

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## Hoja 1

1 Analizar si las siguientes funciones son lipschitcianas (local o globalmente) y, si existe, calcular su constante de Lipschitz en los intervalos  $[0, b]$  y  $[a, b]$  con  $b > a > 0$ :

1.  $f(x) = |x|^r, r > 0,$

2.  $f(x) = \text{sen } x,$

3.  $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2},$

4.  $f(x) = x \cos \frac{1}{x},$

5.  $f(x) = x \ln |x|.$

2 Calcular las constantes de Lipschitz (si existen) de las siguientes funciones en  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  con  $b_i > a_i \geq 0$  para  $i = 1, 2$ :

1.  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2, -x_2),$

2.  $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|},$

3.  $f(x_1, x_2) = (x_1 \sqrt{|x_2|}, x_1).$

3 Comprobar si las soluciones de las siguientes ecuaciones están definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

1.  $x' = \frac{x^3}{1 + x^2};$

2.  $x' = x \cos \frac{1}{x};$

3.  $x' = \frac{e^t(x^3 + x + t)}{1 + x^2};$

4.  $x' = t^3 \text{sen}(x + t^2).$

4 Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales en sistemas de primer orden y determinar el

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$\dots dt^3 \quad \sqrt{\dots} \quad (dt^2) \dots$

5 Demostrar que para cada  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  la ecuación  $x' = \frac{x^3}{1+x^2}$  tiene una única solución que satisface  $x(t_0) = x_0$ .

6 Consideremos la función  $f(t, x) = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$  para  $(t, x) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$ :

1. Demostrar la continuidad de  $f$ .

2. Estudiar la Lipschitzianidad de  $f$

3. Comprobar que  $x(t) = t^2$  y  $x(t) = -t^2$  son soluciones de  $x' = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$ .

4. Hallar un factor integrante para la ecuación  $x' = \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$ . Determinar todas las soluciones de esta ecuación que pasa por el punto  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ .

5. ¿Cuántas soluciones pasan por el punto  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ ?

The logo for 'Cartagena99' features the word 'Cartagena' in a stylized, teal-colored font with a slight shadow, followed by '99' in a larger, bold, teal font. The text is set against a background of overlapping light blue and orange geometric shapes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70