

ECUACIONES DIFERENCIALES (Grupo A)

Estudio cualitativo de sistemas autónomos

Funciones de Liapunov

Hoja 6

1. 1. Demostrar que una función de la forma

$$V(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

es indefinida.

2. Demostrar que

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

es definida positiva en \mathbb{R}^2 si y sólo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ y es definida negativa si y sólo si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.

3. Determinar si las siguientes funciones son definidas positivas, definidas negativas o indefinidas:

a) $x^2 - xy - y^2$; b) $-2x^2 + 3xy - y^2$; c) $x^3 + 3x^2 - 2xy + 4y^2$;
d) $2x^2 - 3xy + 3y^2$; e) $x^2y + 8x^2 - 2xy + 4y^2$; f) $-x^2 - 4xy - 5y^2$.

2 Hallar una función de Liapunov cuadrática, $V(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ para los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -5x - y; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = -y; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + \alpha y. \end{cases}$

3 Para cada uno de los siguientes sistemas hallar una función de Liapunov (estricta si es posible) de la forma $V(x, y) = ax^2 + by^2$ en un entorno de $(0, 0)$ y discutir la estabilidad de $(0, 0)$.

a) $\begin{cases} x' = -y + xy^2 - x^3 \\ y' = x - 2x^2y - y^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -x^3 + 2y^3 \\ y' = -2xy^2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -2xy + y^3 \\ y' = x^2 - y^5; \end{cases}$

4 Para cada uno de los siguientes sistemas hallar una función de Liapunov de la forma $V(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ en un entorno de $(0, 0)$, con n y $m \in \mathbb{N}$, y discutir la estabilidad de $(0, 0)$.

a) $\begin{cases} x' = -3x^3 - y \\ y' = x^5 - 2y^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x + xy^3 \\ y' = -x^2y^2 - y^3; \end{cases}$
c) $\begin{cases} x' = y - x^3 - xy^4 \\ y' = -x^2y^2 - y^3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^2y^2 - y^3; \end{cases}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



estudiar la estabilidad de

de $V(x, y) = ax^2 + by^2$, con a, b, c y α convenientemente elegidos, para

$$\begin{cases} x' = y^5 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$

7 Dado el sistema (para $\alpha \in \mathbb{R}$ dado):

$$\begin{cases} x' = -2y + yz - x^3 \\ y' = x - xz - y^3 \\ z' = xy + \alpha z^3, \end{cases}$$

estudiar la estabilidad del punto de equilibrio $(0, 0, 0)$

1. por el método de la primera aproximación (i.e. linealización),
2. con una función de Liapunov de la forma $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

8 Sea $f(x)$ una función tal que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$.

1. Demostrar que

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds$$

es definida positiva.

2. Demostrar que la ecuación

$$x'' + f(x) = 0$$

tiene $x = 0, y = x' = 0$ como punto de equilibrio estable.

3. Si $g(x) \geq 0$ en un entorno del origen, demostrar que la ecuación

$$x'' + g(x)x' + f(x) = 0$$

tiene $x = 0, y = x' = 0$ como punto de equilibrio estable.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of light blue and orange geometric shapes, including a large blue triangle and an orange shape that looks like a stylized '9' or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70