Ecuaciones Diferenciales

Estudio cualitativo de sistemas autónomos
Conjuntos omega-límite
Hoja 5

1 *Sea el sistema autónomo no lineal*

$$\begin{cases} x' = 4x + 4y - x(x^2+y^2) \\ y' = -4x + 4y - y(x^2+y^2). \end{cases}$$

1. *Expresar el sistema en coordenadas polares.*
2. *Aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que hay una trayectoria cerrada entre los círculos $r = 1$ y $r = 3$.*
3. *Hallar la solución general no constante $(x(t), y(t))$ del sistema original y utilizar ésto para encontrar una solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada del apartado anterior.*
4. *Esbozar le diagrama de fases del sistema.*

2 *Demostrar que el sistema autónomo*

$$\begin{cases} x' = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ y' = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

tiene una solución periódica.

3 *Demostrar que el sistema*

$$\begin{cases} x' = y + x\dfrac{f(r)}{r}, \\ \\ y' = -x + y\dfrac{f(r)}{r}, \end{cases}$$

$(r^2 = x^2+y^2)$ *con $f(r)$ suficientemente regular tiene ciclos límite correspondientes a los ceros de $f(r)$.* *Esbozar los diagramas de fase para las funciones:*

$$a)\ f(r) = r(r-3)^3(r^2-5r+4), \quad b)\ f(r) = r(\mu - r^2)(\mu - r^4),\ \mu \geq 0 \quad c)\ f(r) = \sin r.$$

4 *Estudiar la existencia de ciclos límite para los siguientes sistemas autónomos:*

$$a) \begin{cases} x' = x(x^2+y^2-2x-3) - y \\ y' = y(x^2+y^2-2x-3) + x \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = y + x(x^2+2y^2-\alpha) \\ y' = -x + y(x^2+xy+y^2-\beta). \end{cases}$$

5 *Determinar la existencia o inexistencia de una solución periódica de las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{array}{ll} a)\ x'' + (5x^4 - 9x^2)x' + x^5 = 0; & b)\ x'' - (x^2+1)x' + x^5 = 0; \\ c)\ x'' - (x')^2 - (1+x^2) = 0; & d)\ x'' + x' + (x')^5 - 3x^3 = 0; \\ e)\ x'' + x^6x' - x^2x' + x = 0. & \end{array}$$

6

1. *Demostrar que si $x(t)$ satisface la ecuación de Liénard*

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$

siendo f par y g impar, entonces $y(t) = -x(-t)$ satisface la ecuación de mismo tipo:

$$y'' - f(y)y' + g(y) = 0.$$

2. *Demostrar que la ecuación de van der Pol*

$$x'' + \alpha(x^2 - 1) + x = 0$$

   posee un único ciclo límite para $\alpha \neq 0$ *que es estable para* $\alpha > 0$ *e inestable para* $\alpha < 0$.

3. *Demostrar que la ecuación*

$$ax'' + b(x^2 - 1)x' + cx = 0$$

   se puede transformar en ecuación de van der Pol.

4. *Estudiar la existencia de ciclos límites y su estabilidad para*

$$x'' + (\alpha x^2 - \beta x^4)x' + x = 0.$$