t - t_0| \le \|x_0\| + Ma, \tag{23}$$

luego $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia uniformemente acotada sobre el intervalo $[t_0-a, t_0+a]$.

Aplicando el teorema de Ascoli-Arzela (ver Apéndice) podemos extraer de esta familia una sucesión infinita, denotada por $(\varphi_{h_n})_{(n\in N)}$, uniformemente convergente sobre $[t_0-a, t_0+a]$ cuando $n\to\infty$ (es decir cuando $h_n\to 0$). Llamemos φ al límite de la sucesión, entonces $\varphi\in\mathcal{C}([t_0-a,t_0+a];I\!R^n)$.

Vamos a comprobar que φ es solución del problema de valor inicial (19). Nos situamos en el caso en que $t_{i+1}^{h_n}\geq t\geq t_i^{h_n}\geq t_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi_{h_n}(t) &= \varphi_i^{h_n}+\frac{t-t_i^{h_n}}{h_n}\left(\varphi_{i+1}^{h_n}-\varphi_i^{h_n}\right)\\
&\overset{(20)\Rightarrow}{=} \varphi_i^{h_n}+(t-t_i^{h_n})f(t_i^{h_n},\varphi_i^{h_n})\\
&\overset{\text{dado que }(t_i^{h_n},\varphi_i^{h_n})\text{ no depende de }s}{=} \varphi_i^{h_n}+\int_{t_i^{h_n}}^{t} f(t_i^{h_n},\varphi_i^{h_n})ds.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

También, de (20) tenemos

$$
\left[\begin{aligned}
\varphi_i^{h_n} &= \varphi_{i-1}^{h_n}+h_n f(t_{i-1}^{h_n},\varphi_{i-1}^{h_n})\\
&= \varphi_{i-1}^{h_n}+\textstyle\int_{t_{i-1}^{h_n}}^{t_i^{h_n}} f(t_{i-1}^{h_n},\varphi_{i-1}^{h_n})ds\\
&= \varphi_{i-2}^{h_n}+\textstyle\int_{t_{i-2}^{h_n}}^{t_{i-1}^{h_n}} f(t_{i-2}^{h_n},\varphi_{i-2}^{h_n})ds+\int_{t_{i-1}^{h_n}}^{t_i^{h_n}} f(t_{i-1}^{h_n},\varphi_{i-1}^{h_n})ds\\
&\dots\\
&= x_0+\textstyle\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n},\varphi_j^{h_n})ds;
\end{aligned}\right.
\tag{25}
$$

de (24) y de (25) obtenemos

$$
\varphi_{h_n}(t)=x_0+\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n},\varphi_j^{h_n})ds+\int_{t_i^{h_n}}^{t} f(t_i^{h_n},\varphi_i^{h_n})ds.
\tag{26}
$$

La parte derecha de la anterior identidad la podemos escribir como:

$$
\begin{aligned}
(27) \quad x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) ds + \int_{t_i^{h_n}}^{t} f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) ds \\
= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \\
+ \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} (f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds \\
+ \int_{t_i^{h_n}}^{t} (f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds.
\end{aligned}
$$

De (26) y de (27) deducimos

$$
\begin{aligned}
(28) \quad & \|\varphi_{h_n}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds\| \\
& = \| \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} (f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds \\
& \quad + \int_{t_i^{h_n}}^{t} (f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds \| \\
& \leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} \big(\|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(t_j^{h_n})))\| \\
& \quad + \|f(s, \varphi(t_j^{h_n}))) - f(s, \varphi(s))\| \big) ds \\
& \quad + \int_{t_i^{h_n}}^{t} \big(\|(f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s, \varphi(t_i^{h_n})))\| \\
& \quad + \|f(s, \varphi(t_i^{h_n}))) - f(s, \varphi(s))\| \big) ds,
\end{aligned}
$$

donde, para $j = 0, 1, \cdots, i$, hemos acotado

$$
\begin{aligned}
& \|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(s)))\| \\
& \qquad \leq \|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(t_j^{h_n})))\| + \|f(s, \varphi(t_j^{h_n}))) - f(s, \varphi(s))\|.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que

$$
\left[\begin{array}{l}
\|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(t_j^{h_n})))\| \leq \omega_f(h_n + \varepsilon_n) \\
\|f(s, \varphi(t_j^{h_n}))) - f(s, \varphi(s))\| \leq \omega_f(\omega_\varphi(h_n))
\end{array} \right.
$$

donde ω_f y ω_φ representan respectivamente los módulos de continuidad de las funciones f y φ:

$$\left[\begin{array}{lll} \omega_f(\varepsilon) = \displaystyle\max_{\substack{(t,y),\,(\tau,z)\in\mathcal{A}\\ |t-\tau|+\|y-z\|<\varepsilon}} \|f(t,y)-f(\tau,z)\| & \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \omega_\varphi(\eta) = \displaystyle\max_{\substack{t,\,\tau\in[t_0-a,t_0+a]\\ |t-\tau|<\eta}} \|\varphi(t)-\varphi(\tau)\| & \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{array}\right.$$

y

$$\varepsilon_n = \max_{t\in[t_0-a,t_0+a]} |\varphi^{h_n}(t)-\varphi(t)| \stackrel{h_n\to 0}{\longrightarrow} 0$$

De lo anterior deducimos que

$$\|\varphi_{h_n}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\| \leq (t-t_0)\left(\omega_f(h_n+\varepsilon_n) + \omega_f(\omega_\varphi(h_n))\right)$$

El término izquierdo de la desigualdad converge a

$$\|\varphi(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\|$$

mientras que el segundo converge a 0 de lo que concluimos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$$

para todo $t \in [t_0, t_0+a]$. Un razonamiento similar para el caso en que $t \in [t_0-a, t_0]$ que φ es solución de

$$x' = f(t,x) \quad \text{con } x(t_0) = x_0$$

sobre el intervalo $[t_0-a, t_0+a]$. **Q.E.D.**

Apéndice

Teorema de Ascoli-Arzelà *Sea $(\varphi_\sigma)_{(\sigma\in\mathfrak{S})}$ una familia de funciones de $\mathcal{C}([\alpha,\omega];I\!R^n)$ tal que*

- *$(\varphi_\sigma)_{(\sigma\in\mathfrak{S})}$ es uniformemente acotada i.e. existe M tal que $\|\varphi(t)\| \leq M$ para todo $t\in[\alpha,\omega]$,*
- *$(\varphi_\sigma)_{(\sigma\in\mathfrak{S})}$ es equicontinua i.e. para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo t y todo τ de $[\alpha,\omega]$ tales que $|t-\tau| < \delta$, tenemos $\|\varphi_\sigma(t) - \varphi_\sigma(\tau)\| < \varepsilon$.*

Entonces se puede extraer de $(\varphi_\sigma)_{(\sigma\in\mathfrak{S})}$ una sucesión $(\varphi_{\sigma_k})_{(k\in N)}$ uniformemente convergente. $\square$