ECUACIONES DIFERENCIALES
(Grupo A)

Estudio cualitativo de sistemas autónomos
Funciones de Liapunov
Hoja 6

1 *1. Demostrar que una función de la forma*

$$V(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

es indefinida.

2. Demostrar que

$$V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

es definida positiva en $\mathbb{R}^2$ *si y sólo si* $a > 0$ *y* $b^2 - 4ac < 0$ *y es definida negativa si y sólo si* $a < 0$ *y* $b^2 - 4ac < 0$.

3. Determinar si las siguientes funciones son definidas positivas, definidas negativas o indefinidas:

$$\begin{array}{lll} a)\ x^2 - xy - y^2; & b)\ -2x^2 + 3xy - y^2; & c)\ x^3 + 3x^2 - 2xy + 4y^2; \\ d)\ 2x^2 - 3xy + 3y^2; & e)\ x^2y + 8x^2 - 2xy + 4y^2; & f)\ -x^2 - 4xy - 5y^2. \end{array}$$

2 *Hallar una función de Liapunov cuadrática,* $V(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$ *para los siguientes sistemas lineales:*

$$a)\ \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y; \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -5x - y; \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = -y; \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = x + \alpha y. \end{cases}$$

3 *Para cada uno de los siguientes sistemas hallar una función de Liapunov (estricta si es posible) de la forma* $V(x,y) = ax^2 + by^2$ *en un entorno de* $(0,0)$ *y discutir la estabilidad de* $(0,0)$.

$$a)\ \begin{cases} x' = -y + xy^2 - x^3 \\ y' = x - 2x^2y - y^3; \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' = -x^3 + 2y^3 \\ y' = -2xy^2; \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x' = -2xy + y^3 \\ y' = x^2 - y^5; \end{cases}$$

4 *Para cada uno de los siguientes sistemas hallar una función de Liapunov de la forma* $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$ *en un entorno de* $(0,0)$, *con* n *y* $m \in \mathbb{N}$, *y discutir la estabilidad de* $(0,0)$.

$$a)\ \begin{cases} x' = -3x^3 - y \\ y' = x^5 - 2y^3; \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x' = -2x + xy^3 \\ y' = -x^2y^2 - y^3; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = y - x^3 - xy^4 \\ y' = -x; \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y\left(e^{x^2+y^2} - 1\right). \end{cases}$$

5 *Analizar la estabilidad de* $(0,0)$ *para el sistema*

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = -2xy, \end{cases}$$

con una función de Liapunov de la forma $V(x,y) = \alpha xy^2 + \beta x^3$.

6 *Analizar el comportamiento de* $V(x,y) = ax^s + by^r$, *con* a, b, s *y* r *convenientemente elegidos, para estudiar la estabilidad de*

$$\begin{cases} x' = y^5 \\ y' = -x^3, \end{cases}$$

7 *Dado el sistema (para $\alpha \in \mathbb{R}$ dado):*

$$\begin{cases} x' = -2y + yz - x^3 \\ y' = x - xz - y^3 \\ z' = xy + \alpha z^3, \end{cases}$$

estudiar la estabilidad del punto de equilibrio $(0,0,0)$

1. *por el método de la primera aproximación (i.e. linealización),*
2. *con una función de Liapunov de la forma* $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

8 *Sea* $f(x)$ *una función tal que* $f(0) = 0$ *y* $xf(x) > 0$ *para* $x \neq 0$.

1. *Demostrar que*
$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds$$
es definida positiva.
2. *Demostrar que la ecuación*
$$x'' + f(x) = 0$$
tiene $x = 0$, $y = x' = 0$ *como punto de equilibrio estable.*
3. *Si* $g(x) \geq 0$ *en un entorno del origen, demostrar que la ecuación*
$$x'' + g(x)x' + f(x) = 0$$
tiene $x = 0$, $y = x' = 0$ *como punto de equilibrio estable.*