Estadística
Inferencia Estadística

Universidad Europea de Madrid
Laureate International Universities

Polación y muestra

Objetivos de la Estadística:

- Aprender de la observación.
- Generalizar lo que aprendemos de una muestra a toda la población

Inferencia

Muestra de n observaciones: $X_{1,} X_{2, \ldots,} X_n$ de una población X

Muestra aleatoria simple:

Las X_i tienen las mismas características que X.

Son independientes entre sí.

Cada muestra nos da una información:

Histograma, media muestral varianza muestral ,...

La información depende de la muestra

Estadístico

Un **Estadístico** es una función de la muestra, por lo tanto:

- Su valor depende de los valores de la muestra.
- Es una **variable aleatoria**
- Su distribución es la **distribución muestral**

Ejemplo: La media muestral:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Distribución de la media muestral

Sea X una población con $E[X] = \mu \quad V[X] = \sigma^2$

¿Cuál es la distribución de la media muestral?

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_3}{n}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[Xn]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Distribución de la media muestral

La media muestral es una suma de variables aleatorias

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

Por el Teorema Central del Límite

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Universidad Europea de Madrid

Problemas en Inferencia Estadística

POBLACIÓN $\rightarrow X \approx F(\theta) \leftarrow$ **desconocido**

A partir de una M.A.S. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ queremos estimar el valor de θ

Estimar : Asignar un valor a algo que desconocemos

¿Cómo?

A partir del modelo F y de la muestra

Estimación puntual: Un solo valor

Estimador

Un estimador es un estadístico con la misión de acercarse lo más posible al verdadero valor del parámetro

Valor del parámetro θ $\Rightarrow$ Estimador $\hat{\theta}$

¿Cómo seleccionamos el estimador más adecuado?

Propiedades deseables de los estimadores

- Error cuadrático medio

$$E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=V[\hat{\theta}]+Sesgo^2$$

donde $$Sesgo=E[\hat{\theta}]-\theta$$

Buscamos el estimador con menor error cuadrático medio:

Estimador insesgado

Un estimador es insesgado o centrado si su sesgo es cero

Entonces $$E[\hat{\theta}]-\theta=0 \Rightarrow E[\hat{\theta}]=\theta$$

Buscamos estimadores insesgados

Ejemplo: La media muestral es insesgada para estimar la media poblacional $$E[\overline{X}]=\mu$$

Ejemplo

Sea una población X con media desconocida y varianza 1. Se toma una muestra de tamaño 3.Se consideran los siguientes estimadores de la media poblacional

$$\hat{\mu}_1=\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{3}{5}X_3$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{8}X_1+\frac{5}{8}X_2+\frac{2}{8}X_3$$

¿Son insesgados?

Solución

TODOS SON INSESGADOS

- Calculamos la esperanza de cada uno de ellos

$$E[\hat{\mu}_1] = E\left[\frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3\right] = E\left[\frac{2}{5}X_1\right] + E\left[\frac{1}{5}X_2\right] + E\left[\frac{3}{5}X_3\right] =$$

$$= \frac{2}{5}E[X_1] + \frac{1}{5}E[X_2] + \frac{3}{5}E[X_3] = \frac{2}{5}\mu + \frac{1}{5}\mu + \frac{3}{5}\mu = \mu$$

$$E[\hat{\mu}_2] = E\left[\frac{1}{8}X_1 + \frac{5}{8}X_2 + \frac{2}{8}X_3\right] = E\left[\frac{1}{8}X_1\right] + E\left[\frac{5}{8}X_2\right] + E\left[\frac{2}{8}X_3\right] =$$

$$= \frac{1}{8}E[X_1] + \frac{5}{8}E[X_2] + \frac{2}{8}E[X_3] = \frac{1}{8}\mu + \frac{5}{8}\mu + \frac{2}{8}\mu = \mu$$

$$E[\hat{\mu}_3] = E\left[\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3\right] = E\left[\frac{1}{3}X_1\right] + E\left[\frac{1}{3}X_2\right] + E\left[\frac{1}{3}X_3\right] =$$

$$= \frac{1}{3}E[X_1] + \frac{1}{3}E[X_2] + \frac{1}{3}E[X_3] = \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu$$

Universidad Europea de Madrid

Ejemplos

- ¿Es la varianza muestral un estimador insesgado para estimar la varianza poblacional?

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\sum E[x_i^2] - E[\bar{x}^2] =$$

Cuasi-varianza

- Como la varianza muestral no es insesgado para estimar la varianza poblacional, buscamos un estimador que sí lo sea:

Cuasi-varianza muestral
$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$$

$$E[\hat{S}^2] = E\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] = \frac{n}{n-1}E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) = \sigma^2$$

Recordemos que por el Teorema de Fisher
$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \approx \chi^2_{n-1}$$

Estimador Eficiente

Un estimador es eficiente si tiene varianza mínima

Para buscar el estimador eficiente calculamos la varianza de los estimadores posibles y nos quedamos con el que tenga la menor

Solución

Calculamos sus varianzas

$$V[\hat{\mu}_1]=V\left[\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{3}{5}X_3\right]=V\left[\frac{2}{5}X_1\right]+V\left[\frac{1}{5}X_2\right]+V\left[\frac{3}{5}X_3\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{5}\right)^2V[X_1]+\left(\frac{1}{5}\right)^2V[X_2]+\left(\frac{3}{5}\right)^2V[X_3]=\frac{4}{25}\cdot 1+\frac{1}{25}\cdot 1+\frac{9}{25}\cdot 1=\frac{13}{25}$$

$$V[\hat{\mu}_2]=V\left[\frac{1}{8}X_1+\frac{5}{8}X_2+\frac{2}{8}X_3\right]=\frac{1}{64}+\frac{25}{64}+\frac{4}{64}=\frac{30}{64}$$

$$V[\hat{\mu}_3]=V\left[\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3\right]=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

Universidad Europea de Madrid

Métodos de construcción de estimadores

- Método de los momentos
  - Fáciles de calcular
  - NO siempre tiene buenas propiedades
- Método de máxima verosimilitud
  - Buenas propiedades
  - Más difíciles de calcular

Método de los momentos

JUSTIFICACIÓN: Los momentos muestrales convergen a los poblacionales

Para estimar la media poblacional μ → la media muestral $\overline{X}$

Para estimar la varianza poblacional σ^2 → la varianza muestral $\hat{\sigma}^2$

Para estimar la proporción poblacional p → la proporción muestral $\hat{p}$

Método de los momentos

Procedimiento: Para calcular el estimador de un parámetro debemos igualar los momentos muestrales a los poblacionales. (tantos como parámetros queramos estimar) y resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} E[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \\ \ldots \\ E[X^k]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^k{}_i \end{array}\right\}$$

Ejemplos

1. Calcular el estimador mediante el método de los momentos del parámetro p de una población X con distribución B(m,p) con m conocido.

Establecemos la ecuación (sólo hay que estimar 1 parámetro ⟶ 1 ecuación).

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum X_i \Rightarrow mp = \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$$

Ejemplos

2. Sea una variable aleatoria X con distribución de Poissón de parámetro desconocido. Se toma una muestra de tamaño 5 con los siguientes resultados: 2,3,0,2,1.

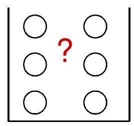
Obtener el estimador por el método de los momentos y calcularlo

Establecemos la ecuación:

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum X_i \Rightarrow \lambda = \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \bar{x}$$

Método de Máxima Verosimilitud

El principio de máxima verosimilitud está basado en un principio que se ilustra con el siguiente ejemplo:



Supongamos que tenemos una urna con 6 bolas de color blanco y negro ,no todas del mismo color, pero que no sabemos en que proporción.

Para adivinar la composición de la urna se pueden extraer 2 bolas con reposición

B \ p	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6
0	$(5/6)^2$	$(4/6)^2$	$(3/6)^2$	$(2/6)^2$	$(1/6)^2$
1	$2\frac{1}{6}\frac{5}{6}$	$2\frac{2}{6}\frac{4}{6}$	$2\frac{3}{6}\frac{3}{6}$	$2\frac{4}{6}\frac{2}{6}$	$2\frac{1}{6}\frac{5}{6}$
2	$(1/6)^2$	$(2/6)^2$	$(3/6)^2$	$(4/6)^2$	$(5/6)^2$

Universidad Europea de Madrid

Método de máxima verosimilitud

¿Cuántas bolas blancas hay en la urna?

Depende del número de bolas blancas extraídas :

- Ninguna bola blanca: B=0 ➡ p=1/6 Hay una bola blanca
- Una bola blanca: B=1 ➡ p=3/6 Hay 3 bolas blancas

Método de máxima verosimilitud

Función de verosimilitud: $L_\theta(x_1,...,x_n) = \begin{cases} p(x_1)\cdots p(x_n) \text{ caso discreto} \\ f(x_1)\cdots f(x_n) \text{ casocontinuo} \end{cases}$

El estimador máximo verosímil es el que maximiza el logaritmo de la función de verosimilitud

$$\max_\theta LnL_\theta(x_1,...,x_n) = L(\hat{\theta}, X_1,..., X_n)$$

Universidad Europea de Madrid

Observaciones

- Siempre es un valor del espacio paramétrico.
- Si $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ, entonces $g(\hat{\theta})$ es el estimador de máxima verosimilitud de g(θ).
- No es único.
- No tiene por qué ser insesgado.

Ejemplo

Calcular el estimador máximo verosímil del parámetro p de la distribución Binomial B(m;p), en una muestra aleatoria simple de tamaño n.

Tomamos una mas de la población y calculamos su función de verosimilitud (caso discreto)

$$L_p(X_1,\dots,X_n) = \binom{m}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{m-x_1} \cdots \binom{m}{x_n} p^{x_n}(1-p)^{m-x_n} =$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\binom{m}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i} p^{\sum x_i}(1-p)^{nm-\sum x_i}$$

Para calcular el estimador, tomamos logaritmos y calculamos el máximo:

$$\ln L_p(X_1,\dots,X_n) = \sum \ln\binom{m}{x_i} + \sum x_i \ln p + (nm - \sum x_i)\ln(1-p)$$

Ejemplo

Calculamos el máximo, derivando e igualando a 0, por ser la función derivable:

$$\frac{\partial \ln L_p(X_1,\dots,X_n)}{\partial p} = \sum x_i \frac{1}{p} + (nm - \sum x_i)\frac{-1}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{p} - \frac{(nm - \sum x_i)}{1-p} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{\sum x_i}{nm} = \frac{\bar{x}}{m}}$$